PAUL K. REES

FRED W. SPARKS

ALGEBRA

REES

SPARKS

ALGEBRA

ER

EDITORIAL
REVERTÉ

ALGEBRA

PAUL K. REES
Profesor de Matemáticas
de la Universidad de Lousiana

FRED W. SPARKS
Profesor de Matemáticas
del Colegio Tecnológico de Texas

ALGEBRA

REVERTÉ EDICIONES

Título de la obra original:
COLLEGE ALGEBRA

Versión española
José Emilio Amores

Propiedad de:

Río Pánuco, 141
06500 México, D.F.
Tel. 5533-5658 al 60 Fax: 5514-6799
reverte@reverte.com.mx

ISBN 84-291-5111-7
ISBN 978-84-291-5111-4 ESPAÑA
ISBN 978-968-6708-07-3 MÉXICO

Impreso en México Printed in Mexico

Reimpresión 2011

PREFACIO

LA PUBLICACIÓN DE ESTA cuarta edición del "Algebra" lleva implícita la necesidad de establecer algunas comparaciones con la edición anterior.

Si por una parte se han conservado el plan general, el orden de los temas y la extensión de la tercera edición, en cambio, por otra, se han introducido ciertas modificaciones bastante importantes. Varios de los parágrafos fueron ampliados o sustituídos por nuevos textos. Ejemplos de tales modificaciones son la discusión del sistema numérico en el capítulo 1, la resolución gráfica de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas en el Capítulo 6, la introducción a las ecuaciones de segundo grado en el Capítulo 8, las raíces de números complejos en el Capítulo 11, así como el tratamiento de sistemas de ecuaciones homogéneas de primer grado, los sistemas de m ecuaciones de primer grado con n incógnitas y una gran parte de la discusión de permutaciones y combinaciones.

Además, se han añadido nuevos parágrafos sobre funciones representadas por segmentos de rectas, soluciones de problemas mediante ecuaciones simultáneas, tasa efectiva y determinación del pago periódico, término y tasa.

En ciertas partes se ha cambiado la terminología y el simbolismo para actualizarlas según el uso moderno. Por ejemplo, la palabra *polinomio* se emplea solamente para designar una función racional entera, en tanto que la palabra *multinomio* se usa para referirse a una expresión formada por varios términos:

Al igual que en las ediciones anteriores, en la redacción de los textos se ha empleado un estilo informal procurando evitar el uso de frases largas o complicadas. Los nuevos conceptos se introducen a medida que se hacen necesarios. Además, se ha prescindido de la práctica de iniciar

una discusión *directamente,* sea con una definición formal, con una regla de procedimiento, o con el enunciado de un principio. El camino para la introducción de nuevos conceptos se ha preparado mediante la explicación previa de su necesidad, recurriendo el uso de ejemplos ilustrativos o de pasos lógicos que conducen a la conclusión final, dejando la presentación del enunciado formal a modo de sumario y con una referencia fácil para su localización.

Se examinó el texto completo de esta edición con el deseo de aclarar algunos puntos que pudieran a primera vista ser difíciles de comprender. Para ello se añadió material introductorio en aquellos lugares en donde es aconsejable hacerlo, se agregaron notas cortas que sirvieron para repasar puntos estudiados previamente y se adicionaron pasos intermedios en la resolución de los ejemplos.

Frecuentemente las dificultades del estudiante se originan en la falta de una planeación sistemática. Para ayudarle a vencer esta dificultad se proporcionan instrucciones detalladas para obtener una solución ordenada. Los procedimientos difíciles y los tipos de problemas que aparecen en los ejercicios se ilustran mediante ejemplos cuidadosamente explicados. En la presentación de estos ejemplos se ha evitado la práctica de interrumpir los pasos de la solución con explicaciones largas. Por el contrario, la explicación de cada paso se da mediante un breve enunciado que aparece a la derecha.

Como una ayuda adicional, para organizar mejor el aprendizaje, se ha empleado un formato completamente nuevo. Para evitar la interrupción de una discusión, debida a los cambios frecuentes del tipo de letra, se ha procurado el uso de notas marginales que señalan las definiciones, los conceptos, las leyes y las descripciones de los pasos de una solución. Tales notas marginales sirven también para localizar más fácilmente el material necesario para una consulta o un repaso.

Para diferenciar claramente lo fundamental de lo auxiliar, se han impreso en color tanto las notas marginales como las anotaciones de los ejemplos resueltos; de este modo, su naturaleza y su función resultan evidentes a primera vista.

Puesto que en cualquier texto de álgebra es de necesidad fundamental un número suficiente de ejercicios, se han incluído aproximadamente 4200 nuevos problemas, agrupados en 89 ejercicios regulares y en 4 ejercicios suplementarios. En ellos se incluyen problemas semejantes a los requeridos para estudiar geometría analítica y cálculo. Se han evitado los problemas en que las computaciones numéricas oscurecen, por laboriosas, los principios empleados. Los problemas de cada ejercicio están graduados y aparecen en grupos de cuatro, siendo cada grupo de aproximadamente el mismo nivel referido al mismo principio. Lo anterior permite que el profesor asigne tareas del tema y nivel adecuados sin tener que analizar todos los problemas del ejercicio. Se proporcionan respuestas a tres problemas de cada cuatro.

Siendo difícil cubrir un curso semestral el material que comúnmente aparece en un libro de álgebra, es natural que exista una gran diferencia entre una escuela y otra acerca de la selección de los temas y del tiempo dedicado a cada uno. Por tanto, la flexibilidad resulta muy deseable en un texto de esta materia. Se ha tratado de lograr tal flexibilidad organizando el material de modo que cada ejercicio esté precedido por cierta dosis de texto que permita cubrir ambos, texto y ejercicio, en una misma sesión. Cada ejercicio contiene además suficiente número de problemas como para dedicar a cada tema más tiempo, si así se desea. Los parágrafos cuya omisión es más factible aparecen al final de cada capítulo. De este modo su eliminación no interfiere con la sucesión de los temas. Los primeros cuatro capítulos están dedicados a un repaso del álgebra elemental. Cada uno de estos capítulos está acompañado por una extensa lista de problemas suplementarios. Por supuesto estos capítulos pueden estudiarse tan rápidamente como se estime necesario.

PAUL K. REES

FRED W. SPARKS

CONTENIDO

1 LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES

ADEMÁS DE SER ESTUDIADAS por vocación o por distracción las matemáticas constituyen una herramienta cada vez más indispensable para un cierto número de ramas importantes del saber. Parte de esa herramienta son los procesos algebraicos. Por así decirlo, el álgebra proporciona los medios para expresar de manera concisa las relaciones entre números en sí desconocidos. Más aún: va a proporcionar los medios para manipular tales números. Estos dos aspectos de la utilidad del álgebra se harán tanto más evidentes según el estudiante avance en sus cursos profesionales.

Dado que este curso es una ampliación de cualquier otro de carácter introductorio, iniciaremos su estudio a través de la revisión de algunas de las definiciones y de los procesos que son básicos y que, con seguridad, ya fueron estudiados.

1.1 EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

El álgebra trata con números y con letras que representan números. En los primeros siete capítulos de este libro se tratará con números que pertenecen al sistema de los números reales y con las cuatro operaciones fundamentales: adición, multiplicación, sustracción y división.

El sistema de los números reales es una creación de la mente humana, condición que debe tenerse presente a lo largo del estudio que sigue. No sólo son posibles otros sistemas numéricos sino que uno de ellos, el sistema binario, es el usualmente empleado en las computadoras electrónicas. El sistema numérico, tal como ha llegado a nuestra época, se desarrolló a lo largo de un período de miles de años a través de los

cuales fueron apareciendo, de manera irregular, nuevas invenciones que respondían a la necesidad creciente de hacer más amplia la utilidad del sistema

La prolongada historia del sistema numérico es la causa de la existencia de nombres que ahora se consideran poco afortunados: números reales, números imaginarios, números complejos, números racionales y números irracionales. Cuando el lector encuentre tales términos debe estar alerta a atribuirles *sólo el significado matemático que les corresponde por definición* y no pensar en ellos a través del uso familiar de *real*, *imaginario* y *racional.**

enteros positivos

El primer paso en la creación del sistema de los números reales fue la invención de los *enteros positivos* 1, 2, 3 . . . , o números empleados para contar un conjunto de objetos. Evidentemente, un conjunto numérico es inadecuado si la suma, el producto, la diferencia o el cociente de dos de los números del sistema no es también un elemento del sistema. Por ejemplo, no existe ningún entero positivo que sea igual a $5 - 9$ ó a $5 \div 9$. Esto es, la sustracción y la división sólo pueden aplicarse de manera limitada a los enteros positivos. Tal hecho nos lleva al concepto de *cerradura*.

cerradura

Se dice que un conjunto de números es *un conjunto cerrado*, para una operación, si al aplicar dicha operación a dos elementos del conjunto el resultado es también un elemento del conjunto. Puesto que la suma y el producto de dos enteros positivos cualesquiera es también un entero positivo entonces el conjunto de los enteros positivos es un conjunto *cerrado* con respecto a la adición y la multiplicación. En cambio, la diferencia y el cociente de dos enteros positivos no conduce *siempre* a un entero positivo, esto es, el conjunto de los enteros positivos no es un conjunto cerrado con respecto a la sustracción y la división. Es así como se origina la necesidad de ampliar el sistema. (Recuérdese que el sistema numérico es una invención.) En el resto de este parágrafo se discutirán las ampliaciones introducidas en el sistema de los números.

Interpretación de los números como distancias. La interpretación de los números como distancias es útil para definir y para comprender las ampliaciones mencionadas del sistema numérico. Para ello se usarán la línea recta indefinida $L'L$ (Fig. 1.1), un punto O fijo sobre ella, y la unidad de distancia u. A la derecha de O se trazan intervalos de longitud u, obteniéndose los puntos que aparecen debajo de la línea. Luego, a partir del primer punto a la derecha de O, se colocan sucesivamente los enteros 1, 2, 3 . . . Se tiene así la certeza de que cada uno de los puntos marcados en la línea está asociado tanto con uno de los números enteros como con una distancia que representa a cada uno

* En caso de duda acerca del significado matemático de un término el lector deberá consultar el glosario que aparece al final del libro.

de ellos. Por ejemplo, el punto A está asociado con 4 y la distancia OA representa 4.

enteros negativos

El siguiente paso consiste en trazar intervalos de longitud u, a la izquierda de O, y de asignar los números -1, -2, -3, . . . a los puntos así obtenidos. Estos números se denominan *enteros negativos*. Finalmente, al punto O se le asigna el entero *cero*.

cero

Por otro lado, puede observarse la existencia de una distancia OB que representa el cociente de 11 y 4, o sea, $\frac{11}{4}$. De manera similar, y mediante subdivisión adecuada de los intervalos, se puede obtener una distancia que represente el cociente de cualesquiera dos enteros diferentes de cero, así como un punto asociado con aquélla. Por último, la distancia OC, igual a $-\frac{5}{3}$ ilustra el hecho de que existe una distancia medida a la izquierda de O que representa el negativo del cociente de dos enteros diferentes de cero.

números racionales

Números racionales e irracionales. Se definirá ahora *número racional* como todo aquel número que se pueda expresar como el cociente de dos números enteros, siempre que el divisor sea diferente de cero.* Puesto que cualquier entero n es igual a $n \div 1$, entonces el conjunto de todos los números racionales incluye a los números enteros. Además, de acuerdo con las reglas de la aritmética y de las leyes de los signos de álgebra elemental, la suma, la diferencia, el producto y el cociente (siempre que el divisor no sea cero) de dos números racionales son también números racionales. Esto es, el conjunto de todos los números racionales es un conjunto cerrado con respecto a las cuatro operaciones fundamentales, siempre y cuando en la división el divisor sea diferente de cero.

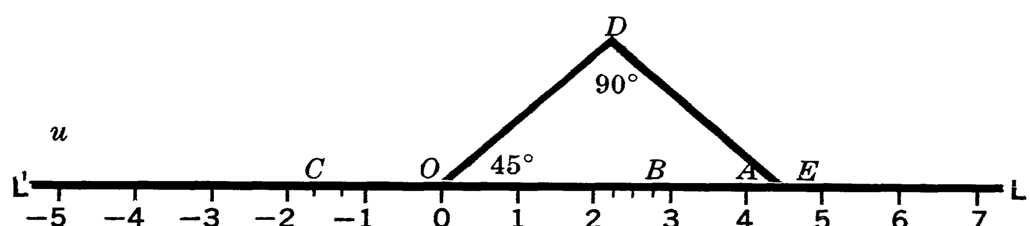


Figura 1.1

Aun cuando el conjunto de los números racionales satisface las condiciones de conjunto cerrado para las cuatro operaciones fundamentales, existen en la línea $L'L$ (Fig. 1.1) otros puntos que no pueden ser asociados con cualquier número racional. Para determinar uno de esos puntos se traza la línea OD (Fig. 1.1) con longitud igual a tres unidades y formando un ángulo de 45° con $L'L$. Se traza luego DE perpendicular a OD y que intersecta a $L'L$ en E. Puesto que ODE es un triángulo rectángulo y puesto que el ángulo EOD mide 45°, entonces, el ángulo DEO mide también 45°. Por tanto, $OD = DE = 3$. Además, de acuerdo con el teorema de Pitágoras, $OE = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$. En consecuencia, E es igual a $\sqrt{18}$ unidades a partir de O. Al llegar

*La razón para tal restricción se explicará en el Pr. 1.10

la discusión a este nivel se hace necesaria la introducción de otro concepto. En lo que antecede se ha encontrado una distancia igual a $\sqrt{18}$, pero $\sqrt{18}$ no se puede expresar como el cociente de dos enteros.* Por definición, entonces, $\sqrt{18}$ es un número *no* racional. Números tales como $\sqrt{18}$ se denominan *irracionales.* El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales constituyen el conjunto de los números reales.

números irracionales

Definición del sistema de los números reales. Se define el *conjunto de los números reales* como el conjunto de los números r que se pueden asociar con puntos R situados sobre una línea recta de tal manera que cada punto R está a una distancia r del punto fijo O. Si R está a la derecha de O, r es positivo; si R está a la izquierda de O, r es negativo; si R coincide con O, r es cero. Cero no es positivo ni negativo y separa, además, a los números positivos de los números negativos. Mediante el uso de métodos más avanzados se puede demostrar que el conjunto de todos los números reales es un conjunto cerrado con respecto a las cuatro operaciones fundamentales. Por otra parte, el conjunto de todos los números reales *positivos* es también un conjunto cerrado con respecto a la operación de extraer raíces. Pero como el cuadrado de cualquier número, positivo o negativo, es un número positivo, entonces la raíz cuadrada de un número negativo no existe dentro del sistema de los números reales.† En consecuencia, el conjunto de todos los números reales no es cerrado con respecto a la extracción de raíces. En el capítulo 11 se mostrará la manera de ampliar el sistema numérico para fin de subsanar esta deficiencia. En los primeros siete capítulos de este libro se utilizará exclusivamente el sistema de los números reales.

Para comodidad del lector se volverán a repetir las tres definiciones

*La proposición anterior se puede demostrar con base en el álgebra elemental y considerando que a/b es una fracción en su mínima expresión; esto es, a y b no tienen más factor común que la unidad.

Por hipótesis,

$$\frac{a}{b} = \sqrt{18}$$

Por tanto,

$a = b\sqrt{18}$ *multiplicando cada miembro del cociente anterior por b*

$a^2 = 18b^2$ *elevando cada miembro al cuadrado*

Puesto que $18b^2$ es un número par, a^2 es par y también lo será a. En consecuencia, se puede suponer que $a = 2A$ y que $a^2 = 4A^2$. Esto es

$$4A^2 = 18b^2$$
$$2A^2 = 9b^2$$

Ahora, puesto que $2A^2$ es par, $9b^2$ también es par. Por tanto, b^2 tiene que ser par y también lo será b. De esta manera resulta que a y b son pares, conclusión que contradice la hipótesis de no existir entre ellos más factor común que la unidad.

†En caso de existir habría un número real que multiplicado por sí mismo diera por resultado un número negativo.

dadas anteriormente. Si R es un punto situado sobre la línea recta $L'L$ a una distancia r del punto fijo, o punto cero O, entonces r es un número *real*. El *sistema de los números reales* es el conjunto de todos los puntos determinados de aquella manera sobre $L'L$. Si R está a la derecha de O, r es positivo. Si R está a la izquierda de O, r es negativo. Si R coincide con O, r es cero.

Un *número racional* es un número real que se puede expresar como el cociente de dos enteros. Un *número irracional* es un número real que no se puede expresar como el cociente de dos enteros.

La definición del sistema de los números reales le asigna a los números reales una propiedad de dirección; en consecuencia, un cambio en el signo de un número real invierte la dirección de la distancia representada por tal número. Esto es, $-(-a) = a$. Las relaciones *mayor que* (simbolizada por $>$) y *menor que* (simbolizada por $<$) se pueden interpretar gráficamente como sigue: el número M es mayor o menor que N según el punto que representa a M esté a la derecha o a la izquierda del que representa a N. Esto es, $-4 < 1$, $-1 > -3$ y $4 > -4$.

valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número se define como sigue: el *valor absoluto* o *valor numérico* de un número real positivo es el número mismo. El valor absoluto o valor numérico de un número real negativo es el mismo número con signo opuesto.

El valor absoluto de n se representa por medio del símbolo $|n|$ y se puede imaginar como la distancia entre O y el punto que representa a n en la escala de los números reales (Fig. 1.1). A continuación se dan otros ejemplos de valores absolutos de algunos números:

$|5| = 5 \qquad |-3| = 3$

$|n| = n$ si n es positivo $\qquad |n| = -n$ si n es negativo

1.2 DEFINICIONES BASICAS

Las operaciones fundamentales del álgebra son la adición, la sustracción, la multiplicación y la división. En la discusión de estas operaciones y a lo largo de todo el libro usaremos frecuentemente la siguiente terminología.

expresión

Un grupo de números y letras combinadas entre sí mediante una o más de las operaciones fundamentales recibe el nombre de *expresión algebraica*.

término

Un número o una letra, o varios números y letras combinados entre sí mediante las operaciones de multiplicación o de división,* o de ambas, recibe el nombre de *término*.

* Más adelante (Pr. 1.4) se indicará que la suma de dos o más números encerrada en un paréntesis se considera como un solo número. Así, en la expresión $a^2 - (b - c)(b + c) / (b^2 + c^2)$, $b - c$, $b + c$ y $b^2 + c^2$ se consideran como tres cantidades individuales. Además, como $(b - c)(b + c) / (b^2 + c^2)$ comprende únicamente la multiplicación y la división representa, por tanto, a un solo término de la expresión algebraica.

Puesto que un término no implica ni adición ni sustracción, todo grupo de letras que en una expresión algebraica esté separado de otros grupos mediante los signos más o menos es un término. De acuerdo con lo anterior, el signo de un término es el signo que lo precede.

coeficiente numérico

En la expresión $3a^2 - 2ab + 4c^2$, $3a^2$, $-2ab$ y $4c^2$ son términos. Si un término está compuesto de un número y una o más letras, el número recibe el nombre de *coeficiente numérico* de las letras en el término.

Por ejemplo, en $3a^2b$, 3 es el coeficiente numérico de a^2b. Comúnmente al hablar del coeficiente numérico se dice simplemente el coeficiente.

monomio
binomio
trinomio
multinomio

Una expresión algebraica que contiene solamente un término se denomina *monomio*. Una expresión algebraica que contiene exactamente dos términos se denomina *binomio*. Una expresión algebraica que contiene exactamente tres términos se denomina *trinomio*. En general, las expresiones que contienen más de tres términos se llaman *multinomios*.

Cabe señalar que de acuerdo con la definición anterior los binomios y los trinomios son casos particulares de *multinomios*. Sin embargo, usualmente el término *multinomio* se reserva para designar expresiones que contienen más de tres términos.

1.3 ADICION Y SUSTRACCION

regla de la adición algebraica

En álgebra los términos *suma y diferencia* se usan en el mismo sentido que en aritmética, si se aplican a números positivos. Sin embargo, su aplicación a números negativos hace necesario precisar el procedimiento de adición. Esta operación más amplia, que se conoce como adición algebraica, se describe en el regla siguiente. *La suma algebraica de dos números con el mismo signo es la suma de los valores absolutos de los dos números, precedida de su signo común; la suma algebraica de dos números con signo diferente es la diferencia de los valores absolutos de los números, precedida por el signo del número de mayor valor absoluto.*

Para hacer la suma de varios términos que poseen las mismas letras, se efectúa la suma aritmética de los coeficientes y se agrega el grupo de letras; por ejemplo, la suma de $3a^2b$ y $2a^2b$ es $5a^2b$ y la suma de $6xy$ y $-8xy$ (expresada en la forma $6xy - 8xy$) es $-2xy$.

La suma de dos o más términos que contienen letras diferentes puede ser solamente expresada colocando un signo más entre ellos; por ejemplo la suma de $-4ab$ y $3cd$ es $-4ab + 3cd$.

En aritmética se puede comprobar que, para cualquier par de números que se ensaye, la suma es la misma independientemente del orden en que se efectúe la adición. Esto se conoce como la propiedad conmutativa de la adición. Consideraremos que esto es cierto para todos los números y tendremos entonces el axioma siguiente:

propiedad conmutativa de la adición

La adición es conmutativa, esto es, $a + b = b + a$.

Otra propiedad de la adición que puede comprobarse fácilmente para cualesquiera tres o más números dados, es que la suma es la misma independientemente del orden en el cual los números se adicionen. Por ejemplo, $2 + 3 + 7 = 5 + 7 = 2 + 10 = 9 + 3 = 12$. Al igual que en el párrafo anterior consideraremos que esta propiedad, conocida como la propiedad asociativa de la adición, es válida para todos los números. De ese modo tenemos el axioma siguiente, en el cual los paréntesis se usan para indicar el orden en que se efectúa la adición:

propiedad asociativa de la adición

La adición es asociativa, así: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Estos dos axiomas son la base del procedimiento usual para encontrar la suma de dos o más expresiones, esto es, del procedimiento en el cual se escribe cada expresión debajo de la que le precede, y al mismo tiempo, se ordenan los términos de tal modo que los que contienen las mismas letras queden formando columnas; por ejemplo, con objeto de sumar las expresiones $3x^2 + x - 1$; $2 + 2x^2 - 3x$; y $4x - 3 - x^2$; se escriben las expresiones como se indica a continuación y se suman entonces los términos en columnas separadas.

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & +\ x & -\ 1 \\ 2x^2 & -\ 3x & +\ 2 \\ -x^2 & +\ 4x & -\ 3 \\ \hline 4x^2 & +\ 2x & -\ 2 \end{array}$$

El proceso de restar o sustraer b de a equivale a encontrar x, tal que $a = b + x$. Se determina x sumando $-b$ a cada miembro de la igualdad, obteniéndose $a + (-b) = b + x + (-b) = x$. Con ello se verifica la regla usual de la sustracción: *para restar una cantidad de otra se cambia el signo del sustraendo* y se procede como en la adición.*

regla de la sustracción algebraica

EJEMPLO 1 Sustraer -3 de 10.
Solución: De acuerdo con la regla para sustraer -3 de 10 se cambia el signo del número por sustraer y se suma. Así, $10 - (-3) = 10 + 3 = 13$.

EJEMPLO 2 Sustraer -8 de 6.
Solución: Para sustraer -8 de 6, se escribe $6 - (-8) = 6 + 8 = 14$.

EJEMPLO 3 Sustraer $3x - 5y + 7z$ de $5x + 2y - 3z$.
Solución: Se escribe el sustraendo debajo del minuendo como se indica a continuación; luego, *mentalmente,* se cambia el signo de cada término en el sustraendo y se hace la adición. De esa manera, se obtiene la resta indicada.

$5x + 2y - 3z$	*minuendo*
$3x - 5y + 7z$	*sustraendo*
$2x + 7y - 10z$	*resta*

*La expresión que se sustrae se llama *sustraendo* y la expresión de la que se sustrae se llama *minuendo.* El número que se obtiene como resultado de la sustracción se denomina *resta.*

1.4 SIMBOLOS DE AGRUPACION

Cuando un grupo de términos en una expresión algebraica van a ser manejados como un solo número, se encierran* en paréntesis, ( ); en corchetes, [ ]; o bien en llaves, { }. Estos símbolos se usan también para indicar que se van a efectuar ciertas operaciones algebraicas y el orden en el cual deben efectuarse. Por ejemplo,

$$(2x + 4y - z) + (3x - 2y + 3z) \tag{1.1}$$

significa que el número represntado por la expresión en el primer paréntesis debe sumarse al representado por la expresión en el segundo. De igual modo,

$$(6a - 5b + 2c) - (2a - 3b + 2c) \tag{1.2}$$

indica que el número representado por la última expresión debe restarse del representado por la primera. Finalmente,

$$(4a^2 - b^2) - (a + b)(2a - b) \tag{1.3}$$

significa que $(a + b)$ debe multiplicarse por $(2a - b)$ y el producto obtenido restarse de $(4a^2 - b^2)$.

Con objeto de efectuar las operaciones indicadas mediante el uso de los símbolos de agrupación, se necesita quitar dichos símbolos antes de llevar a cabo la operación final. Si la operación indicada es la adición, se puede, por el axioma de la asociatividad, omitir los símbolos de agrupación y combinar los términos en el orden que se desee. Así, en (1.1) se tiene

$$\begin{aligned}(2x + 4y - z) + (3x - 2y + 3z) &= 2x + 4y - z + 3x - 2y + 3z \\ &= 2x + 3x + 4y - 2y - z + 3z \\ &= 5x + 2y + 2z\end{aligned}$$

Si la operación indicada es la sustracción, el grupo de términos encerrados en el paréntesis precedido del signo menos, es el sustraendo. Por tanto, de acuerdo con la definición de sustracción, se cambian todos los signos del sustraendo, se omiten los símbolos de agrupación y se combinan después los términos en el orden que se desee. Por consiguiente, en (1.2) se tiene

$$\begin{aligned}(6a - 5b + 2c) - (2a - 3b + 2c) &= 6a - 5b + 2c - 2a + 3b - 2c \\ &= 6a - 2a - 5b + 3b + 2c - 2c \\ &= 4a - 2b\end{aligned}$$

De este modo se obtiene el siguiente procedimiento para eliminar los símbolos de agrupación en una expresión algebraica.

Si en una expresión algebraica es necesario eliminar la pareja de símbolos de agrupación precedido por un signo menos, debe cambiarse el signo de cada uno de los términos encerrados por estos símbolos.

*Algunas veces se indica la misma operación colocando el grupo de términos debajo del vínculo ———; por ejemplo, $\overline{a + bx}$.

reglas para eliminar símbolos de agrupamiento

Sin embargo, si los símbolos de agrupación están precedidos por un signo más, pueden eliminarse sin ningún cambio en la expresión. Recíprocamente, si en una expresión algebraica es necesario insertar un par de símbolos de agrupación precedido de un signo menos, deben cambiarse los signos de cada uno de los términos que quedan encerrados.

Cuando una expresión algebraica contiene uno o más pares de símbolos de agrupación, encerrados en otro par, se eliminará primero el de más adentro.

EJEMPLO Eliminar los símbolos de agrupación en la expresión

$$2x - \{3x + [4x - (x - 2y) + 3y] - 4y\} + 2y$$

Solución

$$
\begin{aligned}
2x &- \{3x + [4x - (x - 2y) + 3y] - 4y\} + 2y \\
&= 2x - \{3x + [4x - x + 2y + 3y] - 4y\} + 2y && \textit{eliminar paréntesis} \\
&= 2x - \{3x + [3x + 5y] - 4y\} + 2y && \textit{agrupar en corchetes} \\
&= 2x - \{3x + 3x + 5y - 4y\} + 2y && \textit{eliminar corchetes} \\
&= 2x - \{6x + y\} + 2y && \textit{agrupar en llaves} \\
&= 2x - 6x - y + 2y && \textit{eliminar llaves} \\
&= -4x + y && \textit{ordenar términos}
\end{aligned}
$$

Para efectuar las operaciones indicadas en (1.3) se efectúa primero la multiplicación usando los métodos indicados en el párrafo 1.6, se sustituye después el producto indicado por el producto obtenido y se encierra entre paréntesis. Luego se eliminan los paréntesis y se combinan los términos. Se tiene así:

$$
\begin{aligned}
(4a^2 - b^2) - (a + b)(2a - b) &= (4a^2 - b^2) - (2a^2 + ab - b^2) \\
&= 2a^2 - ab \\
&= 4a^2 - b^2 - 2a^2 - ab + b^2
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 1: ADICION Y SUSTRACCION

Ejecútense las operaciones indicadas en los problemas 1 a 24.

1: $3 + 5 - 2$	2: $1 + 6 - 3$
3: $5 - 2 - 1$	4: $7 - 2 - 3$
5: $11 - 6 - 2 + 1$	6: $13 - 14 + 2 - 8$
7: $13 - 2 - 1 - 3$	8: $2 - 3 - 12 + 1$
9: $7 + (-2) + (-3)$	10: $14 + (-3) + (-8)$
11: $22 + (-2) - (+3)$	12: $19 - (+3) - (+8)$
13: $4 - (-1) + (-2)$	14: $16 - (-5) - (-9)$
15: $-13 + (-5) - (-12)$	16: $23 - (-7) + (-21)$
17: $9a - 2a - 3a$	18: $10b - 3b - 4b$
19: $12x + 2x - 7x$	20: $2x - 5x - 8x$
21: $5a + 2b - 7a - b$	22: $12y + 3a - 5y - a$
23: $7x + 3x - 2y - 8y$	24: $7p + 8q - p + q$

Encuéntrese la suma de las expresiones en los problemas 25 a 32.

25: $\begin{array}{r} 2x - y + 3z \\ \underline{4x - 3y + 2z} \end{array}$ 26: $\begin{array}{r} 5w + 3t - 8u \\ \underline{2w + t - 6u} \end{array}$ 27: $\begin{array}{r} 4r - 3u - 6t \\ \underline{3r + 5u + 2t} \end{array}$

28: $\begin{array}{r} 2p - 3a + 4r \\ -6p + 4a - 5r \\ \hline \end{array}$

29: $\begin{array}{r} 2s + 3i - 4m \\ 3s - 2i + 3m \\ -4s - 5i \qquad \\ \hline \end{array}$

30: $\begin{array}{r} 8t - 5u + 7b \\ -4t - 3u - 3b \\ - 8u - 4b \\ \hline \end{array}$

31: $\begin{array}{r} 4s + 2a + y \\ 6s \qquad - 4y \\ -5s - 7a + 2y \\ \hline \end{array}$

32: $\begin{array}{l} 6r + 3e - 2d \\ 3r - 5e \\ -5r + 4e - 5d \\ \hline \end{array}$

Encuéntrese la suma de las expresiones en los problemas 33 a 36.

33: $2s - 3a + 4w, 2w + 2a - 3s, 5a - 2w$
34: $2b + 5u + 7t, 2t - 4u - 4b, 2u - 6b$
35: $4n - 3a + 6t, -3t + 2a - 5n, 3a - 4n + 3t$
36: $2b - 4u + 2s, 9s - 3u - 5b, 6u - 2s$

Réstese la segunda expresión de la primera en los problemas 37 a 48.

37: $\begin{array}{r} 25 \\ 13 \\ \hline \end{array}$

38: $\begin{array}{r} 24 \\ -10 \\ \hline \end{array}$

39: $\begin{array}{r} -17 \\ 6 \\ \hline \end{array}$

40: $\begin{array}{r} -13 \\ -17 \\ \hline \end{array}$

41: $\begin{array}{r} 2a - t \\ a + t \\ \hline \end{array}$

42: $\begin{array}{r} 3h + 2e \\ 2h + 3e \\ \hline \end{array}$

43: $\begin{array}{r} 5a - 3s \\ -2a - 2s \\ \hline \end{array}$

44: $\begin{array}{r} 2a - 5h \\ -3a + 2h \\ \hline \end{array}$

45: $\begin{array}{r} 2s + 3a + 5y \\ s + 3a - 2y \\ \hline \end{array}$

46: $\begin{array}{r} 5m - 3a + 2n \\ -3m + 2a - n \\ \hline \end{array}$

47: $\begin{array}{r} 5y + 2e + 8s \\ 2y + 2e - 3s \\ \hline \end{array}$

48: $\begin{array}{r} -3t + 4a + 7g \\ -2t - 3a + 5g \\ \hline \end{array}$

Encuéntrense los valores de las expresiones en los problemas 49 a 56, tomando las letras con los valores numéricos indicados.

49: $2x - 3y + 4z; x = 2, y = -3, z = 1$
50: $5x + 2y - 3z; x = 4, y = 2, z = -3$
51: $4x - 3y + 5z; x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{3}{5}$
52: $6x + 5y - 2z; x = -\frac{1}{3}, y = \frac{3}{5}, z = -2$
53: $a + 2|a| - |b|; a = -3, b = 2$
54: $2a - |a| - 3b; a = 4, b = -3$
55: $|a| + a - |b|; a = -2, b = 1$
56: $|a| - 2a - 3|b|; a = -3, b = -2$

Elimínense los símbolos de agrupación en las expresiones de los problemas 57 a 68 y combínense los términos semejantes.

57: $2x - (3x - y) + (2x + y)$
58: $3a - (2b - 3c) + (2a - c)$
59: $4b - (3a - 2c) - (2b - 3c)$
60: $5c + (4a - 2b) - (2a - 2b - c)$
61: $2a - [y - (2a + 3y) - y]$
62: $4s - [2s - (3s - t) + 2t]$
63: $2b - [5a - (2a - 3b) - a]$
64: $5s - [2t + (3s - 4t) - s]$
65: $2a - \{2a - [2a - (2a - b) - b] - b\} - b$
66: $4x - \{3y + [4x - (3y - 4x) - 3y] - 4x\} - 3y$
67: $3x - \{2x + [3x - 2y - (5x - 4y) - 2x] - 5y\}$
68: $7y + \{3y - [5x - y - (3x - 2y) - y] - 2x\}$

1.5 MULTIPLICACION

El producto de dos números a y b se expresa como $a \times b$, $a \cdot b$, o ab.* Cada uno de los números que aparecen en el producto, o el producto de dos o más de ellos, es un *factor* del producto. Ya que cualquier número n es igual a $n \times 1$ resulta que n es un factor de sí mismo. Cualquier número que no tenga otro factor que él mismo y uno, se llama *número primo*. Puesto que $6ab = 3 \times 2 \times a \times b \times 1$, se sigue que 3, 2, a, b, 6, $3a$, $2a$, $2b$, $6a$, $6b$, $6ab$ y 1 son factores de $6ab$. Sin embargo, 3, 2, a y b son factores primos.

factor

número primo

En la multiplicación se consideran dos axiomas que son similares a los de la adición. Esto es, consideraremos que el producto de dos números es independiente del orden de los factores y que el producto de tres o más números es independiente del orden en que se multiplican. Las proposiciones formales de los dos axiomas son: *La multiplicación es conmutativa, esto es* $a \times b = b \times a$. *La multiplicación es asociativa,* esto es, $a(bc) = (ab)c$. En el último axioma, el paréntesis indica que primero deben multiplicarse los factores que contiene.

propiedad conmutativa de la multiplicación

propiedad asociativa de la multiplicación

Se considerará igualmente que el producto obtenido al multiplicar un número dado por la suma de dos o más números es igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar el primer número por cada uno de los otros. Esto se conoce como axioma de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, y se enuncia como sigue: *La multiplicación es distributiva con respecto a la adición, esto es,* $a(b + c) = ab + ac$.

propiedad distributiva de la multiplicación

A continuación se indica, sin demostración, la ley de los signos para la multiplicación. *El producto de dos factores del mismo signo es positivo. El producto de dos factores de signos diferentes es negativo.*

ley de los signos de la multiplicación

1.6 EXPONENTES EN LA MULTIPLICACION

El producto $a \times a$ se escribe a^2 y se llama *a cuadrada*; el producto de $a \times a \times a$ se escribe a^3 y se llama *a cúbica*; el producto de a n veces se escribe a^n y se llama *enésima potencia de a*. Esta costumbre conduce a la siguiente definición: Si n es un entero positivo, el símbolo a^n se denomina la *enésima potencia de a* y es el producto de n factores, cada uno de los cuales es a. La letra a se llama la *base* y n el *exponente*.

potencia enésima, base, exponente

Como consecuencia de la anterior definición se tienen las siguientes leyes aplicables a los productos que comprenden potencias de los números.

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{1.4}$$

demostración

$$\begin{aligned} a^m a^n &= (a \cdot a \cdot a \cdots a \ m \text{ factores})(a \cdot a \cdot a \cdots a \ n \text{ factores}) \\ &= a \cdot a \cdot a \cdots a \ (m+n) \text{ factores} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

*Cualquiera que sea la forma que se utilice para representar el producto, el número a se denomina *multiplicando*, el número b *multiplicador* y ab el *producto*.

La forma simbólica de la segunda ley es,

$$a^n b^n = (ab)^n \tag{1.5}$$

demostración

$$\begin{aligned} a^n b^n &= (a \cdot a \cdot a \cdots \text{a } n \text{ factores})(b \cdot b \cdot b \cdots \text{a } n \text{ factores}) \\ &= ab \cdot ab \cdot ab \cdots \text{a } n \text{ factores} \\ &= (ab)^n \end{aligned}$$

Debe observarse que en (1.4) las bases son las mismas y que *conservando la base se adicionan los exponentes*. En (1.5) los exponentes son los mismos y *conservando los exponentes* se multiplican las bases.

La forma simbólica de la tercera ley es,

$$(a^n)^p = a^{pn} \tag{1.6}$$

demostración

$$\begin{aligned} (a^n)^p &= a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdots \text{a } p \text{ factores} \\ &= a^{n+n+n+\cdots \text{ a } p \text{ terminos}} \qquad \textit{por ec. (1.4)} \\ &= a^{pn} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1. Simplificar a^4a^3

Solución:

$a^4a^3 = a^7$

EJEMPLO 2 Simplificar $(3a^2b^3)(2a^3b^5)$

Solución:

$$\begin{aligned} (3a^2b^3)(2a^3b^5) &= 3 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^5 \\ &= 6(a^2a^3)(b^3b^5) \\ &= 6a^5b^8 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Simplificar 3^25^2

Solución:

$3^25^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 = 225$

EJEMPLO 4 Simplificar $8a^3b^3$

Solución:

$$\begin{aligned} 8a^3b^3 &= 2^3a^3b^3 \\ &= (2ab)^3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Simplificar $(4a^2b^3)^4$

Solución:

$$\begin{aligned} (4a^2b^3)^4 &= 4^4(a^2)^4(b^3)^4 \\ &= 4^4a^8b^{12} \\ &= 256a^8b^{12} \end{aligned}$$

1.7 PRODUCTOS QUE INCLUYEN MULTINOMIOS

Según la propiedad distributiva de la multiplicación el producto de un

monomio por un multinomio es la suma de los productos del monomio por cada término del multinomio. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3m(2m^2 - 4mn + 5n^2) &= (3m)(2m^2) - (3m)(4mn) + (3m)(5n^2) \\ &= 6m^3 - 12m^2n + 15mn^2 \end{aligned}$$

También, basándose en las propiedades distributivas de la multiplicación, se puede demostrar que el producto de dos multinomios es igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada término de un multinomio por cada término del otro.

Los axiomas del Párrafo 1.5 que conciernen a las propiedades conmutativas y asociativas de la multiplicación permiten realizar la multiplicación por el método usual que a continuación se expone. Nótese que la operación se hace de izquierda a derecha, pero se obtendría el mismo resultado si se hiciera de derecha a izquierda.

EJEMPLO Multiplicar $3x^2 - 2xy + 4y^2$ por $x^3 - 2x^2y + xy^2 - 3y^3$.

Solución:

$$\begin{array}{rrrrrr} x^3 - 2x^2y & + \;\; xy^2 & - \;\; 3y^3 & & & \\ 3x^2 & - \;\; 2xy & + \;\; 4y^2 & & & \\ \hline 3x^5 - 6x^4y & + \;\; 3x^3y^2 & - \;\; 9x^2y^3 & & & \\ - 2x^4y & + \;\; 4x^3y^2 & - \;\; 2x^2y^3 & + \;\; 6xy^4 & & \\ & + \;\; 4x^3y^2 & - \;\; 8x^2y^3 & + \;\; 4xy^4 & - \;\; 12y^5 & \\ \hline 3x^5 - 8x^4y & + \; 11x^3y^2 & - \; 19x^2y^3 & + \; 10xy^4 & - \;\; 12y^5 & \end{array}$$

EJERCICIO 2: MULTIPLICACION

Efectúense las operaciones indicadas en los problemas 1 a 24.

1: $a^2 \times a^3$	2: $a^4 \times a^5$	3: $b^2 \times b^2$
4: $b^5 \times b^2$	5: $(3a^2)(2a^3)$	6: $(2x^3)(4x^5)$
7: $(3y^3)(2y^2)$	8: $(5b^4)(4b^5)$	9: $(2a^3b^2)(3a^4b^3)$
10: $(4a^3b^5)(2a^2b^4)$	11: $(3x^7y^4)(5x^2y^3)$	12: $(5x^2y^3)(7xy^4)$
13: $(2a^2b^3)(3a^2c)(b^2c^3)$	14: $(5a^2)(3bc^3)(2ac^2)$	15: $(2x^2y^3)(3xz^2)(5y)$
16: $(3x^2y)(2xz^2)(4y^2z)$	17: $(x^2)^3$	18: $(y^3)^2$
19: $(a^4)^5$	20: $(a^2)^4$	21: $(2a^2b^3)^3$
22: $(3a^3b^4)^2$	23: $(5x^3y)^4$	24: $(4x^4y^3)^4$

Elimínense los símbolos de agrupación en las expresiones de los problemas 25 a 32 y combínense los términos semejantes.

25: $a(2a - b) - 2b(a - b) + ab(a + 3)$
26: $2x(x + 2y) - 3y(2x - y) + xy(2 - y)$
27: $xy(x - 3y) - x(y^2 - 3x) - y(x^2 - y)$
28: $a(a^2 - b^2) + b(ab - b) - a^2(a - 2b)$
29: $2x^2 - 3x[2x - y(x - 2y) - y^2]$
30: $8a^3 - 2a[b - 2a(b - 2a) - b]$
31: $2a[3a - b(3a - b) - 3a - b^2]$
32: $3x[4a - 2x(a - x) - 3a(x + 2a) + 6a^2 + 5ax]$

Encuéntrese el producto de cada pareja de expresiones de los problemas 33 a 44.

33: $a + 2b,\ 2a - b$	34: $2x + 3y,\ 3y - x$
35: $4x - a,\ 2x + 3a$	36: $2a + 5b,\ 3a - 4b$
37: $a + 2b,\ a^2 - 3ab - b^2$	38: $2a - b,\ a^2 - 2ab - b^2$

39: $3x - 2y$, $2x^2 - 5xy - y^2$ 40: $2x - 5y$, $2x^2 - xy + y^2$
41: $x^2 - xy - y^2$, $x^2 + xy + y^2$ 42: $x^2 - 2xy - y^2$, $x^2 + 3xy + 2y^2$
43: $a^3 - a + 1$, $a^2 + a - 2$ 44: $x^3 + x^2 - x + 1$, $x^2 + x - 1$

1.8 LOS EXPONENTES EN LA DIVISION

dividendo
divisor
cociente

Si a y b son dos números y si $b \neq 0$,* se acostumbra indicar la división de a entre b, sea por el uso del signo de división $a \div b$, sea escribiendo los dos números a modo de fracción, $\frac{a}{b}$. El número a se llama *dividendo*, el número b se llama *divisor* y el resultado de la operación se llama *cociente*.

ley de los signos de la división

La ley de los signos para la división es similar a la anteriormente establecida para la multiplicación. *El cociente de dos números del mismo signo es positivo. El cociente de dos números de signos diferentes es negativo.*

Puesto que $5 - 3 + 3 = 5$, se observa que

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a^{5-3+3}}{a^3} = (a^{5-3})\left(\frac{a^3}{a^3}\right) = (a^{5-3})(1) = a^{5-3} = a^2$$

siempre y cuando $a \neq 0$. Empleando este método para el caso más general y si $m > n$ y $a \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{a^m}{a^n} &= \frac{a^{m-n+n}}{a^n} \\ &= (a^{m-n})\left(\frac{a^n}{a^n}\right) \qquad \textit{por ec (1.4)} \\ &= (a^{m-n})\ (1) \\ &= a^{m-n}\end{aligned}$$

Se llega así a la ley de los exponentes para la división:

ley de los exponentes de la división

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a \neq 0,\ m \text{ y } n \text{ enteros, y } m > n. \tag{1.7}$$

Otra ley de los exponentes que implica la división es la que sigue. Esta ley depende del método empleado para multiplicar fracciones, que será expuesto en el capítulo 3.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad n \text{ entero y positivo; } b \neq 0 \tag{1.8}$$

EJEMPLO 1 Simplificar $12a^7b^5 \div 3a^2b^4$

Solución:

$$\frac{12a^7b^6}{3a^2b^4} = 4a^{7-2}b^{6-4} = 4a^5b^2$$

* El símbolo $\neq$ significa *diferente de*. La razón para la restricción indicada para b se dará en el Pr. 1.10.

EJEMPLO 2 Desarrollar $\left(\dfrac{3x^2y^3}{2z}\right)^4$

Solución:

$$\left(\frac{3x^2y^3}{2z}\right)^4 = \frac{3^4(x^2)^4(y^3)^4}{2^4z^4} = \frac{81x^8y^{12}}{16z^4}$$

1.9 DIVISIONES QUE INCLUYEN MULTINOMIOS

El cociente que se obtiene al dividir un multinomio entre un monomio es la suma de los cocientes que resultan de dividir cada término del multinomio por el monomio. Por ejemplo,

$$\frac{20c^{12} - 16c^8 - 8c^5}{4c^4} = \frac{20c^{12}}{4c^4} - \frac{16c^8}{4c^4} - \frac{8c^5}{4c^4}$$
$$= 5c^8 - 4c^4 - 2c$$

Para dividir un multinomio por otro multinomio se efectúan los siguientes pasos:

pasos en la división de multinomios

1. Tanto el dividendo como el divisor se disponen en orden ascendente o descendente de las potencias de alguna letra que aparezca en ambos.
2. Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor y se obtiene así el primer término del cociente.
3. Se multiplica el divisor por el primer término del cociente y el producto obtenido se sustrae del dividendo.
4. El residuo obtenido en el paso anterior se trata como un nuevo divisor y se repiten con él los pasos 2 y 3.
5. Se continúa este proceso hasta obtener un residuo en el cual el mayor exponente de la letra que en el paso 1 se escogió como base de la ordenación sea menor que el mayor exponente de dicha letra en el divisor.

EJEMPLO El procedimiento anterior se aplica a la división de

$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 32x - 7$ by $3x^2 + 5x - 2$.

Solución:

$$\begin{array}{llrrrrrl}
 & & 2x^2 & -\ x & +\ 5 & & & \\
\textit{divisor} & 3x^2+5x-2\,\big| & 6x^4 & +\ 7x^3 & +\ 6x^2 & +\ 32x & -\ 7 & \textit{dividendo} \\
 & & 6x^4 & +\ 10x^3 & -\ 4x^2 & & & \\
\hline
 & & & -3x^3 & +\ 10x^2 & +\ 32x & -\ 7 & \\
 & & & -3x^3 & -\ 5x^2 & +\ 2x & & \\
\hline
 & & & & 15x^2 & +\ 30x & -\ 7 & \\
 & & & & 15x^2 & +\ 25x & -\ 10 & \\
\hline
 & & & & & 5x & +\ 3 & \textit{residuo}
\end{array}$$

1.10 OPERACIONES EN QUE APARECE EL CERO

Si el cero es considerado como la ausencia total de cantidad, entonces es evidente que:

$$n + 0 = n \tag{1.9}$$
$$n \times 0 = 0 \tag{1.10}$$

y

$$\frac{0}{n} = 0 \tag{1.11}$$

Si el cociente que se obtiene al dividir a entre b se define como el valor de a tal que $a = bx$, entonces, para $b = 0$ y $a \neq 0$, se obtiene $a = 0x$, y, por tanto, no existe valor de x que satisfaga esa expresión (ecuación 1.10). Si $b = 0$ y $a = 0$, entonces $0 = 0x$, expresión que se se satisface con cualquier valor de x, esto es, $0/0$, no existe como número único. En consecuencia, la división entre cero quedará excluída.

El símbolo a^n se ha definido cuando n es un entero positivo, pero esta definición carece de significado cuando $n = 0$. Sin embargo, si se exige que ecuación (1.7) sea válida para $m = n$, se tiene

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \qquad a \neq 0 \tag{1.12}$$

En consecuencia, ya que a^n/a^n es igual a 1, el valor de a^0 se define como igual a 1 y se tiene

$$a^0 = 1 \qquad a \neq 0 \tag{1.13}$$

Esta definición de a^0 es concordante también con ecuación (1.4), ya que $a^n \times a^0 = a^{n+0} = a^n$. Y este es el resultado que podría esperarse si $a^0 = 1$.

EJERCICIO 3: DIVISION

Efectúense las divisiones indicadas en los problemas 1 a 16.

1: $\frac{x^7}{x^2}$	2: $\frac{y^5}{y^3}$	3: $\frac{w^8}{w^5}$	4: $\frac{t^9}{t^6}$
5: $\frac{8x^8}{2x^2}$	6: $\frac{9x^9}{3x^3}$	7: $\frac{10x^{10}}{5x^5}$	8: $\frac{6x^6}{3x^3}$
9: $\frac{a^2c^3}{ac^2}$	10: $\frac{a^5b^9}{a^3b^5}$	11: $\frac{x^6y^7}{xy^6}$	12: $\frac{t^5w^3}{t^4w^2}$
13: $\frac{15x^2y^5z^7}{5xy^3z^4}$	14: $\frac{18a^9b^8c^3}{6a^6b^5c}$	15: $\frac{24a^5b^7c^9}{6ab^6c^5}$	16: $\frac{24a^3b^7c^4}{18a^2b^3c^2}$

En los problemas 17 a 20 elévese cada fracción a la potencia indicada.

17: $\left(\frac{x^3}{y^4}\right)^2$	18: $\left(\frac{3x^3}{y^2}\right)^3$	19: $\left(\frac{2x^2}{3y^3}\right)^4$	20: $\left(\frac{5x}{4y^2}\right)^3$

Divídase la primera expresión entre la segunda en los problemas 21 a 36.

21: $2x^2 - 7x + 6,\ x - 2$
22: $2a^2 - a - 15,\ 2a + 5$
23: $2a^2 - 3ab - 2b^2,\ 2a + b$
24: $2a^2 + 5ay - 3y^2,\ a + 3y$
25: $2y^3 - 7y^2 + 9y - 3,\ y^2 - 3y + 3$

26: $3y^3 - y^2 + 7y + 6,\ y^2 - y + 3$
27: $2y^3 - 9y^2 + 11y - 6,\ y - 3$
28: $5y^3 - 14y^2 + 9y - 2,\ y - 2$
29: $y^4 + 3y^3 - 3y + 1,\ y^2 + y - 1$
30: $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 11x + 3,\ x^2 - 2x + 3$
31: $t^4 - t^2 + 7t + 2,\ t^3 - 2t^2 + 3t + 1$
32: $2w^4 - 9w^3 + 7w^2 + 7w - 3,\ w - 3$
33: $2x^3 - 6x^2 - 3x^2y + 9xy - xy^2 + 3y^2,\ x - 3$
34: $2x^3 + x^2 - 4x^2y - 2xy + 10xy^2 + 5y^2,\ x^2 - 2xy + 5y^2$
35: $x^4 - 4x^3 + x^2 + 7x - 2,\ x^3 - 2x^2 - 3x + 1$
36: $6x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 2x + 2,\ 3x + 1$

Encuéntrese el cociente y el residuo resultantes al dividir la primera expresión entre la segunda en los problemas 37 a 40.

37: $2x^3 - x^2 - 8x - 2,\ 2x + 3$
38: $3x^3 - 5x^2 - 3x - 1,\ x^2 - x - 1$
39: $4x^3 - 9x^2 + 14x - 5,\ 4x - 1$
40: $3x^3 - 5x^2 - 7x - 3,\ x^2 - 3x + 1$

EJERCICIO 4: OPERACIONES FUNDAMENTALES

Efectúense las operaciones indicadas en los problemas 1-20.

1: $6 - 10 + 2$
2: $8 - 7 - 6 + 2$
3: $14 - 6 + 9 - 11$
4: $-5 + 15 - 6 - 8$
5: $3 + (-2) - (-5)$
6: $9 - (-8) - 11$
7: $-11 - (-17) + (-5)$
8: $-(-6) + (-3) - (+7)$
9: $-4 + 7 - 8$
10: $-7 - 8 + (-4)$
11: $7 - 2 - 5 + (-2)$
12: $13 - 7 - 7 - 13 - (-4)$
13: $2x + 3x - 4x$
14: $5a - 7a - 2a$
15: $2b - 5b - 7b$
16: $9y - 6y + 2y$
17: $a - 3b - 5a + 6b$
18: $5x - 2y - 3x - y$
19: $-4x - 7y + 2x + 5y$
20: $7x - y + x - 5y - 4x + 2y$

Encuéntrese el valor de las expresiones en los problemas 21 a 32, si $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$.

21: $2a - b - c$
22: $3a + b + c$
23: $4a + 2b - 3c$
24: $-a + b + 2c$
25: $2(a - b) - 3(b + c)$
26: $2(3a + b) - 5(a - b + c)$
27: $3(2a - b) - 4(a - 2c)$
28: $5(a - b) - 4(b + 4c)$
29: $|a - b| + |2b - c| - |c|$
30: $|2a - c| - |3a - b| + |b - c|$
31: $|a + b - c| + |2a - b - c| - |a|$
32: $|a - b - 2c| - |2a + b - c| - |b|$

33. Encuéntrese la suma de todos los números primos menores que 12.

34. Encuéntrese el producto de todos los números primos menores que 8.

35. Agréguese la suma de todos los números primos menores que 9 a la suma de todos los números primos comprendidos entre 12 y 18.

36. Réstese la suma de todos los números primos comprendidos entre 16 y 24 de la suma de todos los números primos comprendidos entre 28 y 32.

Encuéntrese la suma de las expresiones en los problemas 37 a 40.

37: $2a - b - 3c,\ a + 5b - 2c,\ 3a - 2b + 4c$
38: $x + y - 5z,\ 2x - 3y - z,\ -3x - y + 4z$
39: $3a - 2b - 4c,\ 2a + 3b + c,\ 4a - b + 5c$
40: $5t + 2u - s,\ 3u - t + 2s,\ 6s - 2t - 4u$

Réstese la segunda expresión de la primera en los problemas 41 a 44.

41: $3a - b + 2c,\ a - 3b - 4c$
42: $2x + y - 5z,\ 3x + 5y - 2z$
43: $5a - 4b - 2d,\ 2a - 4b - 2c$
44: $2a - 3b - 4c,\ 3a + 2b - 5c$

Efectúense las operaciones indicadas en los problemas 45 a 52.

45: $2a(ab) + b(3ab) - a^2(3b) - 2ab(b)$
46: $3x^2(xy^2) - 2xy(x^2y) + 5xy^2(x^2) - 2x^2y(xy)$
47: $3ab^2(ab) + 5a^2b(b^2) - 4ab(ab^2) - 2ab(3ab)$
48: $4ab(3a^2c) - 5a^2b(ac) - 7a^2c(ab) + 2abc(3ac)$
49: $\dfrac{5a^4b^3}{a^2b} - \dfrac{12a^5b^4}{6a^3b^2} + \dfrac{15a^3b^5}{5ab^3}$
50: $\dfrac{30x^7y^3}{6x^5y^2} - \dfrac{18x^6y^4}{3x^4y^3} + \dfrac{28x^5y^7z^0}{7x^3y^6}$
51: $\dfrac{36x^5y^6}{12x^2y^4} + \dfrac{20x^4y^3}{5xy} - \dfrac{33x^3y^5}{3x^0y^3}$
52: $\dfrac{18a^4y^3}{9a^3y} - \dfrac{27a^2y^4}{3ay^2} - \dfrac{16a^6y^5}{8a^5y^3}$

Elimínense los símbolos de agrupación y combínense los términos semejantes en los problemas 53 a 76.

53: $2(a + 2b - 3c) - 3(2a - 3b + 2c)$
54: $5(2a - 4b - c) - 4(3a + 2b - 2c)$
55: $7(-3a + 2b - 5c) - 5(-4a + 3b - 6c)$
56: $3(5a - 7b + 3c) - 4(4a - 5b + 2c)$
57: $4a - 5[a - 2(2b - 3c) - 2b]$
58: $2r - 2\{4r - 2[s - t + 4(r - s + 2t) - 3r] + 2s\}$
59: $33x^2 - 3\{x - 2x[x - 7(x - 2) - 3] + 2\} - 60x$
60: $4x^2 - \{[2x^2 - 2x(x - 3y + 1) - 3x^2 + 3y] - [3y(2x - 2y + 1) + 6y^2] + 2x\}$

61: $(x - y)(x - 3y)$
62: $(x + 2y)(x + 3y)$
63: $(2x - y)(x + 3y)$
64: $(3x - y)(x + 2y)$
65: $(a + 2x - 3y)(a - 2x + 3y)$
66: $(2a - x + y)(a - 3x - y)$
67: $(3a - b + c)(a - 2b + c)$
68: $(a + 2b + 3c)(a - 2b - 3c)$
69: $(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$
70: $(2x^2y^3 + x^4 + y^6)(2x^2y^3 - x^4 - y^6)$
71: $(a^3 + ab^2 + a^4 + b^2)(a^3 + ab^2 - a^4 - b^2)$
72: $(x^2 + xy + y^2 - 2)(x^2 - xy + y^2 + 2)$
73: $(a + b)(a - 2b) - a + b(a + 2b) - a(a - 3)$
74: $(2a + b)a - b + 2a - b(a - b) - 2a(a + 1)$
75: $3x - y(2x + y) - (3x - y)2x + y + (3x - 1)(2x + y)$
76: $(3x - y)2x - y^2 - 3x + y(2x + y) + 3x - 1(2x + y)$

Divídase la primera expresión entre la segunda en los problemas 77 a 88.

77: $2a + b,\ 6a^2 + ab - b^2$
78: $a - 2b,\ 3a^2 - 5ab - 2b^2$
79: $2x + y,\ 6x^2 + xy - y^2$
80: $2x - 3y,\ 10x^2 - 19xy + 6y^2$
81: $a + b,\ a^3 + b^3$
82: $a - 3b,\ a^3 - 4a^2b + 4ab^2 - 3b^3$

83: $2x - y,\ 2x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3$
84: $2x + 3y,\ 2x^3 + 7x^2y + 4xy^2 - 3y^3$
85: $a + b - c,\ a^2 + 2ab + b^2 - c^2$
86: $2a - 3b + c,\ 4a^2 - 9b^2 + 6bc - c^2$
87: $3a - x + 2y,\ 9a^2 - x^2 + 4xy - 4y^2$
88: $5x + a - 3t,\ 25x^2 - a^2 + 6at - 9t^2$

Efectúense las operaciones indicadas y combínense los términos semejantes en los problemas 89 a 92.

89: $xy(-x^2y + xy^2) + [(x^5y^4 - x^4y^5) \div x^2y^2]$
90: $x^3y^2(xy^2 - 2x^2y) - [(x^5y^6 - 3x^6y^5) \div xy^2]$
91: $2ab^2(3a^3b - 5a^2b^2) - [(6a^6b^6 - 11a^5b^7) \div a^2b^3]$
92: $3ab^2c(2a^2bc^3 - 5ab^3c^2) - [(7a^5b^4c^7 - 17a^4b^6c^6) \div a^2bc^3]$

2 PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION

EN ESTE CAPÍTULO SE EXPONDRÁN algunos métodos que permiten efectuar mentalmente muchos de los pasos explicados en el Pr. 1.7. De este modo se puede, para muchos tipos de productos, abreviar el proceso de multiplicación. De igual modo se expondrán algunos métodos para factorizar ciertos tipos de multinomios. Para la computación eficaz y rápida en álgebra se requiere ser hábil en cada uno de esos procedimientos.

2.1 EL PRODUCTO DE DOS BINOMIOS

Empleando el método del Pr. 1.7 para obtener el producto de los binomios $ax + by$ y $cx + dy$, se tiene

$$\begin{aligned}(ax + by)(cx + dy) &= acx^2 + cx(by) + dy(ax) + bdy^2\\ &= acx^2 + bcxy + adxy + bdy^2\\ (ax + by)(cx + dy) &= acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Observando el resultado de la derecha puede notarse que

1. El primer término del resultado es el producto de los dos primeros términos de los binomios.

2. El término intermedio es la suma algebraica de los productos obtenidos al multiplicar el primer término de cada binomio por el segundo término del otro.

pasos en la multiplicación de dos binomios

3. El tercer término es el producto de los dos segundos términos de los binomios.

EJEMPLO 1 Si se emplea el método anterior para obtener el producto de $2x - 3$ y $7x + 5$, se observa que: (a), el producto de los dos primeros términos, es $14x^2$; (b), la suma algebraica del primer término de cada binomio por el segundo término del otro es $10x - 21x = -11x$; (c), el producto de los dos segundos términos, es -15. Por consiguiente,

$$(2x - 3)(7x + 5) = 14x^2 - 11x - 15$$

Este procedimiento puede expresarse por medio del siguiente diagrama, fácil de recordar, en el cual las flechas conectan los términos que deben multiplicarse.

$$14x^2 \qquad -15$$

$$(2x - 3)(7x + 5) = 14x^2 - 11x - 15$$

$$-21x$$

$$10x$$

Se puede obtener el cuadrado del binomio $x + y$ escribiendo primero $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ y luego aplicar el anterior procedimiento al producto de la derecha. Se obtiene así

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{2.2}$$

regla para elevar al cuadrado binomio

Si se expresa la fórmula (2.2) por medio de palabras se tiene: *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Debe notarse que si el signo entre los términos es negativo, como en $(x - y)^2$, entonces el producto de los dos términos es negativo y se tiene

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \tag{2.3}$$

EJEMPLO 2 Encontrar el cuadrado de $2x + 3y$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2x + 3y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2\\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Encontrar el cuadrado de $3x - 4$

Solución:

$$\begin{aligned}(3x - 4)^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(-4) + (-4)^2\\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

regla para multiplicar la suma de dos números por su diferencia

Igualmente puede emplearse (2.1) con el fin de obtener una fórmula para el producto de la suma por la diferencia de dos números. Expresando este producto en la forma $(x + y)(x - y)$ y aplicando (2.1) se tiene

$$\begin{aligned}(x + y)(x - y) &= x^2 - xy + xy - y^2\\ &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

por consiguiente,

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \qquad (2.4)$$

De esta manera se observa que el *producto de la suma por la diferencia de dos números es igual a la diferencia de sus cuadrados.*

EJEMPLO 4 Encontrar el producto $x^3 + 4y$ and $x^3 - 4y$.

Solución:

$(x^3 + 4y)(x^3 - 4y) = (x^3)^2 - (4y)^2 = x^6 - 16y^2$

EJEMPLO 5 Encontrar el producto de 23×17

Solución:

$(23)(17) = (20 + 3)(20 - 3) = 400 - 9 = 391$

2.2 EL CUADRADO DE UN MULTINOMIO

regla para elevar al cuadrado un multinomio

Empleando el método del Pr. 1.7 se puede comprobar la siguiente proposición. *El cuadrado de un multinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término, más la suma algebraica del doble producto de cada término por cada uno de los que le suceden.*

EJEMPLO Encontrar el cuadrado de $2x + 3y - 4z - 2w$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2x + 3y - 4z - 2w)^2 &= (2x)^2 + (3y)^2 + (-4z)^2 + (-2w)^2 + 2(2x)(3y)\\ &\quad + 2(2x)(-4z) + 2(2x)(-2w) + 2(3y)(-4z)\\ &\quad + 2(3y)(-2w) + 2(-4z)(-2w)\\ &= 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 4w^2 + 12xy - 16xz - 8xw\\ &\quad - 24yz - 12yw + 16zw\end{aligned}$$

EJERCICIO 5: BINOMIOS Y MULTINOMIOS

Encontrar los productos indicados en los problemas 1 a 92 usando los métodos expuestos en las Secciones 2.1 y 2.2.

1: $(x + 2)(x + 3)$
2: $(b + 1)(b + 1)$
3: $(3y + 1)(y + 2)$
4: $(2x + 1)(x + 2)$
5: $(3x - 1)(x + 2)$
6: $(x - 3)(2x - 1)$
7: $(4b + 1)(b + 2)$
8: $(3c - 2)(2c + 3)$
9: $(7x - 1)(x + 2)$
10: $(3a - 2)(2a + 3)$
11: $(8m - 5)(2m + 4)$
12: $(5h + 3)(4h - 5)$
13: $(4a - 7)(5a + 2)$
14: $(2r + 2s)(3r + 3s)$
15: $(7i - 5)(3i + 2)$
16: $(8a + 3c)(a + 5c)$
17: $(2m - 3n)(4m - 2n)$
18: $(12x - 3y)(6x - 5y)$
19: $(6c - 3d)(2c - 7d)$
20: $(3r - 5y)(2r - 7y)$
21: $(2w + 7z)(3w - 2z)$
22: $(5i - 3j)(7i + 2j)$
23: $(10x - 5y)(5x + 2y)$
24: $(7a + 6b)(9a - 8b)$
25: $(x + 2y)^2$
26: $(2x - 3)^2$
27: $(a + 3b)^2$
28: $(3x + 2)^2$
29: $(3a - 1)^2$
30: $(3m - 2n)^2$
31: $(3m - 4n)^2$
32: $(6a - 4b)^2$
33: $(2a - 3b)^2$
34: $(2x + 5y)^2$
35: $(4r - 3s)^2$
36: $(5h + 3k)^2$
37: $(4u - 2v)^2$
38: $(2i + 7j)^2$
39: $(6z - 5w)^2$
40: $(3a + 2b)^2$
41: $(7 + 2)(7 - 2)$
42: $(18)(22)$

43: $(24)(36)$ 44: $(25)(35)$ 45: $(x + 3)(x - 3)$
46: $(x + 9)(x - 9)$ 47: $(m + n)(m - n)$
48: $(a + b)(a - b)$ 49: $(x + 3y)(x - 3y)$
50: $(a + 5b)(a - 5b)$ 51: $(5x + y)(5x - y)$
52: $(3c + d)(3c - d)$ 53: $(3a + 2b)(3a - 2b)$
54: $(2x + 3z)(2x - 3z)$ 55: $(7y + 4c)(7y - 4c)$
56: $(4x + 5w)(4x - 5w)$ 57: $(2a^3 + 2b)(2a^3 - 2b)$
58: $(2x^2 + y)(2x^2 - y)$ 59: $(3b^2 + 6c^3)(3b^2 - 6c^3)$
60: $(5b^4 + 3x^2)(5b^4 - 3x^2)$

61: $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{5}\right)$ 62: $\left(\frac{3x}{4} + \frac{y}{5}\right)\left(\frac{3x}{4} - \frac{y}{5}\right)$

63: $\left(\frac{m^2}{3} + \frac{2n^3}{5}\right)\left(\frac{m^2}{3} - \frac{2n^3}{5}\right)$ 64: $\left(\frac{3m^2}{4} + \frac{2n^4}{3}\right)\left(\frac{3m^2}{4} - \frac{2n^4}{3}\right)$

65: $\left(\frac{y}{5} + \frac{3}{x}\right)\left(\frac{y}{5} - \frac{3}{x}\right)$ 66: $\left(\frac{m^2}{3} + \frac{2}{5m}\right)\left(\frac{m^2}{3} - \frac{2}{5m}\right)$

67: $\left(\frac{5a}{x} + \frac{y}{2b}\right)\left(\frac{5a}{x} - \frac{y}{2b}\right)$ 68: $\left(\frac{3a^2}{b} + \frac{5x}{4y}\right)\left(\frac{3a^2}{b} - \frac{5x}{4y}\right)$

69: $(x + y + z)^2$ 70: $(a + b - c)^2$ 71: $(r + s - t)^2$
72: $(m - n + t)^2$ 73: $(a - b + 3c)^2$ 74: $(x - 3y - z)^2$
75: $(x^2 - 2x + 5)^2$ 76: $(2a^2 - 3a + 1)^2$
77: $(x - 2y + z - 3r)^2$ 78: $(2x + 3y - 4z - 2w)^2$
79: $(m^3 + m^2 - 2m + 1)^2$
80: $(2x^3 - x^2 + 4x - 3)^2$
81: $[2(a + b) - 3][3(a + b) + 2]$
82: $[5(2a - b) + 3][3(2a - b) - 7]$
83: $[3(4a - c) + 5][4(4a - c) - 5]$
84: $[3(2y + 3b) + 7][7(2y + 3b) - 7]$
85: $[(x^2 - 2) + x][(x^2 - 2) - x]$
86: $[(a^2 + 3) - a][(a^2 + 3) + a]$
87: $[(3b^2 + c^2) - 3bc][(3b^2 + c^2) + 3bc]$
88: $[(3u^2 + 9v^2) - 9uv][(3u^2 + 9v^2) + 9uv]$
89: $[(m^3 + m) + (m^2 + 1)][(m^3 + m) - (m^2 + 1)]$
90: $[(a^3 - a) + (a^2 - 3)][a^3 - a) - (a^2 - 3)]$
91: $[(3b^4 - b) + (b^3 - 2b^2)][(3b^4 - b) - (b^3 - 2b^2)]$
92: $[(2m^5 + m^3) - (m^4 + 1)][(2m^5 + m^3) + (m^4 + 1)]$

2.3 EL PROCESO DE FACTORIZACION

Para factorizar un multinomio es necesario encontrar primero dos o más multinomios o un monomio y uno o más multinomios, cuyo producto sea el multinomio dado. En este párrafo se expondrán los tipos más usuales de multinomios.

1. Multinomios que tienen un factor común.
2. La diferencia de dos cuadrados.
3. Trinomios que son cuadrados perfectos.
4. Trinomios factorizables que no son cuadrados perfectos.

Los últimos tres tipos pueden factorizarse empleando las fórmulas (2.1) a (2.4).

Multinomios que tienen un factor común. Si cada término de un multinomio es divisible por un mismo monomio, el multinomio se puede

factorizar dividiéndolo por el monomio de acuerdo con el método del P. (1.9). El polinomio se expresa entonces como el producto del divisor por el cociente obtenido. Al aplicar este procedimiento a $ax + ay - az$ se obtiene

$$ax + ay - az = a\left(\frac{ax + ay - az}{a}\right) \quad \textit{equivale a multiplicar por 1.}$$

$$= a\left(\frac{ax}{a} + \frac{ay}{a} - \frac{az}{a}\right) \quad \textit{por el método del Pr 1.9.}$$

$$ax + ay - az = a(x + y - z) \quad \textit{realizando las divisiones indicadas} \tag{2.5}$$

EJEMPLO 1 Factorizar la expresión, $3x^3 - 15x^2 + 9x$.

Solución: Nótese que todos los términos son divisibles por $3x$. Por ello, utilizando la ecuación (2.5), tendremos:

$$3x^3 - 15x^2 + 9x = 3x(x^2 - 5x + 3)$$

EJEMPLO 2 Factorícese la expresión $(a + b)(a - b) + 3a(a + b) + (a + b)^2$

Solución: Adviertase que cada término de la expresión es divisible por $a + b$. En consecuencia, según la ecuación (2.5), tendremos:

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) + 3a(a + b) + (a + b)^2 &= (a + b)[(a - b) + 3a + (a + b)] \\ &= (a + b)(a - b + 3a + a + b) \\ &= (a + b)5a \end{aligned}$$

Frecuentemente un multinomio puede ser factorizado por uno de los métodos siguientes:

Diferencia de dos cuadrados. Intercambiando los miembros de (2.4), se tiene:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \tag{2.6}$$

De donde se observa que *los factores de la diferencia de los cuadrados de dos números son, respectivamente, la suma y la diferencia de los dos números.*

EJEMPLO 3 Factorícese la expresión $4x^2 - y^2$.

Solución: Anotaremos que la expresión consiste en la diferencia de dos términos que son cuadrados. Utilizando la ecuación (2.6) y la regla que de ella se deduce tendremos:

$$4x^2 - y^2 = (2x)^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$$

EJEMPLO 4 Factorizar la expresión $9x^4 - 16y^2$.

Solución: Debido a que la expresión consiste en la diferencia de dos términos, cada uno de los cuales es cuadrado, se puede aplicar la ecuación (2.6) y la regla que de ella se deduce:

$$9x^4 - 16y^2 = (3x^2)^2 - (4y)^2 = (3x^2 + 4y)(3x^2 - 4y)$$

En los ejemplos que se ponen a continuación se aplica el método anterior a expresiones que son la diferencia de dos cuadrados, pero en las cuales por lo menos uno de los términos no es el cuadrado de un monomio.

EJEMPLO 5 Factorizar la expresión $(4x)^2 - (3y + z)^2$.

Solución: La expresión $(4x)^2 - (3y + z)^2$ es la diferencia de los cuadrados de $4x$ y de $3y + z$. Por tanto, los dos factores son la suma y la diferencia de estos números.

$$\begin{aligned}(4x)^2 - (3y + z)^2 &= [4x + (3y + z)][4x - (3y + z)] \\ &= (4x + 3y + z)(4x - 3y - z)\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Factorizar la expresión $(2a - 3b)^2 - (c + d)^2$

Solución:

$$\begin{aligned}(2a - 3b)^2 - (c + d)^2 &= [(2a - 3b) + (c + d)][(2a - 3b) - (c + d)] \\ &= (2a - 3b + c + d)(2a - 3b - c - d)\end{aligned}$$

Trinomios que son cuadrados perfectos. De las fórmulas (2.2) y (2.3), se tiene

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \tag{2.7}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \tag{2.8}$$

Los trinomios de la izquierda en (2.7) y (2.8) son cuadrados perfectos y en cada caso se observa que dos de los términos son cuadrados perfectos y positivos y que el tercer término es el doble producto de la raíz cuadrada de los otros dos. Además, que si el término del doble producto es positivo, el trinomio es el cuadrado de la suma de las dos raíces cuadradas, y que si el término del doble producto es negativo, el trinomio es el cuadrado de la diferencia de las dos raíces cuadradas.

EJEMPLO 7 Factorizar la expresión $9x^2 - 30x + 25$.

Solución: Nótese primero que $9x^2 = (3x)^2$, $25 = 5^2$, y $-30x = -2(3x)(5)$. Por tanto, según (2.8) tendremos

$$9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$$

EJEMPLO 8 Factorícese la expresión $4a^2 + 12ab + 9b^2$.

Solución: Adviértase que $4a^2 = (2a)^2$, $9b^2 = (3b)^2$ y $12ab = 2(2a)(3b)$. Por consiguiente, según (2.7) tendremos

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2 = (2a + 3b)^2$$

EJEMPLO 9 Factorícese la expresión $(3x + y)^2 - 2(3x + y)(z + w) + (z + w)^2$.

Los términos pueden ser reconocidos como la suma de los cuadrados de $3x + y$ y $z + w$, menos el doble del producto de $3x + y$ y $z + w$; por ello emplearemos la ecuación (2.8):

$$\begin{aligned}(3x + y)^2 - 2(3x + y)(z + w) + (z + w)^2 &= [(3x + y) - (z + w)]^2 \\ &= (3x + y - z - w)^2\end{aligned}$$

Trinomios factorizables que no son cuadrados perfectos. Consideraremos un trinomio del tipo $px^2 + qxy + ry^2$. Si

$$px^2 + qxy + ry^2 = (ax + by)(cx + dy) \tag{2.9}$$

entonces, según ecuación (2.1)

$$p = ac \qquad r = bd \qquad \text{and} \qquad q = ad + bc$$

Esto es, si $px^2 + qxy + ry^2$ se expresa como el producto de dos bino-

mios, los primeros términos de los binomios deben ser factores de px^2, los dos segundos términos deben ser factores de ry^2 y la suma de los productos del primer término de cada binomio por el segundo término de cada binomio por el segundo término del otro debe ser qxy.

productos cruzados

A estos dos últimos productos los denominaremos los *productos cruzados.*

EJEMPLO 10 Factorizar $6x^2 + 11x - 10$.

Solución: Se sabe que los factores de $6x^2$ son los primeros términos de los factores de ese trinomio y que los dos factores de -10 son sus segundos términos. Pero estos factores deben ordenarse de tal modo que la suma algebraica de los productos cruzados sea $11x$. La ordenación deseada es $(3x - 2)(2x + 5)$, ya que la suma del producto cruzado es $15x - 4x = 11x$.

EJERCICIO 6: FACTORIZACION

Factorícense las expresiones siguientes:

1: $xz + xy - x^2$ 2: $4x^2 + 2xy - 6xy^2$
3: $3m^2n - 6mn^2 + 9m^3n^2$ 4: $2a^3b^2 + 8a^2b^3 - 12a^3b^3$
5: $(x + y)2z + (x + y)4z^2$ 6: $(a + b)(a - b) + (a + b)b$
7: $(2m - n)3r + (2m - n)4s - (2m - n)(4t - s)$
8: $(6a - 3b)(a + b) + (6a - 3b)(a + 2b) - (6a - 3b)(2a + b)$
9: $m^2 - x^2$ 10: $a^2 - b^2$ 11: $x^2 - 9y^2$
12: $m^2 - 16n^2$ 13: $36x^2 - 4y^2$ 14: $4m^2 - n^2$
15: $a^2 - 64b^2$ 16: $c^2 - 49d^2$ 17: $9r^2 - 25s^2$
18: $4b^2 - 16d^2$ 19: $9h^2 - 25k^2$ 20: $36a^2 - 49y^2$
21: $16x^4 - 4y^6$ 22: $25m^8 - 36n^2$ 23: $64x^6 - 49y^4$
24: $81h^8 - 16k^6$ 25: $\frac{9}{16}r^4 - \frac{4}{25}s^4$ 26: $\frac{16}{25}m^8 - \frac{64}{36}n^6$
27: $\frac{81}{49}x^{16} - \frac{25}{36}y^8$ 28: $\frac{9}{100}h^8 - \frac{25}{16}k^6$ 29: $x^6 - y^4$
30: $25a^4 - b^8$ 31: $49c^{16} - 25c^4$ 32: $144m^{16} - 625n^{12}$
33: $x^2 + 4x + 4$ 34: $m^2 + 2mn + n^2$ 35: $a^2 + 4a + 4$
36: $z^2 + 10z + 25$ 37: $9h^2 + 6h + 1$ 38: $4k^2 - 4k + 1$
39: $25s^2 - 10s + 1$ 40: $49m^2 - 14m + 1$ 41: $9x^2 + 12xy + 4y^2$
42: $16a^2 + 24ab + 9b^2$ 43: $36m^2 + 96mn + 64n^2$ 44: $64r^2 + 64rs + 16s^2$
45: $\frac{c^2}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{c^2}$ 46: $\frac{m^2}{4} + \frac{3m}{n^2} + \frac{9}{n^4}$ 47: $\frac{x^2}{25} - \frac{xy}{5} + \frac{y^2}{4}$
48: $\frac{9}{25}a^2 + \frac{4}{5}ac + \frac{4}{9}c^2$ 49: $9h^2 - 12hk + 4k^2$
50: $25a^8 - 30a^4b^5 + 9b^{10}$ 51: $36x^6 + 60x^3y^2 + 25y^4$
52: $81c^{16} - 126c^8d^6 + 49d^{12}$ 53: $x^2 + 4x + 3$
54: $5y^2 + 6y + 1$ 55: $9m^2 + 10m + 1$ 56: $5b^2 + 7b + 2$
57: $3c^2 - 11c + 6$ 58: $5x^2 - 28x + 15$ 59: $6x^2 - 11x + 5$
60: $4x^2 - 11x + 7$ 61: $3y^2 + y - 2$ 62: $5x^2 - 3x - 2$
63: $7h^2 + 4h - 3$ 64: $5p^2 + 2p - 3$ 65: $6r^2 + 19r - 7$
66: $6y^2 + 3y - 3$ 67: $9a^2 - 12a - 5$ 68: $9m^2 + 62m - 7$
69: $5x^2 + 20xy + 15y^2$ 70: $3a^2 + 26ab + 16b^2$
71: $12u^2 - 16uv + 5v^2$ 72: $21r^2 - 38rs + 5s^2$
73: $6h^2 + 29hk - 5k^2$ 74: $3c^2 + cd - 4d^2$
75: $5a^2 + 13ab - 6b^2$ 76: $3x^2 + 4xy - 15y^2$
77: $8p^2 - 20pq + 8q^2$ 78: $15y^2 + 19yz + 6z^2$
79: $12b^2 - 31bc + 9c^2$ 80: $9u^2 + 21uv + 12v^2$
81: $18a^2 + 19ab - 12b^2$ 82: $14x^2 + 13xy - 12y^2$
83: $18h^2 + 21hk - 15k^2$ 84: $24c^2 + 26cd - 15d^2$
85: $12a^4 + 13a^3 - 35a^2$ 86: $18x^5 + 6x^4 - 24x^3$

87: $9x^6 - 3x^3y^2 - 6y^4$

88: $15x^4y^6 + 26x^2y^3 - 21$

89: $27a^8b^6 + 3a^4b^3 - 24$

90: $15x^{10}y^8 + 14x^5y^4 - 32$

91: $15a^6 - 11a^3b^5 - 12b^{10}$

92: $25a^{12} - 75a^6b^4 - 16b^8$

93: $(x + y)^2 - z^2$

94: $(m - 3n)^2 - 9z^2$

95: $(2a + b)^2 - 16c^2$

96: $(5h - 3j)^2 - 9i^2$

97: $36x^2 - (y + 3z)^2$

98: $49 - (3a - b)^2$

99: $64a^2 - (3b - 2c)^2$

100: $81p^2 - (3q - 2r)^2$

101: $(m - 3n)^2 - (y - 5z)^2$

102: $(5a - 3b)^2 - (3m - 4n)^2$

103: $(3r - 5s)^2 - (9t + 5u)^2$

104: $(8a + 6b)^2 - (3c + 9d)^2$

2.4 FACTORES DE BINOMIOS DEL TIPO $a^n + b^n$

En este capítulo nos ocuparemos de aquellos factores cuyos coeficientes son números racionales y los exponentes son enteros.

expresión irreductible

Aquellas expersiones cuyos factores no llenan estos requisitos se llaman *irreductibles.*

Corrientemente la suma de dos cuadrados es irreductible, aunque expresiones como $x^6 + y^6$ y $x^{12} + y^{12}$, que son la suma de dos cubos, pueden ser factorizados por los métodos que aquí se indican.

Los binomios del tipo $a^n + b^n$ se pueden dividir en las cuatro clases siguientes:

1. *La suma o diferencia de dos cubos.* Si se divide $x^3 + y^3$ por $x + y$, por el método del Pr. 1.9, se obtiene el cociente $x^2 - xy + y^2$. Por tanto,

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \tag{2.10}$$

de la misma manera

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \tag{2.11}$$

regla para factorizar la suma de dos cubos

Se observa que *el primer factor de la suma de los cubos de dos números es la suma de los dos números. El segundo factor es el cuadrado del primer número menos el producto del primer número por el segundo más el cuadrado del segundo número.*

regla para factorizar la diferencia de dos cubos

Análogamente, *un factor de la diferencia de los cubos de dos números es la diferencia de los números. Y el otro factor es el cuadrado del primer número, más el producto del primer número por el segundo, más el cuadrado del segundo número.*

EJEMPLO 1 Factorícese la expresión $8a^3 + b^3$.

Solución: Nótese que $8a^3 = (2a)^3$ y que la expresión es, por tanto, producto de dos cubos. Usando la fórmula (2.10)

$$\begin{aligned} 8a^3 + b^3 = (2a)^3 + b^3 &= (2a + b)[(2a)^2 - (2a)(b) + b^2] \\ &= (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2) \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Factorícese la expresión $x^3 - 27y^6$.

Solución: Adviértase que $27y^6 = (3y^2)^3$, quedando así la expresión como una diferencia de dos cubos. Empleando la fórmula (2.11)

$$\begin{aligned} x^3 - 27y^6 = x^3 - (3y^2)^3 &= (x - 3y^2)[x^2 + (x)(3y^2) + (3y^2)^2] \\ &= (x - 3y^2)(x^2 + 3xy^2 + 9y^4) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Factorizar la expresión $8a^3 + (c - d)^3$

Solución:

$$\begin{aligned} 8a^3 + (c - d)^3 &= [2a + (c - d)][(2a)^2 - (2a)(c - d) + (c - d)^2] \\ &= (2a + c - d)(4a^2 - 2ac + 2ad + c^2 - 2cd + d^2) \end{aligned}$$

Binomios del tipo $x^n - y^n$ para n mayor que 3 y divisible por 2. En este caso se expresa $x^n - y^n$ en la forma $(x^{n/2})^2 - (y^{n/2})^2$. En esta forma el binomio es la diferencia de dos cuadrados y se puede factorizar mediante el empleo de (2.6). Si $n/2$ es divisible por 2, se aplica nuevamente el procedimiento anterior y se continúa así hasta donde sea posible.

EJEMPLO 4 Factorizar $x^4 - y^4$.

Solución:

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

El factor $x^2 + y^2$ es irreductible por tratarse de la suma de dos cuadrados.

Binomios del tipo $x^n \pm y^n$ para n mayor que 3 y divisible por 3. En este caso $x^n \pm y^n$ se puede expresar como $(x^{n/3})^3 \pm (y^{n/3})^3$. Por tanto, los binomios de este tipo se consideran como la suma o la diferencia de dos cubos y pueden aplicarse las fórmulas (2.10) o (2.11).

EJEMPLO 5 Factorizar la expresión $x^6 + y^6$.

Solución:

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 &= (x^2)^3 + (y^2)^3 \\ &= (x^2 + y^2)[(x^2)^2 - x^2y^2 + (y^2)^2] \\ &= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) \end{aligned}$$

Binomios del tipo $x^n + y^n$ para n mayor que 3 y no divisible por 3 ni por 2. Si n es divisible por 2 o por 3, la expresión se factoriza por los anteriores métodos. Sin embargo, si n no es múltiplo de 2 ni de 3, la expresión se puede factorizar por medio de las siguientes fórmulas. Estas se dan sin demostración, pero se pueden comprobar, mediante divisiones laboriosas, para cualquier valor entero positivo de n. Si n no es divisible por 2.

$$\begin{aligned} x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots \\ + x^2y^{n-3} - xy^{n-2} + y^{n-1}) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Para *cualquier* valor entero de n

$$\begin{aligned} x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots \\ + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

EJEMPLO 6 Factorícese la expresión $x^{12} - y^{12}$.

Solución: El binomio $x^{12} - y^{12}$ se puede escribir $(x^6)^2 - (y^6)^2$ ó $(x^4)^3 - (y^4)^3$. Usando la primera de estas expresiones se tiene

$$\begin{aligned} x^{12} - y^{12} &= (x^6)^2 - (y^6)^2 \\ &= (x^6 - y^6)(x^6 + y^6) \\ &= [(x^3)^2 - (y^3)^2](x^6 + y^6) \\ &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)(x^6 + y^6) \end{aligned}$$

Ya que ninguno de los binomios de la última expresión se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados, se aplica el método del Ejemplo 5 y se continúa factorizando hasta obtener

$$\begin{aligned} x^{12} - y^{12} &= (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)[(x^2)^3 + (y^2)^3] \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2) \\ &\qquad (x^4 - x^2y^2 + y^4) \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Factorícese la expresión $x^{10} - y^{10}$.

Solución: El binomio $x^{10} - y^{10}$ se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados. Así,

$$\begin{aligned} x^{10} - y^{10} &= (x^5)^2 - (y^5)^2 \\ &= (x^5 - y^5)(x^5 + y^5) \end{aligned}$$

$$x^{10} - y^{10} = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$$

EJERCICIO 7: FACTORIZACION DE BINOMIOS

Factorícense las expresiones siguientes:

1: $c^3 - d^3$	2: $m^3 - n^3$	3: $a^3 + b^3$	4: $r^3 + s^3$
5: $c^3 - 27d^3$	6: $j^3 - 8k^3$	7: $m^3 + 27k^3$	8: $x^3 + 64y^3$

9: $27u^3 - 125v^3$	10: $64p^3 - 125q^3$	11: $8x^3 + 216y^3$
12: $64m^3 + 8n^3$	13: $m^6b^3 - 27$	14: $343x^9k^6 - 125$
15: $27a^{15}b^{12} + 216$	16: $125u^{12}d^6 + 64$	17: $m^4 - n^4$
18: $x^4 - y^4$	19: $a^4 - 81$	20: $c^4 - 16$
21: $a^6 - b^6$	22: $y^6 + 729$	23: $64m^6 - 1$
24: $c^8 - 1$	25: $m^6 - s^6$	26: $p^8 - s^4$
27: $p^{12} + q^6$	28: $a^{16} - b^{16}$	29: $h^{12} + k^{12}$
30: $125a^{27} - 1$	31: $x^7 - y^7$	32: $a^5 + y^5$
33: $m^{12} - n^{12}$	34: $p^{14} - q^{14}$	35: $a^9 + y^9$
36: $b^{15} - c^{15}$	37: $(a - b)^3 - 1$	38: $(m + n)^3 + 8$
39: $(3x - y)^3 + 27$	40: $(5r - 2s)^3 - 64$	41: $8 - (3b - 2c)^3$
42: $125 + (x - y)^3$	43: $a^{12} - (a^2 - 1)^3$	44: $x^9 + (m^3 - 1)^3$

2.5 FACTORIZACION POR AGRUPACION

Frecuentemente un multinomio que contiene cuatro o más términos se puede reducir a una forma factorizable mediante una adecuada agrupación de sus términos y posterior factorización de los grupos. Si esto es posible, el multinomio se puede factorizar por medio de alguno de los métodos anteriores. Se ilustrará el procedimiento con algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Factorizar la expresión $ax - bx - ay + by$.

Solución:

$ax - bx - ay + by = (ax - bx) - (ay - by)$ — *se han agrupado los dos primeros y los dos últimos términos.*

$= x(a - b) - y(a - b)$ — *se ha sacado x como factor común del primer grupo y y como factor común del segundo.*

$$= (a - b)(x - y)$$ *se ha sacado $a - b$ como factor común.*

EJEMPLO 2 Factorizar la expresión $x - y - x^2 + y^2$.

Solución:

$x - y - x^2 + y^2 = (x - y) - (x^2 - y^2)$	*se han agrupado los dos primeros y los dos últimos términos.*
$= (x - y) - (x - y)(x + y)$	*se ha factorizado $x^2 - y^2$*
$= (x - y)[1 - (x + y)]$	*se ha sacado $x - y$ como factor común*
$= (x - y)(1 - x - y)$	*se ha simplificado el último factor*

El siguiente ejemplo ilustra cómo puede reducirse una expresión a la diferencia de dos cuadrados mediante una agrupación adecuada de sus términos.

EJEMPLO 3 Factorizar la expresión $9c^2 - 4a^2 + 4ab - b^2$.

Solución:

$9c^2 - 4a^2 + 4ab - b^2 = 9c^2 - (4a^2 - 4ab + b^2)$	*por Pr. 1.4*
$= 9c^2 - (2a - b)^2$	*por ec. (2.8)*
$= [3c + (2a - b)][3c - (2a - b)]$	*por ec. (2.6)*
$= (3c + 2a - b)(3c - 2a + b)$	

2.6 TRINOMIOS QUE SON REDUCTIBLES A LA DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

Si se puede convertir un trinomio en un cuadrado perfecto, mediante la adición de un término que sea cuadrado perfecto, entonces se puede expresar el trinomio como una diferencia de cuadrados. Por ejemplo, el trinomio $4x^4 + 8x^2y^2 + 9y^4$ sería un cuadrado perfecto si el término intermedio fuera $12x^2y^2$. Por tanto, si se adiciona y se sustrae $4x^2y^2$, se obtiene

$$\begin{aligned}4x^4 + 8x^2y^2 + 4x^2y^2 + 9y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4) - 4x^2y^2 \\ &= (2x^2 + 3y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (2x^2 + 3y^2 + 2xy)(2x^2 + 3y^2 - 2xy)\end{aligned}$$

Debe observarse que este método se aplica únicamente *si al agregar un cuadrado perfecto* al trinomio éste se convierte en cuadrado perfecto. Por ejemplo, $x^4 - x^2y^2 + y^4$ se convierte en cuadrado perfecto cuando se le sustrae x^2y^2. Sin embargo, se tiene

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 = (x^2 - y)^2 + x^2y^2$$

que por ser suma de dos cuadrados no es factorizable.

EJERCICIO 8: FACTORIZACION POR AGRUPACION

Factorícense las expresiones de los problemas 1 a 40 empleando el método del Pr. 2.5

1: $mn + m + n + 1$
2: $ab + 3a + b + 3$
3: $uv + 5v + 2u + 10$
4: $x^2 + x - xy - y$
5: $rs + 6s - r - 6$
6: $c^2 - 3cd + c - 3d$
7: $2x^2 + 6xy - 5x - 15y$
8: $2h^2 + 6h - 5hk - 15k$
9: $mc + cn + dm + dn$
10: $ab - b^2 + ac - cb$
11: $6ut - 10st + 3ur - 5rs$
12: $6xy - 15y^2 + 2xz - 5yz$
13: $10h^2 - 15hk - 4hj + 6jk$
14: $6a^2 - 3ab - 36ac + 18cb$
15: $21r^2 - 9rs + 35rz - 15zs$
16: $4m^2 - 5mn + 8mp - 10np$
17: $x^2 - xy + xz - x + y - z$
18: $m^2 - mn - mp + m - n - p$
19: $h^2 - 3hk - hj - ph + 3pk + pj$
20: $8r^3 - 16r^2s - 12rt - 6r^2 + 12rs + 9t$
21: $a^2 - b^2 - a - b$
22: $u^2 - v^2 - u + v$
23: $h^2 - 2hk + k^2 - hj + kj$
24: $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$
25: $m^3 + n^3 - m^2 - 2mn - n^2$
26: $r^2 + 2rs + s^2 - r^3 - s^3$
27: $2a^2 - ab - b^2 - 8a^3 - b^3$
28: $8y^3 - x^3 + x^2 - 4y^2$
29: $x^2 - 4y^2 + 16y - 16$
30: $u^2 + 10uv + 25v^2 - 4t^2$
31: $9a^2 - b^2 + 4bd - 4d^2$
32: $16h^2 - 24hd - k^2 + 9d^2$
33: $m^2 - 6mn + 9n^2 - 4p^2 - 8pz - 4z^2$
34: $25r^2 - 10rs + s^2 - t^2 + 4tu - 4u^2$
35: $9x^2 + 24xy + 16y^2 - z^2 - 6zt - 9t^2$
36: $9a^2 - 6ab + b^2 - c^2 + 4cd - 4d^2$
37: $a^2 - 4ab + 2ac + 3b^2 - 2cb$
38: $x^2 - 4xy - xz + 3y^2 + yz$
39: $6ms - 6m^2 + 13mn - 4sn - 6n^2$
40: $25jk - 15j^2 + 13jh - 5hk - 2h^2$

Factorícense las expresiones de los problemas 41 a 52 empleando el método del Pr. 2.6

41: $x^4 + 4x^2 + 16$
42: $a^4 - 19a^2 + 25$
43: $m^4 + 3m^2 + 4$
44: $r^4 - 10r^2 + 9$
45: $c^4 + 4$
46: $a^4 + 2a^2b^2 + 9b^4$
47: $x^4 + 7x^2y^2 + 16y^4$
48: $m^4 - 14m^2n^2 + 25n^4$
49: $4c^4 - 16c^2d^2 + 9d^4$
50: $9u^4 + 15u^2v^2 + 16v^4$
51: $36a^4 - 40a^2b^2 + 9b^4$
52: $4x^4 - 41x^2y^2 + 64y^4$

EJERCICIO 9: PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION

Sin efectuar la operación detallada de multiplicación encuéntrense los productos de los problemas 1 a 60.

1: $(2a + 1)(a + 3)$
2: $(3x + 1)(x + 2)$
3: $(4c + d)(c + 3d)$
4: $(2m + n)(m + 3n)$
5: $(5s - 3t)(2s - 4t)$
6: $(7a - 5b)(3a - 2b)$
7: $(2h - 3k)(3h - 5k)$
8: $(2i - 5j)(3i - j)$
9: $(3s - 2t)(4s + 5t)$
10: $(7a - 2b)(3a + 5b)$
11: $(4t + 2u)(7t - 3u)$
12: $(2u + 5v)(6u - 2v)$
13: $(3x - 7y)(8x + 3y)$
14: $(5c + 7d)(4c - 3d)$
15: $(3a + 9b)(5a - 7b)$
16: $(5s + 10t)(3s - 6t)$
17: $(6h - 9k)(4h + 3k)$
18: $(7x + 12y)(4x - 3y)$
19: $(7c + 2d)(5c - 11d)$
20: $(9t - 8u)(13t - 5u)$
21: $(m + 5)(m - 5)$
22: $(b + 3)(b - 3)$
23: $(3x - 1)(3x + 1)$
24: $(5s + 1)(5s - 1)$
25: $(3x + y)(3x - y)$
26: $(2t + s)(2t - s)$
27: $(3a + 2b)(3a - 2b)$

28: $(3c - 5d)(3c + 5d)$
29: $(4a - 3b)(4a + 3b)$
30: $(6h + 5k)(6h - 5k)$
31: $(7m + 5n)(7m - 5n)$
32: $(8p + 5q)(8p - 5q)$
33: $(m + 3n)^2$
34: $(3r - s)^2$
35: $(6p + 5q)^2$
36: $(7h - 3k)^2$
37: $(\frac{1}{3}x + 2y)^2$
38: $(\frac{2}{5}a - \frac{5}{2}b)^2$
39: $(\frac{5}{4}r + \frac{4}{5}s)^2$
40: $(\frac{2}{5}u - \frac{5}{4}v)^2$
41: $(3a^2 - 2b^3)^2$
42: $(2x^3 - 3y^2)^2$
43: $(6p^5 + 5q^2)^2$
44: $(9a^2b^4 - 5c^3)^2$
45: $[(x + y) + z][(x + y) - z]$
46: $(a + b + c)(a + b - c)$
47: $(m + n - 3p)(m + n + 3p)$
48: $(a + 3b - 2c)(a + 3b + 2c)$
49: $(x - 2y + 5z)(x + 2y + 5z)$
50: $(3r - 2s + 4t)(3r + 2s + 4t)$
51: $(h - 3k - j)(h + 3k + j)$
52: $(2x - 3y - 5z)(2x + 3y + 5z)$
53: $(r + s + t)^2$
54: $(x - y + z)^2$
55: $(a + b - 3c)^2$
56: $(3x - y - 2z)^2$
57: $(m + 3b + c + 2d)^2$
58: $(m^3 + 3m^2 - m - 2)^2$
59: $(r^3 - 2r^2 - 3r + 4)^2$
60: $(3h^4 - 2h^2 + h - 4)^2$

Factorícense las expresiones siguientes:

61: $6a^2 - 12ab - 18ac$
62: $2m^2n + 6mn^2 + 8mns$
63: $9xyz - 18x^2tz + 27x^3z^2$
64: $3a^5 - 12a^4 - 9a^3$
65: $16x^2y^3 + 20x^3y^2 + 28xy$
66: $10p^3q^3 - 20p^2q + 25pq^2$
67: $12m^2n^2 - 8m^2np - 20\ mn^2p$
68: $3x^2y^2 - 12x^2yz + 18xy^2z$
69: $x^2 - 16$
70: $a^2 - 9$
71: $9u^2 - 36b^2$
72: $81m^2 - 25n^2$
73: $27b^4 - 48c^2$
74: $12a^6 - 27b^4$
•75: $45c^3d - 80cd^3$
76: $81x^5y - 49xy^7$
77: $16a^2 + 8ab + b^2$
78: $25x^2 - 10xy + y^2$
79: $16u^2 + 8uv + v^2$
80: $49r^2 - 126rs + 81s^2$
81: $36h^6 - 24h^3k^2 + 4k^4$
82: $25a^4 - 30a^2b^4 + 9b^8$
83: $49x^2 + 56xy^5 + 16y^{10}$
84: $25b^8 - 20b^4c^3 + 4c^6$
85: $x^2 - 8x + 15$
86: $y^2 + 5y + 6$
87: $m^2 + m - 6$
88: $h^2 - h - 20$
89: $6x^2 - xy - 2y^2$
90: $10r^2 + 13rt - 3t^2$
91: $6a^2 + 10ab - 4b^2$
92: $4b^2 - 4bc - 15c^2$
93: $x^3 + y^3$
94: $a^3 - b^3$
95: $27x^3 + y^3$
96: $8r^3 - s^3$
97: $64a^3 + 8b^3$
98: $27a^6 + 1$
99: $8 + y^6$
100: $m^9 - 27n^{12}$
101: $xyz + 2zy - 3xz - 6z$
102: $acb + b^2c - 3ac - 3bc$
103: $(bx - cy + dx + cx - by - dy)$
104: $rx - sx + tx + yr - ys + yt$
105: $m^2 - 4b^2 - m - 2b$
106: $a^3 - 8b^3 + a - 2b$
107: $4x^2 - y^2 + 8x^3 - y^3$
108: $a^2 - 4b^2 + a^2b - 2ab^2$
109: $m^4 - n^4$
110: $a^4 - 81$
111: $z^4 - 16w^4$
112: $c^4 - d^8$
113: $x^6 - 1$
114: $a^9 + b^9$
115: $x^{12} - y^6$
116: $8x^9 - b^6$
117: $x^5 + y^5$
118: $a^7 - b^7$
119: $u^{14} - v^{14}$
120: $a^{10} - 1$
121: $a^4 + 5a^2 + 9$
122: $x^4 + 3x^2 + 4$
123: $9c^4 + 5c^2 + 1$
124: $4m^4 + 3m^2n^2 + n^4$
125: $a^4 - 20a^2b^2 + 4b^4$
126: $4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4$
127: $4b^4 - 21b^2c^2 + 9c^4$
128: $16x^4 - 28x^2y^2 + 9y^4$
129: $m^2 - m - n^2 - n$
130: $x^3 + x^2 - y^3 - y^2$
131: $a^6 + 3a^4 + 6a^2 + 8$
132: $a^3 + a^2 + 2ab - 3b^2 - b^3$
133: $9 - c^2 + 4cd - 4d^2$
134: $4r^4 - r^2 - 4rs - 4s^2$
135: $x^2 - a^2 - 6xy + 2ab + 9y^2 - b^2$
136: $a^3 - 9b^2 - 27b^3 + a^2$

3 FRACCIONES

EN EL PR. 1.8 se definió la fracción $\frac{a}{b}$, o a/b*, como la división de a entre b o simbólicamente $a \div b$, siendo $b \neq 0$. En álgebra las fracciones se presentan tan frecuentemente como en aritmética y, como en ésta, se pueden combinar mediante adición, sustracción, multiplicación y división. Sin embargo, en virtud de que los procesos algebraicos tratan principalmente con letras que representan números, el símbolo de la fracción algebraica persiste a lo largo de las operaciones concernientes con algún cálculo particular. Por esa razón es conveniente buscar otros métodos para operar con ellas.

3.1 EL PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES

numerador
denominador
miembro

En la fracción $\frac{a}{b}$ el símbolo a se denomina *numerador* de la fracción, el símbolo, b *denominador* de la fracción y de cada uno se dice que es un *miembro* de la fracción.

producto de dos fracciones

El producto de dos fracciones cualesquiera a/b y c/d se define por medio de la igualdad

* La forma a/b se popularizó durante el siglo diecinueve como consecuencia del uso del tipo de metal en las imprentas. En Inglaterra, quizá por el amplio uso de las fracciones en el manejo de su moneda (la unidad es la libra, una libra tiene 20 chelines y un chelín 12 peniques), aquella forma recibió el nombre de *fracción chelín.* Además, el símbolo / recibió el nombre de barra sólida, inclinada o chelín.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd} \tag{3.1}$$

Empleando la expresión anterior para $c = d = n$, se tiene

$$\frac{a}{b} \times \frac{n}{n} = \frac{an}{bn}$$

Puesto que $n/n = 1$, siendo n cualquier número real diferente de cero

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b} \times \frac{n}{n}$$

según (3.1) el producto de la derecha es an/bn. Por tanto

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} \tag{3.2}$$

Además, puesto que n es un número real diferente de cero, la expresión (3.2) también es válida si $n = 1/p$, $p \neq 0$. Por tanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{a(1/p)}{b(1/p)} = \frac{a \div p}{b \div p} \tag{3.3}$$

principio fundamental de fracciones

Si las igualdades (3.2) y (3.3) se leen ahora de izquierda a derecha se obtiene el siguiente principio fundamental de las fracciones: *si cada miembro de una fracción se multiplica o se divide por una misma cantidad diferente de cero, el valor de la fracción no se altera.* Los ejemplos que siguen a continuación sirven para ilustrar este principio

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20} \qquad \frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{8 \div 2}{10 \div 2} = \frac{4}{5} \qquad \frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{8}{10}$$

$$\frac{a^3b^2}{a^4b} = \frac{a^3b^2 \div a^3b}{a^4b \div a^3b} = \frac{b}{a} \qquad \frac{b}{a} = \frac{b \times a^3b}{a \times a^3b} = \frac{a^3b^2}{a^4b}$$

EJEMPLO Convertir $\dfrac{x-3}{x-1}$ en una fracción cuyo denominador sea $x^2 - 1$.

Solución: El denominador deseado se puede obtener multiplicando el denominador de la fracción dada por $x + 1$. En consecuencia, haciendo uso del principio fundamental y multiplicando numerador y denominador por $x + 1$ se tiene

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{x+3}{x-1}\frac{x+1}{x+1} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$$

Como una consecuencia adicional de (3.2) se tiene

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times (-1)}{b \times (-1)} = \frac{-a}{-b}$$

Además,

$$\frac{-a}{b} = \frac{-1 \times a}{1 \times b}$$

$$= \frac{-1}{1} \times \frac{a}{b} \qquad \textit{por (3.1)}$$

$$= -1 \times \frac{a}{b} \qquad \textit{ya que } \frac{-1}{1} = -1$$

$$= -\frac{a}{b}$$

De la misma manera

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Por tanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} \tag{3.4}$$

y,

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \tag{3.5}$$

regla de los signos de las fracciones

De lo anterior se tiene que *en una fracción se pueden cambiar simultáneamente los signos del numerador y del denominador sin alterar el valor de la fracción. Sin embargo, si se cambia el signo del numerador o el signo del denominador, se debe cambiar entonces el signo que precede a la fracción.* Los ejemplos siguientes ilustran la regla de los signos en las fracciones.

$$\frac{a-2}{a-3} = \frac{2-a}{3-a} = -\frac{a-2}{3-a} = -\frac{2-a}{a-3}$$

3.2 REDUCCION A LA MINIMA EXPRESION

mínima expresión

La mínima expresión de una fracción es aquella en la cual el numerador y el denominador no tienen factores comunes. Por tanto, para reducir una fracción a su mínima expresión se factorizan primero el numerador y el denominador y luego se divide cada uno de ellos entre cada factor que les sea común.

EJEMPLO 1 Reducir a su mínima expresión la fracción $\dfrac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 + 3x^2 - 6x}$

Solución:

$$\frac{x^3 + x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{x(x^2 + x - 6)}{x(x^2 - 3x + 2)}$$ *se ha factorizado el numerador y el denominador*

$$= \frac{x(x-2)(x+3)}{x(x-2)(x-1)}$$

$$= \frac{x+3}{x-1}$$ *se han dividido el numerador y el denominador entre $x(x-2)$.*

cancelación

En la reducción de fracciones es común borrar o tachar el factor por el cual se dividen numerador y denominador.

EJEMPLO 2 Reducir a su mínima expresión $\dfrac{a^5 - a^4c - ab^4 + b^4c}{a^4 - a^3c - a^2b^2 + ab^2c}$

Solución:

$$\frac{a^5 - a^4c - ab^4 + b^4c}{a^4 - a^3c - a^2b^2 + ab^2c} = \frac{a^4(a-c) - b^4(a-c)}{a^3(a-c) - ab^2(a-c)}$$ *agrupando términos y factorizando*

$$= \frac{a^4\cancel{(a-c)} - b^4\cancel{(a-c)}}{a^3\cancel{(a-c)} - ab^2\cancel{(a-c)}}$$ *dividiendo cada término por $a - c$ factor común*

$$= \frac{a^4 - b^4}{a^3 - ab^2}$$ *agrupando los términos restantes*

$$= \frac{\cancel{(a^2 - b^2)}(a^2 + b^2)}{a\cancel{(a^2 - b^2)}}$$ *factorizando numerador y denominador y dividiendo por el factor común.*

$$= \frac{a^2 + b^2}{a}$$

Debe notarse que la primera vez que se hizo la supresión, la expresión suprimida $a - c$ era un factor *de cada uno de los términos* de los dos miembros de la fracción y que la fracción pudo haberse escrito en la forma $(a - c)(a^4 - b^4) / (a - c)(a^3 - ab^2)$. La segunda vez que se hizo la supresión, estando factorizados numerador y denominador, el factor suprimido $a^2 - b^2$ era un factor común a ambos.

requisitos para la supresión de factores comunes

El uso de la supresión de factores comunes suele llevar a graves errores cuando se aplica descuidadamente o cuando el procedimiento no se entiende con claridad. Se debe tener la seguridad de que, *cuando el numerador y el denominador no están factorizados totalmente, la expresión suprimida debe ser factor de cada término escrito encima y debajo de la línea.* Sería un error suprimir $a - 2b$ en $\dfrac{(a - 2b)(3a + b)}{(a - 2b)\ \ 3a + b}$ puesto que, por una parte, el denominador no está factorizado, y, por otra parte, $a - 2b$ es un factor del primer término, $(a - 2b)3a$, pero no del segundo, b. Si no se comprende claramente el procedimiento, no debe aplicarse hasta no haber factorizado completamente los dos miembros de la fracción.

EJERCICIO 10: CONVERSION Y REDUCCION DE FRACCIONES

Conviértanse las fracciones de los problemas 1 a 24 en fracciones equivalentes cuyo denominador sea la segunda expresión dada en cada problema.

1: $\dfrac{3}{y - 2}$, $2 - y$

2: $\dfrac{x - 2y}{x - y}$, $y - x$

3: $-\dfrac{a - 3b + c}{2a - b - c}$, $c + b - 2a$

4: $-\dfrac{2a - b - 3c}{-a + 2b + c}$, $a - 2b - c$

5: $\dfrac{a}{b}$, ab

6: $\dfrac{c}{d}$, cd

7: $\dfrac{a}{t}$, st

8: $\dfrac{b}{k}$, ku

9: $\dfrac{ab^2}{ab}$, b

10: $\dfrac{3x}{x^2}$, x

11: $\dfrac{2a}{a^2}$, a

12: $\dfrac{5st}{s^2t}$, s

13: $\dfrac{x - 2}{x - 3}$, $x^2 - 9$

14: $\dfrac{x - 5}{x + 1}$, $x^2 - 1$

15: $\dfrac{a + 2}{a - 5}$, $a^2 - 25$

16: $\dfrac{a + 1}{a - 2}$, $a^2 - 4$

17: $\dfrac{(a+2)(a-1)}{(a+3)(a-1)}$, $a+3$ 18: $\dfrac{(a+5)(2a-1)}{(a+5)(a-2)}$, $a-2$

19: $\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+3)}$, $x+3$ 20: $\dfrac{(2x-5)(4x-1)}{(x-4)(2x-5)}$, $x-4$

21: $\dfrac{x-3}{x-2}$, x^2-3x+2 22: $\dfrac{x+2}{x-4}$, x^2-3x-4

23: $\dfrac{2x-1}{3x+2}$, $3x^2+5x+2$ 24: $\dfrac{2x-3}{3x-2}$, $3x^2+x-2$

Redúzcanse a su mínima expresión las fracciones siguientes:

25: $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$ 26: $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$

27: $\dfrac{2x^2+x-1}{2x^2+5x-3}$ 28: $\dfrac{3x^2-11x+6}{3x^2+4x-4}$

29: $\dfrac{(2a-b)(a^2-3ab+2b^2)}{(2a^2+ab-b^2)(a-2b)}$ 30: $\dfrac{(2a^2+7ab+6b^2)(a-b)}{(2a^2+ab-3b^2)(2a+b)}$

31: $\dfrac{(2x-5y)(x^2+3xy+2y^2)}{(2x^2-3xy-5y^2)(2x-y)}$ 32: $\dfrac{(2x-3y)(3x^2-8xy+4y^2)}{(2x^2-7xy+6y^2)(2x+3y)}$

33: $\dfrac{ax-ay+bx-by}{2ax-by-ay+2bx}$ 34: $\dfrac{ax+2bx-2by-ay}{2ax-ay+4bx-2by}$

35: $\dfrac{sx+2sy-tx-2ty}{2sx+4sy+tx+2ty}$ 36: $\dfrac{2as-at-4cs+2ct}{as-2at-2cs+4ct}$

37: $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$ 38: $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$

39: $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$ 40: $\dfrac{x^6-y^6}{x^3-y^3}$

41: $\dfrac{x^4+4x^2+16}{x^3+8}$ 42: $\dfrac{b^6-d^6}{b^4-d^4}$

43: $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$ 44: $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$

45: $\dfrac{(2x-5)x-3}{(x-1)(x-3)}$ 46: $\dfrac{(3x-5)x-2}{(x-2)(3x-5)}$

47: $\dfrac{x-3}{(2x-5)x-3}$ 48: $\dfrac{(x-4)(x+2)}{(5x-19)x-4}$

49: $\dfrac{(x+1)(2x-1)}{x(x+1)+(x+2)x+1}$ 50: $\dfrac{(x+2)(x+3)}{x(x+2)+(x+3)x+2}$

51: $\dfrac{(x+4)x}{x(x+4)+(x+5)x+4}$ 52: $\dfrac{x+3}{x(x+3)+(x+4)x+3}$

3.3 MULTIPLICACION DE FRACCIONES

La fórmula (3.1) establece que el producto de dos fracciones es el producto de los numeradores divididos entre el producto de los denominadores, por ejemplo,

$$\frac{ab}{c}\times\frac{a^2b}{2c}=\frac{ab\times a^2b}{c\times 2c}=\frac{a^3b^2}{2c^2}$$

Por ser conmutativa la multiplicación, Pr. 1.5, pueden colocarse los términos en el orden que convenga, como en el ejemplo siguiente:

$$\frac{3x(x+y)}{2(x-y)}\times\frac{3(x-2y)}{2y(2x-y)}\times\frac{5x}{4y}=\frac{(3x)(3)(5x)(x+y)(x-2y)}{(2)(2y)(4y)(x-y)(2x-y)}$$

$$= \frac{45x^2(x^2 - xy - 2y^2)}{16y^2(2x^2 - 3xy + y^2)}$$
$$= \frac{45x^4 - 45x^3y - 90x^2y^2}{32x^2y^2 - 48xy^3 + 16y^4}$$

El procedimiento para multiplicar dos o más fracciones y para escribir el resultado en su mínima expresión, se puede de ordinario efectuar más fácilmente si los miembros de las fracciones están factorizados. De esta manera, es posible determinar anticipadamente qué factores serán comunes al numerador y al denominador en el producto. Y estos factores pueden entonces ser suprimidos y eliminados de nuestra atención. Por ejemplo, al efectuar la multiplicación indicada en

$$\frac{(a - 2b)(a + b)}{(a - b)(a + 3b)} \times \frac{(a - b)(a + 5b)}{(a - 2b)} \times \frac{(a + 3b)}{(a + b)(a - 3b)}$$

es obvio que las expresiones $a - 2b$, $a + b$, $a - b$, $a + 3b$, aparecerán en el resultado como factores tanto del numerador como del denominador. Por tanto, puesto que van a ser eliminadas al reducir el resultado a su mínima expresión, no es necesario escribirlas al multiplicar. De ahí, que sea conveniente suprimirlas al comenzar la multiplicación para que se simplifique así el procedimiento. La supresión del mismo factor en uno de los numeradores y en uno de los denominadores de un producto indicado equivale a reemplazar por la unidad cada una de las expresiones suprimidas. Si se aplican estas operaciones al producto escrito anteriormente, se tiene

$$\frac{\cancel{(a - 2b)}\cancel{(a + b)}}{\cancel{(a - b)}\cancel{(a + 3b)}} \times \frac{\cancel{(a - b)}(a + 5b)}{\cancel{(a - 2b)}} \times \frac{\cancel{(a + 3b)}}{\cancel{(a + b)}(a - 3b)} = \frac{a + 5b}{a - 3b}$$

Al igual que en el caso de reducir fracciones a su mínima expresión, la supresión descuidada puede conducir a errores graves. Deseamos, por tanto, hacer hincapié en que no debe efectuarse la supresión de factores comunes hasta tanto no haya quedado factorizado cada uno de los miembros de cada fracción. Además, las expresiones suprimidas deben aparecer por pares, una como factor del numerador y la otra como factor del denominador. En la siguiente expresión sería un error suprimir $(2x - y)2x$

$$\frac{(2x - y)2x}{x - y} \times \frac{x - y}{(2x - y)2x + 3y}$$

ya que esa expresión no es un factor del segundo denominador, el cual es la suma de $(2x - y)\ 2x$ y de $3y$.

Las ventajas de utilizar la cancelación en la multiplicación de fracciones se ilustra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 1 Encontrar el producto indicado.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \times \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} \times \frac{3x^2 + 6x}{2x - 4}$$

Solución:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \times \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} \times \frac{3x^2 + 6x}{2x - 4}$$
$$= \frac{\cancel{(x - 2)}\cancel{(x - 1)}}{\cancel{(2x - 1)}\cancel{(x + 2)}} \times \frac{\cancel{(2x - 1)}(x + 3)}{\cancel{(x - 1)}(x + 1)} \times \frac{3x\cancel{(x + 2)}}{2\cancel{(x - 2)}}$$
$$= \frac{3x(x + 3)}{2(x + 1)}$$

Frecuentemente se observan con mayor claridad los términos que pueden cancelarse si previamente se ordenan y se hacen los cambios permitidos de signos, en los términos de los miembros de las fracciones.

EJEMPLO 2 Encontrar el producto indicado por

$$\frac{a + 2b}{a^2 - b^2} \times \frac{2b - a}{b - a} \times \frac{a + b}{4b^2 - a^2}$$

Solución: Los términos que contienen a son positivos y otros son negativos. Sin embargo, si se cambian ambos signos en los dos miembros de la segunda fracción, y se cambia el signo que antecede a la tercera fracción cambiando los dos signos de su denominador, y se ordenan los términos, se tiene

$$\frac{a + 2b}{a^2 - b^2} \times \frac{a - 2b}{a - b} \times - \frac{a + b}{a^2 - 4b^2}$$
$$= \frac{\cancel{a + 2b}}{(a - b)\cancel{(a + b)}} \times \frac{\cancel{a - 2b}}{a - b} \times - \frac{\cancel{a + b}}{\cancel{(a - 2b)}\cancel{(a + 2b)}}$$
$$= - \frac{1}{(a - b)^2}$$

Debe observarse que la supresión reemplaza cada numerador por la unidad; así que el numerador del producto es *uno* y no cero.

3.4 DIVISION DE FRACCIONES

En aritmética se da, generalmente sin demostración, un método para obtener el cociente de dos fracciones que consiste en *invertir los términos del divisor y luego multiplicar*. Por ejemplo, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$. Este procedimiento se basa en la propiedad según la cual un cociente no varía si dividendo y divisor se multiplican por una misma cantidad diferente de cero. Por tanto,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}\right) \div \left(\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}\right)$$
$$= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \textit{puesto que } \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = 1 \tag{3.6}$$

El mismo procedimiento se emplea para dividir fracciones en álgebra y de ese modo la división se convierte en un proceso de multiplicación.

EJEMPLO Realizar la división indicada.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 7x + 3} \div \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$$

Solución:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 7x + 3} \div \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 7x + 3} \times \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - x - 2} \qquad \textit{por la ec. (3.6)}$$

$$= \frac{\cancel{(x - 2)}(x - 1)}{\cancel{(2x - 1)}(x - 3)} \times \frac{\cancel{(2x - 1)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}(x + 1)} \qquad \textit{factorizando y cancelando términos comunes}$$

$$= \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 3)(x + 1)} \qquad \textit{escribiendo los términos no cancelados}$$

EJERCICIO 11: MULTIPLICACION Y DIVISION DE FRACCIONES

Efectúense las multiplicaciones y divisiones indicadas en los problemas siguientes y redúzcase el resultado a su mínima expresión.

1: $\dfrac{3a^2b}{2ab^2} \times \dfrac{5a^3b^2}{3a^2b^3}$

2: $\dfrac{7x^3y}{2xy^5} \times \dfrac{3xy^2}{5x^3y^3}$

3: $\dfrac{4ab^2c^3}{5a^2b^0c^4} \times \dfrac{7a^3b^3c^5}{3ab^2c^2}$

4: $\dfrac{5a^2x^3t}{3axt^0} \times \dfrac{8a^4xt^2}{13a^3x^2t^3}$

5: $\dfrac{7a^2x^2}{3ax^3} \div \dfrac{14a^3x}{9ax^3}$

6: $\dfrac{5a^2xt^0}{2ax^2t} \div \dfrac{10a^3xt}{6a^2x^3t^2}$

7: $\dfrac{9xy^3z^2}{14x^0yz^3} \div \dfrac{18x^2yz^2}{21xy^3z}$

8: $\dfrac{15a^3b^0t}{14ab^2t^3} \div \dfrac{6a^2bt^2}{21a^2b^2t}$

9: $\dfrac{7ab^2}{2bc^2} \times \dfrac{6a^3c}{21a^2b} \div \dfrac{15ab}{3bc^2}$

10: $\dfrac{18xy^2}{7yz} \times \dfrac{14x^2y}{3xz^2} \div \dfrac{24y^2z^3}{5xz^2}$

11: $\dfrac{8a^3c}{14ab^2} \times \dfrac{7b^2c}{6ac^2} \div \dfrac{22b^2c}{15ab^3}$

12: $\dfrac{26xy^3}{15x^2z} \times \dfrac{6y^2z}{65x^2y^3} \div \dfrac{8x^4y}{25x^6z^3}$

13: $\dfrac{a - 2b}{2a + 6b} \times \dfrac{a + 3b}{3a - 6b}$

14: $\dfrac{a - 3b}{a + 2b} \times \dfrac{3a + 6b}{2a - 6b}$

15: $\dfrac{4x - 8y}{bx + by} \times \dfrac{ax + ay}{3x - 6y}$

16: $\dfrac{2x - 6a}{ax + 2ay} \times \dfrac{2x + 4y}{bx - 3ba}$

17: $\dfrac{x^2 - 9}{x + 4} \div (2x - 6)$

18: $\dfrac{x^2 - 16}{2x + 5} \div (3x - 12)$

19: $(x^2 - 3x + 2) \div \dfrac{x^2 - 1}{x}$

20: $(x^2 + 5x + 4) \div \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

21: $\dfrac{3a(a - 2b)^2}{2b^3} \times \dfrac{b(a + 2b)}{6a^2} \times \dfrac{12ab}{a^2 - 4b^2}$

22: $\dfrac{2x(3x - 2y)^2}{3y^2} \times \dfrac{6y(3x + 2y)}{5x^2} \times \dfrac{10xy^2}{9x^2 - 4y^2}$

23: $\dfrac{5x^2(2x + 5y)^2}{9y} \times \dfrac{6y^2}{4x^2 - 25y^2} \times \dfrac{3y(2x - 5y)}{2x(2x + 5y)}$

24: $\dfrac{7a^3(a - 4b)^2}{6b^2} \times \dfrac{10ab^3}{a^2 - 16o^2} \times \dfrac{3a^0b(a + 4b)}{5(a - 4b)}$

25: $\dfrac{a^2 - 3a}{b^2 - 2b} \times \dfrac{ab^2 - 2ab}{a^2 - 9} \div \dfrac{a}{b(a + 3)}$

26: $\dfrac{2x^2 + 3x}{y^2 - 2y} \times \dfrac{xy^2 - 2xy}{4x^2 - 9} \div \dfrac{x}{2xy - 3y}$

27: $\dfrac{2x - x^2}{y^2 + y} \times \dfrac{x^2y^2 + x^2y}{4 - x^2} \div \dfrac{2x^3}{(2 + x)y}$

28: $\dfrac{2a^2 - a}{3b - b^2} \times \dfrac{3ab^2(9 - 6b + b^2)}{4a^2 - 1} \div \dfrac{3a - ab}{2ab + b}$

29: $\dfrac{6x^2 - 5x + 1}{3x^2 - 10x + 3} \times \dfrac{x^2 + 5x + 6}{2x^2 + 3x - 2}$

30: $\dfrac{6x^2 + x - 1}{2x^2 + 5x + 2} \times \dfrac{x^2 - x - 6}{3x^2 - 7x + 2}$

31: $\dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 4x - 5} \times \dfrac{2x^2 + 11x + 5}{2x^2 + 7x + 6}$

32: $\dfrac{6x^2 - 5x - 6}{6x^2 - x - 2} \times \dfrac{6x^2 - x - 2}{6x^2 - 11x - 10}$

33: $\dfrac{x^2 + xy - 6y^2}{x^2 - 2xy - 3y^2} \times \dfrac{x^2 - 2xy - 3y^2}{x^2 - 3xy + 2y^2} \times \dfrac{x + y}{x + 3y}$

34: $\dfrac{r^2 + 3rs + 2s^2}{r^2 - 2rs - 3s^2} \times \dfrac{r^2 - 4rs + 3s^2}{r^2 - s^2} \times \dfrac{r - s}{r + 2s}$

35: $\dfrac{a^2 + ab - 6b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} \times \dfrac{4a^2 - 4ab + b^2}{2a^2 - 5ab + 2b^2} \times \dfrac{a + b}{2a - b}$

36: $\dfrac{s^2 - 4st + 4t^2}{2s^2 - st - 6t^2} \times \dfrac{4s^2 + 4st - 3t^2}{s^2 - 3st + 2t^2} \times \dfrac{2s + t}{2s - t}$

37: $\dfrac{a^2 + 3a + 2}{a^2 - 1} \times \dfrac{a^2 + 6a + 9}{a^2 + 3a + 2} \div \dfrac{a + 3}{a - 1}$

38: $\dfrac{b^2 + 6b + 9}{b^2 + b - 2} \times \dfrac{b^2 - 4}{b^2 + 5b + 6} \div \dfrac{b + 3}{b - 1}$

39: $\dfrac{r^2 + r - 12}{r^2 - 2r - 3} \times \dfrac{r^2 - 6r + 8}{r^2 + 6r + 8} \div \dfrac{r - 2}{r + 1}$

40: $\dfrac{s^2 + 2s - 3}{s^2 - 4r + 4} \times \dfrac{s^2 - 4}{s^2 + s - 2} \div \dfrac{s + 5}{s - 2}$

41: $\dfrac{(x - 2)x - 3}{x - 2} \times \dfrac{x^2 - 1(x + 2)}{(x + 2)x + 1}$

42: $\dfrac{(x - 4)x + 3}{x - 3} \times \dfrac{(x - 1)x - 2}{x^2 - 4(x - 1)}$

43: $\dfrac{(x - 3)x - 4}{(x - 4)x + 4} \times \dfrac{(x - 1)x - 2}{(x - 3)x + 2}$

44: $\dfrac{(2x - 1)x - 1}{4(x - 1)x - 3} \times \dfrac{(2x - 1)x - 3}{(x - 3)x + 2}$

45: $\dfrac{(s - 2)s - 3}{s^2 - 9} \times \dfrac{s(s + 3) - 2(s + 3)}{(s - 2)(s - 3)} \div \dfrac{s + 1}{s - 3}$

46: $\dfrac{(2a + 3)a + 1}{(2a + 3)(a + 1)} \times \dfrac{(a + 1)a - 2}{a(a + 1) + 2(a + 1)} \div \dfrac{2a + 1}{2a + 3}$

47: $\dfrac{(3a - 4)a - 4}{(a - 4)a + 4} \times \dfrac{(a - 2)a + 1}{(3a - 4)(3a + 2)} \div \dfrac{a - 1}{a - 2}$

48: $\dfrac{(a - 1)a - 2}{(a - 2)a + 1} \times \dfrac{(a - 2)a - 3}{(a - 3)a - 4} \div \dfrac{a + 1}{a - 1}$

3.5 EL MINIMO COMUN MULTIPLO

Cuando un multinomio tiene por factor otro multinomio, se dice que el primero es *múltiplo* del segundo. Si un multinomio tiene por factores dos o más multinomios, se dice entonces que el primero es *múltiplo común* de los otros. Si los multinomios de un conjunto son factorizables es posible entonces la existencia de varios múltiplos comunes del conjunto.* El *mínimo común múltiplo* de un conjunto de multinomios es el multinomio de menor grado** y de menores coeficientes enteros que

mínimo común múltiplo

*El paralelo en aritmética se puede ver en los múltiplos comunes de 4 y 8; 8, 16, 24, 32, etc.

**El grado de un multinomio es el mayor número que resulta al sumar los exponentes de todas las letras que aparecen en un término. Por ejemplo, el grado de $2x^3 - 3x^2 + 4$ es 3 en tanto que el grado de $3x^2y^2 - 2y + 3y^2$ es 4.

sea exactamente divisible entre cada multinomio del conjunto. El mínimo común múltiplo, por comodidad abreviado MCM, presenta especial importancia en la adición y sustracción de fracciones y de ahí la necesidad de aprender a determinarlo. Los ejemplos que siguen sirven para ilustrar el método.

EJEMPLO 1 Determinar el MCM de $3x$, $4x^2y$, $8x^5y^2$, $36x^4$.

Solución: La mayor potencia de x que aparece en las cuatro expresiones es 5 y la mayor potencia de y es 2. En consecuencia, las literales del MCM son x^5y^2. Se observa, además, que si bien 36 no es múltiplo de 8, 4 y 3, en cambio sí lo es 72. Entonces MCM es $72x^5y^2$.

EJEMPLO 2 Determinar el MCM de $2(x - y)$, $3(x + y)$, y $(x - y)^2$.

Solución: Por simple inspección se observa que $(x - y)$ y $(x + y)$ deben ser factores del MCM y que $(x - y)$ aparece a la segunda potencia. El común múltiplo de 2 y 3 es 6 y, por tanto, el MCM será $6(x - y)^2(x + y)$.

Si los multinomios están factorizados se observa que, por definición, el MCM, factorizado debe satisfacer los requisitos siguientes:

pasos para determinar el MCM

1. Cada factor de cada multinomio debe aparecer como factor del MCM. Además, cada factor del MCM, debe estar elevado a una potencia igual a la mayor que dicho factor tenga en cualquiera de los factorizados.

factor primo

2. El MCM, no puede tener un factor que no aparezca en alguno de los multinomios factorizados.

De ese modo se tiene el siguiente método para obtener el MCM de un conjunto de multinomios:

1. Se factoriza cada uno de los multinomios.
2. Se escribe en el MCM cada uno de los diferentes factores primos de los multinomios, y luego se eleva cada factor a la mayor potencia con que aparezca en alguno de los multinomios factorizados.*

EJEMPLO 3 Determinar el MCM de $2x - 2y$, $3x + 3y$, y $x^2 - 2xy + y^2$.

Solución: Se factorizan las expresiones dadas.

$$2x - 2y = 2(x - y) \tag{1}$$
$$3x + 3y = 3(x + y) \tag{2}$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \tag{3}$$

Los factores 2, $(x - y)$, 3, $(x + y)$ son factores primos; $(x - y)$ está elevado a la segunda potencia. Por tanto, el MCM es $(2)(3)(x - y)^2(x + y) = 6(x - y)^2(x + y)$.

EJEMPLO 4 Encontrar el MCM de $x^2 - 2xy + y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - y^2$, $x^2 - 3xy + 2y^2$, y $2x^2 + 3xy + y^2$.

Solución: Se escribe factorizados cada uno de esos multinomios como se muestra a continuación.

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \tag{1}$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \tag{2}$$

* Número primo es un número que no tiene más factores que él mismo y la unidad.

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \tag{3}$$
$$x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - 2y)(x - y) \tag{4}$$
$$2x^2 + 3xy + y^2 = (2x + y)(x + y) \tag{5}$$

Los factores primos que aparecen arriba son $(x - y)$; $(x + y)$; $(x - 2y)$ y $(2x + y)$. Sin embargo, $(x - y)$ y $(x + y)$ tienen exponente 2 en el primero y en el segundo de los multinomios, respectivamente. Por tanto, el MCM es $(x - y)^2 (x + y)^2(x - 2y)(2x + y)$.

3.6 LA ADICION DE FRACCIONES

La suma de dos o más fracciones que tienen el mismo denominador es una fracción que tiene como numerador la suma de los numeradores y como denominador el mismo de las fracciones. Por ejemplo:

$$\frac{2}{7} + \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2 + 6 - 3}{7} = \frac{5}{7}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a - b} - \frac{6b}{a - b} + \frac{a + 2b}{a - b} &= \frac{2a - 6b + (a + 2b)}{a - b} \\ &= \frac{2a - 6b + a + 2b}{a - b} \\ &= \frac{3a - 4b}{a - b} \end{aligned}$$

pasos para escribir fracciones equivalentes

mínimo común denominador

Si las fracciones que van a sumarse tienen diferentes denominadores, se debe encontrar primero el MCM de los denominadores. Se transforma luego cada fracción, según un método que se explicará después, en una fracción equivalente que tiene como denominador el MCM. Se procede entonces como en los ejemplos anteriores. El MCM, de los denominadores se llama *mínimo denominador común* (MDC).

EJEMPLO 1 Para encontrar la suma indicada en

$$\frac{x^2 - 2xy}{3(x^2 - y^2)} + \frac{y}{6x - 6y} - \frac{x}{4(x + y)}$$

Solución: Se factorizan primero los denominadores y se tiene

$$\frac{x^2 - 2xy}{3(x + y)(x - y)} + \frac{y}{6(x - y)} - \frac{x}{4(x + y)}$$

Es evidente que el MCM de los denominadores es $12(x - y)(x + y)$. El siguiente paso es convertir cada una de las fracciones anteriores en una fracción equivalente que tenga ese MCM como denominador. Esta conversión se hace multiplicando la primera fracción por $\frac{4}{4}$; la segunda, por $2(x + y)/2(x + y)$, y la tercera, por $3(x - y)/3(x - y)$. Se obtiene así:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2 - 2xy}{3(x + y)(x - y)} + \frac{y}{6(x - y)} - \frac{x}{4(x + y)} \\ &= \left[\frac{x^2 - 2xy}{3(x + y)(x - y)}\right]\left(\frac{4}{4}\right) + \left[\frac{y}{6(x - y)}\right]\left[\frac{2(x + y)}{2(x + y)}\right] - \left[\frac{x}{4(x + y)}\right]\left[\frac{3(x - y)}{3(x - y)}\right] \\ &= \frac{4(x^2 - 2xy)}{12(x + y)(x - y)} + \frac{2y(x + y)}{12(x + y)(x - y)} - \frac{3x(x - y)}{12(x + y)(x - y)} \end{aligned}$$

$$= \frac{4(x^2 - 2xy) + 2y(x + y) - 3x(x - y)}{12(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{4x^2 - 8xy + 2xy + 2y^2 - 3x^2 + 3xy}{12(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{12(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{(x - 2y)(x - y)}{12(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x - 2y}{12(x + y)}$$

pasos en la adición de fracciones

El procedimiento para sumar fracciones que se ha ilustrado mediante el ejemplo anterior consiste de los siguientes pasos:

1. Se factoriza cada denominador.
2. Se encuentra el MCM de los denominadores.
3. Se multiplican los dos miembros de cada fracción por el cociente que se obtiene al dividir el MCM de los denominadores entre el denominador de la fracción considerada.
4. Se combinan los numeradores obtenidos en el paso anterior empleando para cada uno el signo colocado antes de la fracción a que pertenecía. Se escribe entonces el resultado sobre el común denominador.

Después de alguna práctica se pueden combinar los dos últimos pasos como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Efectuar la adición

$$\frac{3x - y}{(x - y)(x + y)} - \frac{x + 3y}{(x + y)(x + 2y)} - \frac{1}{(x + 2y)}$$

Solución: Los denominadores están factorizados y es evidente que el MCM de ellos es $(x - y)(x + y)(x + 2y)$. Los cocientes de este MCM entre los denominadores son: $x + 2y$; $x - y$; $(x + y)(x - y)$, respectivamente.

Se multiplican ahora cada numerador y cada denominador por el cociente señalado en el paso 3 y se combinan los productos como se dice en el paso 4. A continuación se muestran las operaciones descritas.

$$\frac{3x - y}{(x - y)(x + y)} - \frac{x + 3y}{(x + y)(x + 2y)} - \frac{1}{(x + 2y)}$$

$$= \frac{(3x - y)(x + 2y) - (x + 3y)(x - y) - (x + y)(x - y)}{(x - y)(x + y)(x + 2y)}$$

$$= \frac{(3x^2 + 5xy - 2y^2) - (x^2 + 2xy - 3y^2) - (x^2 - y^2)}{(x - y)(x + y)(x + 2y)}$$

$$= \frac{3x^2 + 5xy - 2y^2 - x^2 - 2xy + 3y^2 - x^2 + y^2}{(x - y)(x + y)(x + 2y)} \quad \textit{quitando signos y agrupando}$$

$$= \frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{(x - y)(x + y)(x + 2y)} \quad \textit{combinando términos}$$

$$= \frac{\cancel{(x + y)}\cancel{(x + 2y)}}{(x - y)\cancel{(x + y)}\cancel{(x + 2y)}} \quad \textit{cancelando factores}$$

$$= \frac{1}{x - y}$$

Una comprobación adecuada para las operaciones anteriores consiste en asignar valores numéricos a x y a y. El resultado que se obtiene al sumar las fracciones numéricas debe ser igual al valor numérico de la suma. Debe tenerse cuidado

de no asignar valores para los cuales alguno de los denominadores sea cero. (¿Por qué?) Si hacemos $x = 1$ y $y = 2$, se tiene

$$\frac{3(1) - 2}{(1 - 2)(1 + 2)} - \frac{1 + 3(2)}{(1 + 2)[1 + 2(2)]} - \frac{1}{1 + 2(2)} = \frac{1}{-3} - \frac{7}{15} - \frac{1}{5}$$
$$= \frac{-5 - 7 - 3}{15}$$
$$\frac{3(1) - 2}{(1 - 2)(1 + 2)} - \frac{1 + 3(2)}{(1 + 2)[1 + 2(2)]} - \frac{1}{1 + 2(2)} = \frac{-15}{15}$$
$$= -1$$

Cuando $x = 1$ e $y = 2$, el valor de la suma $1/(x - y)$ es $1/(1 - 2) = -1$. Ya que los dos valores son iguales, la computación parece ser adecuada.

Puesto que mucho del trabajo al sumar fracciones se presenta al encontrar los nuevos numeradores y combinarlos, el estudiante se puede olvidar de escribir el denominador en cada paso y finalmente omitirlo. Este es un error grave que debe evitarse con cuidado.

EJERCICIO 12: REDUCCION DE FRACCIONES

En los problemas 1 a 8 conviértase la fracción en una equivalente cuyo denominador sea la expresión que aparece a la derecha en cada problema.

1: $\frac{2a}{3b}$, $3bc$

2: $\frac{3x}{5y}$, $5yz$

3: $\frac{5aw}{2y}$, $6ay^2$

4: $\frac{2bx}{7a}$, $21a^3bx$

5: $\frac{x - 2}{x - 1}$, $(x - 1)(x + 2)$

6: $\frac{x + 3}{2x - 1}$, $(2x - 1)(x - 3)$

7: $\frac{2x - y}{3x + y}$, $3x^2 - 5xy - 2y^2$

8: $\frac{2x + 3y}{3x - 2y}$, $3x^2 + xy - 2y^2$

En los problemas 9 a 16 encuéntrese el MCM de los denominadores y redúzcanse luego las fracciones a un conjunto equivalente que tengan el MCM como denominador común.

9: $\frac{5a}{2c}, \frac{2ac}{3bc^2}, \frac{7ab}{6b^2c}$

10: $\frac{3a}{5bc^2}, \frac{2b}{a^2c}, \frac{c}{3b^3a}$

11: $\frac{2a}{3b^2c^3}, \frac{3b}{5a^2c}, \frac{5c}{7ab}$

12: $\frac{3ac}{4bd}, \frac{2bc}{9ad^3}, \frac{5ab}{12c^2d}$

13: $\frac{2}{x - 4}, \frac{3x}{x + 4}, \frac{x^2}{x^2 - 16}$

14: $\frac{1}{(x - 2)^2}, \frac{2}{x^2 - 4}, \frac{3}{x + 2}$

15: $\frac{a - b}{(a + b)(a + 2b)}, \frac{a + b}{(a - b)(a + 2b)}, \frac{a + 2b}{(a - b)(a + b)}$

16: $\frac{x - y}{(x + 2y)(2x + y)}, \frac{x + 2y}{(x - y)(2x + y)}, \frac{2x + y}{(x - y)(x + 2y)}$

Efectúese las operaciones indicadas en los problemas siguientes y simplifíquense los resultados.

17: $\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{1}{3}$

18: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$

19: $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} + \frac{5}{12}$

20: $\frac{1}{3} - \frac{5}{6} + \frac{13}{18}$

21: $\frac{2x}{3yz} + \frac{3y}{5xz} - \frac{5z}{7xy}$

22: $\frac{3a}{2bc} - \frac{2b}{3abc} + \frac{4c}{5a^2b}$

23: $\frac{a}{3b^2c} - \frac{2b}{9ac^2} + \frac{5c}{18a^2b}$

24: $\frac{x}{2y^2z^3} - \frac{3y}{4x^3z^0} + \frac{5z}{6xy^3}$

25: $\dfrac{2}{3t} - \dfrac{1}{2r} - \dfrac{2r - 3t}{12rs}$ 26: $\dfrac{2}{5a} - \dfrac{3}{4b} + \dfrac{7b}{20ab}$

27: $\dfrac{2}{7x} - \dfrac{3}{14y} + \dfrac{6y - x}{28xy}$ 28: $\dfrac{3}{5x} - \dfrac{2}{7y} - \dfrac{5x + 7y}{105xy}$

29: $\dfrac{a - b}{a} - \dfrac{b}{a + b} - \dfrac{b^2}{a(a + b)}$ 30: $\dfrac{s}{r} + \dfrac{s}{r - s} - \dfrac{2rs - r^2}{(r - s)r}$

31: $\dfrac{1}{x} - \dfrac{3 - 2x}{2x - 1} + \dfrac{1}{x(2x - 1)}$ 32: $\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{3x + 2} - \dfrac{2}{x(3x + 2)}$

33: $\dfrac{2x}{x^2 - 4} - \dfrac{x - 1}{x(x + 2)} - \dfrac{4x}{x(x^2 - 4)}$ 34: $\dfrac{3x}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x(x - 1)} - \dfrac{2x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}$

35: $\dfrac{10b^2 - ab}{a(a^2 - 4b^2)} - \dfrac{1}{a - 2b} + \dfrac{2}{a}$

36: $\dfrac{9x^2 - 3y^2}{(9x^2 - y^2)y} + \dfrac{1}{3x - y} - \dfrac{1}{3x + y}$

37: $\dfrac{10}{(2r - 3s)(2r + s)} + \dfrac{1}{(2r + s)(r + s)} - \dfrac{5}{(2r - 3s)(r + s)}$

38: $\dfrac{1}{(r - s)(2r - s)} + \dfrac{1}{(r - 2s)(r - s)} - \dfrac{3}{(r - 2s)(2r - s)}$

39: $\dfrac{3}{(x - 2y)(x + y)} + \dfrac{2}{(x - 2y)(x - y)} - \dfrac{2}{(x + y)(x - y)}$

40: $\dfrac{10}{(3x - y)(x - y)} - \dfrac{5}{(3x - y)(2x - y)} - \dfrac{2}{(2x - y)(x - y)}$

41: $\dfrac{9a + 8b}{(3a - 2b)(a + 4b)} - \dfrac{5a}{(3a - 2b)(a - 4b)} + \dfrac{16b}{a^2 - 16b^2}$

42: $\dfrac{2a^3 + 54b^3}{(2a - b)(a + 3b)} + \dfrac{8ab - 19b^2}{2a - b} - a - b$

43: $\dfrac{4xy + 4y^2}{(2x - y)(2x - 3y)} - \dfrac{15xy}{(x + 3y)(2x - 3y)} + \dfrac{4x + y}{2x - y}$

44: $\dfrac{3xy}{(x + y)(x - 2y)} + \dfrac{x^2 - 3xy}{(x - y)(x - 2y)} - \dfrac{4xy}{(x + y)(x - y)}$

45: $\dfrac{2r}{r^2 - s^2} - \dfrac{4rs}{(r + s)^2(r - s)} - \dfrac{r - s}{(r + s)^2}$

46: $\dfrac{y + z}{x^2 - xz - xy + yz} + \dfrac{x + z}{y^2 - yz - xy + xz} + \dfrac{x + y}{xz - yz - x^2 + xy}$

47: $\dfrac{2x^3}{x^4 + x^2y^2 + y^4} + \dfrac{2y^2}{x^3 + y^3} - \dfrac{x + y}{x^2 + xy + y^2} - \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 - y^3}$

48: $\dfrac{4}{x^4 + x^2 + 1} + \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1} - \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$

3.7 FRACCIONES COMPLEJAS

Si el numerador o el denominador de una fracción, o ambos, contienen a su vez fracciones, la fracción se llama *fracción compleja.*

$$\frac{3}{\frac{2}{5}} \qquad \frac{1 + \dfrac{x}{y}}{x + y} \qquad \frac{\dfrac{4x}{x + y} + \dfrac{2y}{x - y}}{3 - \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}$$

primer método para reducir una fracción compleja

Existen dos métodos para reducir una fracción compleja a una simple. *El primero consiste en multiplicar el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCM de cada denominador que aparezca en ella.*

EJEMPLO 1 Reducir a fracción simple

$$\frac{1 + \dfrac{x}{y}}{x + y}$$

Solución: Se observa que los denominadores de 1 y de $x + y$ son 1. Por tanto, el MCM de los denominadores de la fracción compleja es y. Por consiguiente, se multiplican por y el numerador y el denominador, y se obtiene

$$\frac{1 + \dfrac{x}{y}}{x + y} = \frac{y\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)}{y(x + y)} = \frac{y + x}{xy + y^2} = \frac{y + x}{y(x + y)} = \frac{1}{y}$$

EJEMPLO 2 Reducir la fracción compleja

$$\frac{\dfrac{2}{x + y} - \dfrac{1}{x - y}}{\dfrac{4(x - y)}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - y}}$$

a fracción simplificada.

Solución: Los denominadores son $x + y$ y $x - y$ y su MCM es $x^2 - y^2$. A continuación se indican los pasos de la simplificación.

$$\frac{\dfrac{2}{x + y} - \dfrac{1}{x - y}}{\dfrac{4(x - y)}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - y}}$$

$$= \frac{\dfrac{2}{x + y} - \dfrac{1}{x - y}}{\dfrac{4(x - y)}{x + y} - \dfrac{x + y}{x - y}} \times \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$$ *puesto que el MDC de todas las fracciones es $x^2 - y^2$*

$$= \frac{\dfrac{2}{x + y}(x^2 - y^2) - \dfrac{1}{x - y}(x^2 - y^2)}{\dfrac{4(x - y)}{x + y}(x^2 - y^2) - \dfrac{x + y}{x - y}(x^2 - y^2)}$$

$$= \frac{2(x - y) - (x + y)}{4(x - y)(x - y) - (x + y)(x + y)}$$ *efectuando las operaciones indicadas*

$$= \frac{2x - 2y - x - y}{4(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)}$$ *eliminando signos de agrupación*

$$= \frac{x - 3y}{4x^2 - 8xy + 4y^2 - x^2 - 2xy - y^2}$$

$$= \frac{x - 3y}{3x^2 - 10xy + 3y^2}$$ *factorizando el denominador*

$$= \frac{x - 3y}{(3x - y)(x - 3y)}$$

$$= \frac{1}{3x - y}$$ *dividiendo numerador y denominador entre $x - 3y$*

segundo método para reducir una fracción compleja

Si las expresiones en la fracción compleja son complicadas, resulta a veces más fácil reducir el numerador y el denominador a fracciones simples y proceder luego como en la división.

EJEMPLO 3 Reducir la fracción compleja

$$\frac{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}}{1-\dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}} \text{ a fracción simple.}$$

Solución:

$$\frac{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-y}}{1-\dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2-y^2}} = \frac{\dfrac{(x-y)^2-(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}}{\dfrac{x^2-y^2-(x^2-xy-y^2)}{x^2-y^2}} \qquad \textit{simplificando}$$

$$= \frac{\dfrac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{x^2-y^2-x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}} \qquad \textit{realizando las operaciones indicadas}$$

$$= \frac{\dfrac{-4xy}{x^2-y^2}}{\dfrac{xy}{x^2-y^2}}$$

$$= \frac{-4xy}{x^2-y^2} \times \frac{x^2-y^2}{xy} \qquad \textit{invirtiendo y multiplicando}$$

$$= -4$$

Si el numerador o el denominador de una fracción compleja, o ambos, son a su vez fracciones complejas, cada uno debe reducirse a una fracción simple como primer paso de la simplificación.

EJEMPLO 4 Reducir la fracción compleja

$$\frac{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}} \text{ a fracción simple.}$$

Solución:

$$\frac{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+1}}} = \frac{1+\dfrac{x-1}{x-1+1}}{\dfrac{x+1}{x+1-1}} \qquad \textit{los dos miembros de la fracción compleja se han multiplicado en el numerador por } x-1 \textit{ y en el denominador por } x+1$$

$$= \frac{1+\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}$$

$$= \frac{x+x-1}{x+1} \qquad \textit{se ha multiplicado el numerador y el denominador por } x$$

$$= \frac{2x-1}{x+1}$$

EJERCICIO 13. REDUCCION DE FRACCIONES COMPLEJAS

Redúzcanse a fracciones simples las fracciones complejas siguientes:

$$\frac{1+\frac{1}{3}}{2-\frac{1}{3}} \qquad \frac{3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} \qquad \frac{5+\frac{1}{7}}{3-\frac{1}{5}} \qquad \frac{3-\frac{5}{9}}{2+\frac{2}{3}}$$

5: $\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}$ 6: $\dfrac{4-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}$ 7: $\dfrac{1-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}}$ 8: $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

9: $\dfrac{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$ 10: $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$ 11: $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}$

12: $\dfrac{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$ 13: $\dfrac{1-\dfrac{b}{2a-3b}}{1+\dfrac{b}{a-3b}}$ 14: $\dfrac{1-\dfrac{2b}{a-b}}{2-\dfrac{a+b}{a-b}}$

15: $\dfrac{3-\dfrac{x+3y}{x+y}}{1+\dfrac{y}{x-y}}$ 16: $\dfrac{2+\dfrac{3b}{a-2b}}{1+\dfrac{a}{a-b}}$ 17: $\dfrac{x+1+\dfrac{x+1}{x-1}}{x-\dfrac{2}{x-1}}$

18: $\dfrac{x+2-\dfrac{2}{x-1}}{x-1-\dfrac{2}{x+2}}$ 19: $\dfrac{2a-1+\dfrac{8a}{2a-1}}{2a+3+\dfrac{4}{2a-1}}$ 20: $\dfrac{x-\dfrac{2}{2x+3}}{x+1-\dfrac{3}{2x+1}}$

21: $\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{2}+\dfrac{2x+3}{x+1}}$ 22: $\dfrac{x-\dfrac{4x-3}{2x-1}}{2x-\dfrac{x-3}{x-2}}$ 23: $\dfrac{3x+\dfrac{x-5}{x-1}}{x-\dfrac{5}{3x-2}}$

24: $\dfrac{3x+\dfrac{x-1}{x-1}}{3x-\dfrac{2x-1}{x+2}}$ 25: $\dfrac{a-\dfrac{2}{a-1}}{\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{2}{(a-1)^2}}$ 26: $\dfrac{1+\dfrac{4b}{a-b}}{3+\dfrac{8ab}{a^2-b^2}}$

27: $\dfrac{\dfrac{1}{x-y}}{1+\dfrac{xy+2y^2}{x^2-y^2}}$ 28: $\dfrac{\dfrac{1}{3x-2y}+\dfrac{1}{2x+3y}}{\dfrac{2x+3y}{3x-2y}+1}$ 29: $\dfrac{\dfrac{a}{b}-1}{\dfrac{a}{b}-2+\dfrac{2}{1+\dfrac{b}{a}}}$

30: $\dfrac{2-\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}-1}}{\dfrac{2}{1+\dfrac{y}{x}}-\dfrac{3}{\dfrac{x}{y}+1}}$ 31: $\dfrac{a-\dfrac{b}{1-\dfrac{a}{a+b}}}{1+\dfrac{b}{a-b}}$ 32: $\dfrac{\dfrac{1}{x^3+y^3}}{1-\dfrac{x}{x+\dfrac{y^2}{x-y}}}$

EJERCICIO 14: OPERACIONES CON FRACCIONES

En los problemas 1 a 12 conviértase la fracción en una equivalente cuyo denominador sea la expresión que aparece a la derecha de cada problema. Evite presentar el resultado en forma de factores.

1: $\frac{2}{5}$, 10 2: $\frac{3}{7}$, 21 3: $\frac{6}{9}$, 3 4: $\frac{36}{24}$, 8

5: $\dfrac{2ab}{c}$, $3abc^2$ 6: $\dfrac{4x^2y}{z^3}$, $5x^2yz^3$

7: $\dfrac{x-1}{x-2}$, x^2-4 8: $\dfrac{x-4}{x+3}$, x^2-9

9: $\dfrac{2x-3}{x-2}$, $2x^2-7x+6$ 10: $\dfrac{3x-1}{x+3}$, $3x^2+10x+3$

11: $\dfrac{x-3}{x^2-x+1}$, x^3+1 12: $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$, x^4+x^2+1

Redúzcanse a su mínima expresión las fracciones de los problemas 13 a 26.

13: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

14: $\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 + 7x + 3}$

15: $\dfrac{(2a - b)(a^2 - 3ab + 2b^2)}{(a + 2b)(2a^2 - 3ab + b^2)}$

16: $\dfrac{(a - 3b)(a^2 + 5ab + 6b^2)}{(a^2 - ab - 6b^2)(a + b)}$

17: $\dfrac{ab + ay - bx - xy}{ab - ay - bx + xy}$

18: $\dfrac{2ax - 4bx + 2by - ay}{ax - 2ay - 2bx + 4by}$

19: $\dfrac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3}$

20: $\dfrac{a^4 - 16}{a^3 + 8}$

21: $\dfrac{a^6 - b^6}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$

22: $\dfrac{(3x + 7)x + 2}{(3x - 4)(x + 2)}$

23: $\dfrac{(2x + 3)x - 5}{(2x + 3)(x - 1)}$

24: $\dfrac{x - 3}{(2x - 5)x - 3}$

25: $\dfrac{(2x - 3)(x + 3)}{(2x - 3)x + 2(2x - 3) + 4x + 3}$

26: $\dfrac{(2x - 1)(x - 2)}{(2x - 1)x - 2(2x - 1) - 2(x - 2)}$

Efectúense las multiplicaciones y divisiones indicadas en los problemas 27 a 50.

27: $\dfrac{2a^2b}{21ab^3} \times \dfrac{7a^3b^2}{6a^2b^3}$

28: $\dfrac{15x^2y^3}{12x^0y} \times \dfrac{14x^4y^2}{35x^3y}$

29: $\dfrac{13x^3y^4}{17xy^0} \div \dfrac{26x^2y}{51xy^2}$

30: $\dfrac{8x^3y^4}{14x^2y} \div \dfrac{6xy^3}{7x^2y^2}$

31: $\dfrac{6ax}{14bx^2} \times \dfrac{7b^2x}{3a^3x^3} \div \dfrac{15a^3x^2}{35a^0b}$

32: $\dfrac{10a^2y^3}{14ax} \times \dfrac{7w^0x^2}{15a^3y} \div \dfrac{35ax}{21c^2y}$

33: $\dfrac{x - 3y}{2x + 6y} \times \dfrac{x + 3y}{3x - 9y}$

34: $\dfrac{a + 2x}{a + 3x} \times \dfrac{3a + 9x}{4a + 8x}$

35: $\dfrac{a^2 - 4}{x + 3} \div (3a - 6)$

36: $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2x} \div \dfrac{x^2 - 9}{x}$

37: $\dfrac{2x(x - 3y)^2}{3y^2} \times \dfrac{y(x + 3y)}{4x^2y^2} \times \dfrac{18x^3y}{x^2 - 9y^2}$

38: $\dfrac{5s^2(2t + 3)^2}{8t(3t + 2)} \times \dfrac{6(2t - 3)}{7s^3t^2} \times \dfrac{14s^0t}{15(4t^2 - 9)^2}$

39: $\dfrac{x^2 - 5x}{a^2 + 3a} \times \dfrac{a^2x + 3ax}{x^2 - 25} \div \dfrac{ax}{2ax + 10a}$

40: $\dfrac{3x + x^2}{b^2 - b} \times \dfrac{b^2x^2 - bx^2}{9 - x^2} \div \dfrac{3x^3}{6 - 2x}$

41: $\dfrac{6x^2 - x - 1}{4x^2 + 4x - 3} \times \dfrac{2x^2 + x - 3}{3x^2 + 7x + 2}$

42: $\dfrac{6x^2 - 17x + 5}{2x^2 - 11x + 15} \times \dfrac{4x^2 - 11x - 3}{3x^2 + 11x - 4}$

43: $\dfrac{3a^2 + 10ab + 3b^2}{2a^2 + 5ab - 3b^2} \times \dfrac{4a^2 + 12ab + 9b^2}{6a^2 + 11ab + 3b^2} \times \dfrac{2a - b}{a + 3b}$

44: $\dfrac{a^2 + ab - 2b^2}{2a^2 + 7ab + 3b^2} \times \dfrac{2a^2 + 5ab - 3b^2}{a^2 + 3ab + 2b^2} \times \dfrac{a + b}{2a - b}$

45: $\dfrac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - x - 3} \times \dfrac{6x^2 - 7x - 3}{x^2 + 2x - 3} \div \dfrac{2x + 3}{x + 3}$

46: $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{2x^2 + 5x + 2} \times \dfrac{4x^2 - 1}{3x^2 - 7x + 2} \div \dfrac{2x - 1}{3x - 1}$

47: $\dfrac{a(a - 1) - 4(a - 1) + 2}{(a - 1)(a - 2)}$

48: $\dfrac{(2x - 5)x + 3}{(2x - 5)(x - 1)}$

$$49:\ \frac{(x-3)3x+1(x+5)}{(3x+1)(x-3)}\times\frac{(x-1)6x-1(x+3)}{(x-1)(3x-5)}$$

$$50:\ \frac{(x+1)2x+1(x-5)}{(x-3)x+2}\div\frac{(x+1)2x+5(x+1)}{(x-3)(x+1)}$$

En los problemas 51 a 54 redúzcanse al conjunto de fracciones dadas a otro conjunto equivalente cuyo denominador sea el MDC.

51: $\frac{2b}{3a}, \frac{5ba}{2cb}, \frac{3ac^2}{7a^2b}$

52: $\frac{3xy}{4w}, \frac{4w}{3xy}, \frac{2x^2y}{6x^2yw^3}$

$$53:\ \frac{x+y}{(x+2y)(x-3y)}, \frac{x+2y}{(x+y)(x-3y)}, \frac{x-3y}{(x+y)(x+2y)}$$

$$54:\ \frac{2r-s}{(2s-r)(s+3r)}, \frac{2s-r}{(2r-s)(s+3r)}, \frac{s+3r}{(2r-s)(2s-r)}$$

Efectúese las sumas indicadas en los problemas 55 a 66 y simplifíquese el resultado a su mínima expresión.

55: $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$

56: $\frac{3}{8}-\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$

57: $\frac{2a}{5bc}-\frac{3b}{4ac}+\frac{c}{2ab}$

58: $\frac{3a}{2b^2c}-\frac{2b}{3ac^2}+\frac{3c}{5a^2b}$

59: $\frac{3}{5x}-\frac{1}{2y}-\frac{6y-3x}{10xy}$

60: $\frac{2}{3x}-\frac{3}{4y}-\frac{8y-11x}{12xy}$

61: $\frac{3}{x}-\frac{2-3x}{3x-1}+\frac{1-2x}{x(3x-1)}$

62: $\frac{2x}{x^2-1}-\frac{x+3}{x(x-1)}+\frac{7x+5}{x(x^2-1)}$

$$63:\ \frac{1}{(x-y)(x-2y)}+\frac{4}{(x-y)(x+3y)}-\frac{4}{(x-2y)(x+3y)}$$

$$64:\ \frac{1}{(x+y)(x+2y)}-\frac{1}{(x+2y)(x+3y)}+\frac{2}{(x+y)(x+3y)}$$

$$65:\ \frac{x-y}{(2x+y)(x-3y)}+\frac{x-2y}{(2x-y)(x-3y)}+\frac{6xy}{(2x+y)(2x-y)(x-3y)}$$

$$66:\ \frac{5x+y}{4x^2-y^2}+\frac{5x-3y}{2x^2+5xy+2y^2}-\frac{3x+3y}{2x^2+3xy-2y^2}$$

Simplifíquense las fracciones complejas siguientes.

67: $\dfrac{2+\frac{3}{5}}{3+\frac{1}{4}}$

68: $\dfrac{5+\frac{2}{3}}{4-\frac{3}{5}}$

69: $\dfrac{3+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$

70: $\dfrac{2-\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}}$

71: $\dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}$

72: $\dfrac{2-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}}{2+\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}}$

73: $\dfrac{1-\frac{4}{x^2}}{3-\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}}$

74: $\dfrac{x+3+\frac{5}{x-2}}{x-2+\frac{5}{x+3}}$

75: $\dfrac{2x-1+\frac{3}{x-4}}{x-4+\frac{3}{2x-1}}$

76: $\dfrac{x+1-\frac{4}{x-2}}{x+3+\frac{1}{x+1}}$

77: $\dfrac{x+3+\frac{1}{x+5}}{x-7+\frac{11}{x+5}}$

78: $\dfrac{\frac{1}{2x-5y}+\frac{1}{3x+y}}{\frac{2x-5y}{3x+y}+1}$

79: $\dfrac{3-\frac{y}{x-y}}{\frac{3}{1+\frac{x}{y}}-\frac{2}{\frac{y}{x}+1}}$

80: $\dfrac{1+\frac{x}{y-x}}{y-\frac{x}{1-\frac{y}{y+x}}}$

4 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

UNA PROPOSICIÓN DEL TIPO

$$3x - 6 = 2x + 1 \tag{4.1}$$

se llama ecuación. La ecuación se caracteriza por contener algunos números de valor conocido y otros de valor desconocido. Unos y otros se relacionan entre sí de acuerdo con los signos de las operaciones matemáticas. Dicho de otro modo, una *ecuación* es la proposición de que dos expresiones son iguales. Las dos expresiones se llaman *miembros* de la ecuación. El miembro que aparece a la izquierda del signo de igualdad se llama *primer miembro* y el que aparece a la derecha del signo de igualdad se llama *segundo miembro*. La ecuación es una de las herramientas más poderosas del álgebra y puede, sin exageración, decirse que sin su ayuda ni las ciencias físicas ni la ingeniería hubieran podido llegar a su estado actual. A través del planteamiento y de la resolución de ecuaciones se puede determinar, por ejemplo, el número de espirales que constituyen la bobina de un motor, el tamaño de las vigas I necesarias para la construcción de un puente, y el tiempo y la dirección en que deben lanzarse un satélite para situarlo en una órbita deseada. A lo largo de este capítulo se indicarán los métodos para establecer algunas ecuaciones sencillas y su uso para resolver ciertos problemas de aplicación práctica.

ecuación

primer miembro

segundo miembro

4.1 TIPOS DE ECUACIONES

Una ecuación es un medio auxiliar de encontrar la respuesta a una pregunta. En la ecuación (4.1) la pregunta es: ¿Para qué valor de x es verdadera esta proposición? Podemos comprobar fácilmente que esta proposición es verdadera para $x = 7$ y que no lo es para cualquier otro

valor de x. Por otra parte, algunas ecuaciones son válidas para todos los valores de las letras que contienen. Por ejemplo, $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ es válida para todo valor de x, como puede comprobarse al multiplicar los factores del miembro de la izquierda.

identidad

Las ecuaciones que son válidas para todos los valores posibles* de las letras que contienen, se llaman *identidades*. En este libro no se emplearán mucho las identidades, excepto para registrar los resultados de fórmulas, como se hizo en el capítulo III.

ecuación condicional

Las ecuaciones que son válidas para algunos valores de sus letras, pero que no lo son para otros, se llaman *ecuaciones condicionales*. En lo sucesivo, y a menos que se indique otra cosa, se empleará la palabra *ecuación* para referirse a ecuaciones condicionales. Tales ecuaciones se usan en la resolución de problemas y el interés principal con respecto a ellas será la obtención de los valores de las letras para los cuales la ecuación es una proposición válida.

solución

raíz

Cualquier conjunto de números que al sustituir letras de valor no conocido en la ecuación hacen a los miembros de ésta iguales, se llama *solución* de la ecuación. Si la ecuación contiene sólo una incógnita, cada solución se llama *raíz*. El procedimiento para obtener las raíces se llama resolución de la ecuación. Por ejemplo $x = 2$, $y = -3$ es una solución de $3x + 4y = 6$; ya que $3(2) + 4(-3) = -6$. También $x = 6$ es una raíz de $2x + 2 = 3x - 4$; ya que $2(6) + 2 = 3(6) - 4$.

4.2 ECUACIONES EQUIVALENTES

En la resolución de ecuaciones consideraremos el concepto de ecuaciones equivalentes como se define a continuación.

ecuación equivalente

Dos ecuaciones son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones. Por ejemplo, por sustitución directa se puede comprobar que $x = 3$ es una solución de $4x - 2 = 3x + 1$ y de $7x = 6x + 3$. Por tanto, ambas ecuaciones son equivalentes.

Evidentemente, si se agrega la misma cantidad a dos expresiones que son iguales para el mismo valor de la incógnita, o si se multiplican o se dividen las dos expresiones por una misma constante† diferente de cero, se obtienen dos nuevas expresiones que son iguales para el mismo

* Un valor posible de una letra en una ecuación cualquiera es cualquier valor para el cual los miembros de la ecuación tienen un significado. Por ejemplo, en la ecuación

$$\frac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \frac{2}{x + 1}$$

los denominadores se anulan cuando $x = -1$. Por tanto, no existe un valor para ninguno de los miembros. Sin embargo, la ecuación se satisface para cualquier otro valor de x, como puede comprobarse fácilmente al reducir el miembro de la derecha a una sola fracción. Por tanto, la ecuación es una identidad para cualquier valor de x diferente de -1.

† Por el momento se definirá a la constante como un número o una expresión que no comprende a la incógnita. Más adelante se dará una definición más completa.

valor de la incógnita. Por tanto, cada una de las siguientes operaciones que se efectúen en una ecuación da por resultado una ecuación equivalente.

1. *Si se agrega la misma cantidad a cada miembro de una ecuación, la ecuación resultante es equivalente a la primera.*

reglas para obtener ecuaciones equivalentes

2. *Si se multiplica o se divide cada miembro de una ecuación por una misma constante diferente de cero la ecuación obtenida es equivalente a la primera.*

Mediante el uso de la operación 1 se puede obtener un procedimiento extremadamente útil para la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, considérese la ecuación

$$ax - b = cx + d \tag{4.2}$$

si se agrega $b - cx$ a cada miembro de la ecuación, se obtiene

$$ax - b + b - cx = cx + d + b - cx$$

Sumando en cada miembro

$$ax - cx = d + b \tag{4.3}$$

de acuerdo con 1 esta ecuación es equivalente a (4.2). Comparando (4.2) y (4.3), se observa que la última puede obtenerse de la primera con sólo trasladar cx y $-b$ de uno a otro de los miembros de (4.2) y cambiar sus signos al mismo tiempo. Este procedimiento se llama *transposición*. Mediante su uso se puede transponer cualquier término de un miembro a otro de una ecuación, *con tal de que se cambie el signo de cada término transpuesto.**

transposición

4.3 SOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Si en una ecuación no hay fracciones en cuyos denominadores aparezca la incógnita y si ésta es de primer grado, la ecuación se llama *ecuación de primer grado.*

ecuación lineal

Se puede resolver una ecuación del tipo anterior mediante la transposición de los términos que contienen la incógnita al lado izquierdo de la igualdad y los términos constantes a la derecha. Luego, sumando los términos, se obtienen una ecuación del tipo $ax = b$. Por último, el valor de x se obtiene dividiendo ambos miembros entre a.

EJEMPLO Resolver la ecuación $6x - 7 = 2x + 1$

Solución:

$6x - 7 = 2x + 1$ — *la ecuación dada se ha transpuesto $2x$ a*
$6x - 2x = 1 + 7$ — *la izquierda y -7 a la derecha*

* Es importante recordar que la transposición es, por decirlo así, un atajo en las operaciones algebraicas. Por ello, efectuarla de una manera demasiado mecánica, puede conducir a errores serios. Cuando ese sea el caso, el lector deberá resolver nuevamente todo el problema sin omitir ninguno de sus pasos a fin de localizar la fuente de error.

$4x = 8$	*se ha sumado*
$x = 2$	*se ha dividido cada miembro entre 4*

A fin de comprobar la solución se sustituye x por 2 en la ecuación y se computa el valor de cada miembro. Si los dos valores así obtenidos son iguales, la solución es la correcta. A continuación se muestra una ordenación adecuada para la comprobación.

miembro de la izquierda	*miembro de la derecha*
$6(2) - 7 = 12 - 7 = 5$	$2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$

Por tanto $x = 2$ es el valor correcto

4.4 ECUACIONES QUE COMPRENDEN FRACCIONES

Si una ecuación comprende fracciones se multiplica cada miembro por el MCM de los denominadores, y mediante ello se obtiene una ecuación sin las fracciones. Este procedimiento se conoce como *eliminación de fracciones de la ecuación.* Si la ecuación resultante es de primer grado, se puede resolver por los métodos del párrafo anterior. En los dos ejemplos siguientes se ilustrará este procedimiento:

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación: $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$.

Solución:

$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{12}$	
$12(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}) = 12(\frac{3}{4}x + \frac{1}{12})$	*se ha multiplicado cada miembro por 12, MCM de los denominadores*
$6x - 8 = 9x + 1$	*se ha efectuado la multiplicación indicada*
$6x - 9x = 1 + 8$	*se han transpuesto 9x y −8*
$-3x = 9$	*se ha sumado*
$x = -3$	*se ha dividido cada miembro entre −3*

Comprobación:

miembro de la izquierda

$$\tfrac{1}{2}(-3) - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{3}{2} - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{9}{6} - \tfrac{4}{6} = -\tfrac{13}{6}$$

miembro de la derecha

$$\tfrac{3}{4}(-3) + \tfrac{1}{12} = -\tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{12} = -\tfrac{27}{12} + \tfrac{1}{12} = -\tfrac{26}{12} = -\tfrac{13}{6}$$

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}$$

Solución:

$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}$	*se han multiplicado ambos miembros por el MCM de los denominadores*
$8(x+1)\left(\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8}\right) = 8(x+1)\left[\frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\right]$	
$8x + 5(x+1) = 4(5) + 6(x+1)$	*se ha efectuado la multiplicación indicada*

$$\begin{aligned} 8x + 5x + 5 &= 20 + 6x + 6 \\ 8x + 5x - 6x &= 20 + 6 - 5 \\ 7x &= 21 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

se han transpuesto términos
se ha sumado
se ha dividido entre 7

Comprobación:

miembro de la izquierda

$$\frac{3}{3+1} + \frac{5}{8} = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$$

miembro de la derecha

$$\frac{5}{2(3+1)} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8}$$

Si los denominadores de una ecuación contienen a la incógnita, la ecuación obtenida al eliminar las fracciones no siempre es equivalente a la primera. Esta situación se ilustra en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación: $\dfrac{2}{x+1} - 3 = \dfrac{4x+6}{x+1}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} - 3 &= \frac{4x+6}{x+1} \\ (x+1)\left(\frac{2}{x+1} - 3\right) &= (x+1)\left(\frac{4x+6}{x+1}\right) \\ 2 - 3(x+1) &= 4x + 6 \\ 2 - 3x - 3 &= 4x + 6 \\ -3x - 4x &= 6 - 2 + 3 \\ -7x &= 7 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

se han eliminado fracciones multiplicado por x + 1, MCM de los denominadores

Comprobación:

Cuando se intenta verificar esta solución, se observa que si $x = -1$, los dos denominadores de la ecuación original se anulan y, por tanto, las fracciones carecen de significado. Por consiguiente, no se puede aceptar $x = -1$ como solución. Si se efectúa la división indicada $(4x + 6)/(x + 1)$, se obtiene $4 + 2/(x + 1)$. Entonces la ecuación original se convierte en:

$$\frac{2}{x+1} - 3 = 4 + \frac{2}{x+1}$$

la que evidentemente no tiene solución.

El anterior ejemplo muestra que si se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión que contenga a la incógnita, la ecuación resultante puede tener raíces que no satisfagan a la ecuación original. Dichas raíces se llaman *extrañas*. Por esta razón, cuando una ecuación se multiplica por una expresión que contiene a la incógnita con el propósito de eliminar fracciones, las soluciones de la ecuación obtenida se deben computar en la ecuación original con el fin de observar si alguna de ellas es extraña.

raíces extrañas

EJEMPLO 4 Resolver la ecuación: $\dfrac{a-x}{a+x} + \dfrac{a}{x} = -1$.

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{a-x}{a+x} + \frac{a}{x} &= -1 \\ x(a-x) + a(a+x) &= -x(a+x) \end{aligned}$$

se han eliminado las fracciones

$$ax - x^2 + a^2 + ax = -ax - x^2$$ *se han efectuado las operaciones indicadas*

$$-x^2 + x^2 + ax + ax + ax = -a^2$$ *se han transpuesto y ordenado los términos*

$$3ax = -a^2$$ *se ha efectuado la suma indicada*

$$x = -\frac{a^2}{3a}$$

$$x = -\frac{a}{3}$$

Comprobación:

miembro de la izquierda

$$\frac{a + \frac{a}{3}}{a - \frac{a}{3}} + \frac{a}{-\frac{a}{3}} = \frac{3a + a}{3a - a} - \frac{3a}{a} = \frac{4a}{2a} - 3 = 2 - 3 = -1$$

Por tanto, ya que el miembro de la derecha es -1, la solución es correcta.

EJERCICIO 15. RESOLUCION DE ECUACIONES

Demuéstrese, mediante sustitución directa, que el número dado a la derecha en los problemas 1 a 12 es una raíz de la ecuación propuesta en cada problema.

1: $3x - 2 = 2x + 1,\ 3$

2: $9x - 2 = 12x + 4,\ -2$

3: $6x + 3 = 18x - 1,\ \frac{1}{3}$

4: $20x + 5 = 29 - 12x,\ \frac{3}{4}$

5: $\frac{3x - 4}{4} - \frac{2x - 1}{3} = -\frac{1}{6},\ 6$

6: $\frac{2x - 4}{2} + \frac{x + 3}{4} = x - 5,\ -15$

7: $\frac{2x + 1}{4} + \frac{x}{3} = \frac{18x - 24}{2},\ \frac{3}{2}$

8: $\frac{3x + 2}{6x - 2} + 1 = \frac{5}{x + 1},\ \frac{2}{3}$

9: $mx + na - nx = ma,\ a$

10: $a^2x - b = 2a^2x - a - b,\ 1/a$

11: $\frac{a - x}{b} + \frac{b}{a} = \frac{x - 2a}{a},\ b + a$

12: $\frac{ax + b}{b + x} - 1 = \frac{1 - x}{b + x},\ \frac{1}{a}$

Resuélvanse las ecuaciones de los problemas 13 a 72.

13: $4x = x + 9$

14: $7x + 2 = 3x + 14$

15: $9x - 4 = 3x - 16$

16: $7x - 2 = 2x + 1$

17: $3x - 2 = 5x + 6$

18: $7x - 5 = 4 + 4x$

19: $3x - 3 = 2 - 7x$

20: $7 - 4x = x - 3$

21: $2(x + 1) - (x - 1) = 0$

22: $3(3x - 1) + 4(9 - 5x) = 0$

23: $6(4x - 7) - 5(2x + 5) = 3$

24: $4(3x - 1) = -7(-2x + 3) + 5$

25: $2(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(3x - 7)$

26: $4(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(4x + 12) = 4$

27: $3(\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}) - \frac{3}{4}(2x + 18) = -4$

28: $6(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}) + 8(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}) = 5x + 4$

29: $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x = x - \frac{5}{4}$

30: $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

31: $\frac{5}{6}x + \frac{7}{9} - \frac{2}{3}x = \frac{2}{9}x - \frac{5}{9}$

32: $\frac{5}{6}x - \frac{7}{9}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{8}{9}$

33: $\frac{3}{5}x - 5 = \frac{1}{2}x - 4$

34: $\frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{2}x - 1$

35: $\frac{1}{5}x + 1 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

36: $\frac{5}{7}x - 1 = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

37: $ax + \frac{b}{a} = bx + 1$

38: $a(x - 1) = b(a - x) - a$

39: $a(x - 2) - b(x - 1) = b - a$

40: $a(x - 2) = b(x + 1) - a$

41: $\frac{2x + 1}{3} = 3x - 16$

42: $\frac{4x + 6}{6} = 12 - 3x$

43: $\frac{3x + 5}{5} = 2x - 6$

44: $\frac{3x - 2}{4} + 3 = x - \frac{1}{2}$

45: $\frac{2x - 3}{3} + 4 = \frac{3x - 4}{2}$

46: $\frac{3x + 5}{4} - \frac{2x - 3}{3} = 3$

47: $\frac{x + 4}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2x - 2}{3}$

48: $\frac{2x - 1}{3} - \frac{3x - 2}{4} = -\frac{11}{12}$

49: $\dfrac{4x+3}{6}+\dfrac{3x+1}{4}=2x-1$

50: $\dfrac{5x-2}{6}+\dfrac{4x+2}{9}=2x-3$

51: $\dfrac{6x-5}{3}+\dfrac{4x-1}{2}=3x-\dfrac{1}{6}$

52: $\dfrac{5x+7}{6}-\dfrac{x-1}{4}=x-\dfrac{2}{3}$

53: $\dfrac{bx+a}{a}+\dfrac{bx-a}{b}=2$

54: $\dfrac{cx+d^2}{d}-c=\dfrac{4dx-cd}{c}$

55: $\dfrac{rx}{s}-\dfrac{sx}{r}=r-s$

56: $p+p^2x=q^2x-q$

57: $\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{x-2}{x+8}$

58: $\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{x+4}{x-1}$

59: $\dfrac{2x-5}{4x-1}=\dfrac{3x-4}{6x+9}$

60: $\dfrac{6x-8}{9x+8}=\dfrac{2x-3}{3x+2}$

61: $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{10}{(x-3)(x-1)}$

62: $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{10}{(x+1)(x-4)}$

63: $\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{6}{x^2-7x+12}$

64: $\dfrac{5}{x-4}-\dfrac{3}{x-5}=\dfrac{5}{x^2-9x+20}$

65: $\dfrac{4}{x+4}+\dfrac{6}{2x+3}=\dfrac{-6}{2x^2+11x+12}$

66: $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{2x-3}=\dfrac{6}{2x^2-7x+6}$

67: $\dfrac{5}{x+5}+\dfrac{6}{2x+5}=\dfrac{-9}{2x^2+15x+25}$

68: $\dfrac{3}{2x-1}-\dfrac{5}{4x-2}=\dfrac{3}{8x^2-8x+2}$

69: $\dfrac{3}{x+3}-\dfrac{2}{2x-5}=\dfrac{6}{3x-13}$

70: $\dfrac{3}{3x-5}-\dfrac{1}{2x-3}=\dfrac{2}{4x-7}$

71: $\dfrac{4}{2x-3}+\dfrac{5}{5x-11}=\dfrac{3}{x-5}$

72: $\dfrac{4}{3x-1}-\dfrac{3}{2x-1}=\dfrac{-1}{6x-5}$

Demuéstrense que las ecuaciones de los problemas 73 a 80 no tienen solución.

73: $\dfrac{2x-4}{x-3}=3+\dfrac{2}{x-3}$

74: $\dfrac{3x-7}{x-4}+4=\dfrac{5}{x-4}$

75: $\dfrac{3}{x^2-4}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}$

76: $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{7}{x^2-x-6}$

77: $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{x-1}{x-3}+\dfrac{x^2-2x-1}{(x-2)(x-3)}$

78: $\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-3}=\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x^2-3x-8}{(x-3)(x+1)}$

79: $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}$

80: $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{x-2}{(x+1)(x+2)}$

Resuélvanse las ecuaciones de los problemas 81 a 92 para la letra indicada a la derecha.

81: $m=\dfrac{3}{n-a}$, a

82: $1=\dfrac{3(d+b)}{2+d}$, b

83: $S = \dfrac{lr - a}{r - 1}$, r

84: $S = vt + \frac{1}{2}at^2$, a

85: $L_2 = L_1(1 + \alpha t)$, t

86: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$, b

87: $P = \dfrac{W}{2gt}(v_1^2 - v_2^2)$, t

88: $p = \dfrac{fV}{V - S}$, S

89: $v = \dfrac{1}{hc}(E_1 - E_2)$, h

90: $E = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - \dfrac{e^2}{s}$, m

91: $M = \dfrac{L}{F}\left(\dfrac{25}{f} + 1\right)$, f

92: $\dfrac{F}{x} = -4\pi^2n^2\dfrac{W}{g}$, x

4.5 SOLUCION DE PROBLEMAS MEDIANTE EL USO DE ECUACIONES

Un problema que se puede resolver mediante una ecuación comprende varias cantidades de las cuales unas son conocidas y otras desconocidas. Igualmente contiene datos que permiten observar la igualdad entre dos combinaciones de esas cantidades. Si el problema se puede resolver mediante una ecuación de una variable, entonces las cantidades desconocidas deben expresarse en términos de una sola letra.

El procedimiento para resolver un problema mediante el uso de una ecuación no siempre es fácil y para lograr cierta aptitud se requiere una práctica considerable. Para ello se sugiere el siguiente esquema:

1. Leer cuidadosamente el problema y estudiarlo hasta que quede perfectamente clara la situación que plantea.
2. Identificar las cantidades comprendidas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.
3. Elegir una de las cantidades desconocidas y representarla mediante una letra, generalmente x. Después, expresar las otras cantidades desconocidas en términos de esta letra.
4. Buscar en el problema los datos que indiquen qué cantidades o qué combinaciones de éstas son iguales.
5. Formular la ecuación, igualando las cantidades o combinaciones apropiadas encontradas en el paso anterior.
6. Resolver la ecuación obtenida y comprobar la solución.

A continuación se expondrán algunos ejemplos de los varios tipos de problemas que pueden resolverse mediante el uso de ecuaciones. El procedimiento general que se explica en esos ejemplos se puede aplicar a los problemas similares que se presentan en el ejercicio 16 y a todos los ejercicios que aparezcan en este libro y que comprendan el planteo de problemas.

Problemas que implican movimiento a velocidad uniforme. Generalmente los problemas de este tipo establecen una relación entre distancias recorridas, entre velocidades o entre tiempos empleados. La fórmula fundamental para estos problemas es

$$d = vt \tag{4.4}$$

en donde d representa la distancia; v, la velocidad y t el tiempo. Esta

fórmula se puede resolver para v o para t y obtener las dos fórmulas adicionales siguientes:

$$v = \frac{d}{t} \tag{4.5}$$

y

$$t = \frac{d}{v} \tag{4.6}$$

EJEMPLO 1 Un grupo de deportistas efectúan un recorrido de 380 km. en siete horas durante una expedición de caza. Durante cuatro horas viajan a lo largo de una carretera pavimentada y el resto del tiempo por un camino de herradura. Si la velocidad media en el camino de herradura es 25 km/hr menor que la velocidad media en la carretera, encuéntrese la velocidad media y la distancia recorrida en cada uno de aquellos tramos de camino.

Solución: Las cantidades desconocidas en el problema son las dos velocidades y la distancia en cada tramo del camino. Las cantidades conocidas son la distancia total, 380 km; el tiempo total, siete horas; el tiempo empleado en la carretera, cuatro horas, y la cantidad en la cual la velocidad en la carretera es mayor que la velocidad en el camino de herradura, 25 km/hr. Evidentemente, el tiempo empleado en el camino de herradura fue de siete horas — cuatro horas = tres horas, y la distancia total es igual a la suma de las distancias recorridas en cada tramo.

Si hacemos

$$x = \text{velocidad en la carretera}$$

entonces

$$x - 25 = \text{velocidad en el camino de herradura}$$

Además,

$$\begin{aligned} 4x &= \text{distancia recorrida en la carretera} \\ 3(x - 25) &= \text{distancia recorrida en el camino de herradura} \end{aligned}$$

y

$4x + 3(x - 25) =$ distancia total.

Por tanto,

$$4x + 3(x - 25) = 380$$

Esta es la ecuación deseada y se puede resolver como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} 4x + 3x - 75 &= 380 && \textit{se han eliminado los paréntesis} \\ 4x + 3x &= 380 + 75 && \textit{se han transpuesto los términos} \\ 7x &= 455 && \textit{se han efectuado las sumas} \\ x &= 65 \ \textit{km/hr en la carretera} \\ x - 25 &= 40 \ \textit{km/hr en el camino de herradura} \\ 4(65) &= 260 \ \textit{kms. recorridos en la carretera} \\ 3(40) &= 120 \ \textit{kms. recorridos en el camino de herradura} \end{aligned}$$

Comprobación: $260 + 120 = 380$

EJEMPLO 2 Tres aeropuertos, A, B y C están situados a lo largo de una línea norte-sur. B está a 645 km al norte A y C están a 540 km al norte de B. Un piloto vuela de A a B,

descansa en B dos horas y luego continúa hasta C. Durante la primera parte del viaje soplaba viento del sur a la velocidad de 15 km/hr; sin embargo, durante el tiempo de descanso el viento cambió de dirección proviniendo después del norte a la velocidad de 20 km/hr. Si el piloto empleó igual tiempo en cada parte del recorrido, encuéntrese la velocidad relativa del avión con respecto al aire (o velocidad debida a la hélice).

Solución: En este problema las cantidades desconocidas son la velocidad del avión con respecto al aire y el tiempo empleado en cada parte del viaje. Se sabe sin embargo, que estas dos últimas cantidades son iguales. Las cantidades conocidas son las dos distancias y las dos velocidades del viento.

Si hacemos

$$\begin{aligned} x &= \text{velocidad relativa del avión con respecto al aire} \\ x + 15 &= \text{velocidad del avión entre } A \text{ y } B \\ x - 20 &= \text{velocidad del avión entre } B \text{ y } C \end{aligned}$$

Además,

$$\frac{645}{x+15} = \text{tiempo empleado durante la primera parte del viaje}$$

$$\frac{540}{x-20} = \text{tiempo empleado durante la segunda parte del viaje}$$

Por tanto,

$$\frac{645}{x+15} = \frac{540}{x-20}$$

Esta es la ecuación deseada cuya solución se muestra en seguida.

$$\begin{aligned} (x-20)(645) &= (x+15)(540) && \textit{se han eliminado las fracciones} \\ 645x - 12{,}900 &= 540x + 8100 && \textit{se han quitado los paréntesis} \\ 645x - 540x &= 8100 + 12{,}900 && \textit{se han transpuesto los términos} \\ 105x &= 21{,}000 \\ x &= 200 \textit{ km/hr., velocidad relativa del avión con respecto al aire} \end{aligned}$$

Comprobación:

La velocidad durante la primera parte del viaje fue 200 km/hr + 15 km/hr. = 215 km/hr. y el tiempo empleado de 645 ÷ 215 = 3 hrs. La velocidad durante la segunda parte del viaje fue de 200 km/hr. menos 20 km/hr. e igual a 180 km/hr. y el tiempo de 450 ÷ 180 = 3 hrs. Puesto que el tiempo en cada parte del viaje fue de tres horas la solución es la correcta.

Problemas que implican la realización de trabajo. Los problemas que comprenden la rapidez para hacer determinadas labores, se pueden resolver frecuentemente encontrando primero la fracción del trabajo realizado por cada individuo en la unidad de tiempo y encontrando después la relación entre las fracciones. Cuando se emplea este método, la unidad, el número *uno*, representa el trabajo total por realizar.

EJEMPLO 3 Un agricultor puede arar un terreno empleando un tractor en cuatro días; un ayudante suyo puede hacer el mismo trabajo con un tractor más pequeño en seis días. ¿En cuántos días pueden arar el campo si trabajan conjuntamente?

Solución: Si hacemos

x = número de días que se requieren para arar el campo cuando trabajan juntos.

Entonces

$\frac{1}{x}$ = parte del campo arado en un día por los dos.

Por tanto,

$\frac{1}{4}$ = parte del campo arado por el agricultor en un día.

$\frac{1}{6}$ = parte del campo arado por el ayudante en un día.

Entonces

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2x &= 12 \qquad \textit{se han eliminado las fracciones} \\ 5x &= 12 \\ x &= 2\tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Comprobación:

Si entre los dos aran el campo en $2\frac{2}{5}$ días, entonces hacen tanto como $\dfrac{1}{2\frac{2}{5}} = \dfrac{5}{12}$ en un día. Además, uno ara $\frac{1}{6}$ del campo en un día y el otro $\frac{1}{4}$, esto es

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2+3}{12} = \frac{5}{12}$$

EJEMPLO 4 Si en el ejemplo anterior el ayudante trabajó un día solo, con la máquina pequeña, y hasta el segundo día el agricultor empezó a ayudarle, ¿en cuántos días terminaron de arar el resto del campo?

Solución: El ayudante aró $\frac{1}{6}$ del campo en el primer día y, por tanto, quedaron sin arar $\frac{5}{6}$.

Sea

x = número de días requeridos para terminar el trabajo.

Entonces

$\frac{x}{4}$ = parte del campo arado por el agricultor en x días

$\frac{x}{6}$ = parte del campo arado por el ayudante

Por tanto,

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2x &= 10 \qquad \textit{se han eliminado las fracciones} \\ 5x &= 10 \\ x &= 2 \text{ días} \end{aligned}$$

Comprobación:

El agricultor aró en dos días $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ del campo y el ayudante $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ del mismo,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Problemas sobre mezclas. Muchos problemas implican la combinación de ciertas sustancias de concentración conocida, generalmente ex-

presada en porcentaje, para formar una mezcla de concentración fija con respecto a una de las sustancias. Otros implican la mezcla de ciertos artículos de diversos precios. En tales problemas debe recordarse que la cantidad total de una componente en una mezcla es igual a la suma de las cantidades que de esa componente hay en cada una de las sustancias combinadas, o que el valor de una mezcla es la suma de los valores de las sustancias agrupadas.

EJEMPLO 5 ¿Cuántos litros de un líquido que tiene 74 por ciento de alcohol se debe mezclar con 5 litros de otro líquido que tiene 90 por ciento de alcohol, si se desea obtener una mezcla de 84 por ciento de alcohol?

Solución: Si hacemos

$x =$ número de litros de la solución de 74 por ciento de alcohol que deben emplearse

entonces

$0.74x =$ número de litros de alcohol que aporta esa solución

Además,

$0.90(5) = 4.5$ número de litros de alcohol en la solución de 90 por ciento.

Por tanto,

$0.74x + 4.5 =$ número de litros de alcohol en la mezcla.

También

$x + 5 =$ número total de litros en la mezcla

Entonces, ya que la mezcla tiene 84 por ciento de alcohol. se tiene $0.84(x + 5)$ $=$ número de litros de alcohol en la mezcla.

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
.74x + 4.5 &= .84(x + 5)\\
.74x + 4.5 &= .84x + 4.2\\
.74x - .84x &= 4.2 - 4.5\\
-.10x &= -.3\\
x &= 3 \quad \textit{litros que deben agregarse.}
\end{aligned}
$$

Comprobación:

$$
\begin{aligned}
(.74)3 + 4.5 &= 2.22 + 4.5 = 6.72\\
.84(5 + 3) &= .84(8) = 6.72
\end{aligned}
$$

Problemas diversos. Además de los tres tipos anteriormente discutidos, existe una amplia variedad de problemas que se pueden resolver por medio de ecuaciones. El esquema fundamental es el mismo para todos, esto es, encontrar dos cantidades de las cuales una o las dos comprenden un valor no conocido, e igualarlas. Se mencionarán otros tres tipos y se delineará el principio general o fórmula que se emplea para su resolución.

a) Muchos problemas de Física y de Mecánica se refieren a palancas. Una palanca es una barra rígida apoyada en un punto, colocado gene-

ralmente entre los dos extremos de la barra, y que se llama *punto de apoyo*. Si sobre la palanca se colocan dos pesos P_1 y P_2 a las distancias D_1 y D_2, respectivamente, del punto de apoyo y la palanca está en equilibrio, entonces

$$P_1D_1 = P_2D_2$$

Además, si una fuerza F situada a una distancia D del punto de apoyo puede elevar un peso R situado a una distancia d del mismo punto de apoyo, entonces

$$FD = Rd$$

b) Cuando se resuelven problemas que tratan acerca de inversiones de dinero, generalmente se emplea la fórmula.

$$I = PRT$$

en donde P es el capital o cantidad de dinero invertida; I es el interés o cantidad devengada de la inversión; R, expresado en porcentaje, es la tasa del interés por unidad de tiempo, y T, es el tiempo total en que permanece el capital invertido.

c) Los problemas que comprenden los dígitos de un número dependen del principio empleado en nuestro sistema numérico, que asigna un valor al dígito de acuerdo con su colocación. Por ejemplo, si c es dígito de las centenas en un número de tres cifras, d el dígito de las decenas y u el de las unidades, entonces el número es $100c + 10d + u$. Si se intercambian los dígitos de las centenas y de las unidades el número es $100u + 10d + c$.

EJERCICIO 16: RESOLUCION DE PROBLEMAS MEDIANTE EL USO DE ECUACIONES

1. Encuéntrense tres números enteros consecutivos cuya suma sea 60.
2. Dos hermanos ganaron \$ 1 300.00 durante sus vacaciones de verano. El mayor ganó $1\frac{1}{2}$ veces más que el otro. Determínese la ganancia de cada uno.
3. En un grupo de 35 estudiantes había 10 hombres menos que el doble de mujeres. Determínese cuántos había de cada sexo.
4. Al poner un ribete a un pedazo rectangular de un jardín, cuya longitud era el doble de su anchura, se emplearon 312 ladrillos. Determínese cuántos se pusieron en cada lado.
5. Juan tiene 12 monedas más que Enrique y entre ambos tienen 78. Determínese cuántas monedas tiene cada uno.
6. En una escuela, la mitad de los alumnos menos seis poseen automóviles. El total de automóviles propiedad de los alumnos es 198. ¿Cuántos alumnos hay en la escuela?
7. Un automovilista estima que si recorre 75 kms más, completa la mitad de su viaje, del cual ya ha recorrido la tercera parte. Determínese la distancia recorrida.
8. Una joven pagó \$ 350.00 por un vestido y un sombrero. Determínese el precio del vestido sabiendo que éste costó \$ 150.00 más que el sombrero.
9. Juana, Julia y Josefa trabajaron en total dieciocho horas en una fiesta escolar. Juana y Julia completaron once horas entre ambas y Josefa trabajó una hora más que Juana. Determínese cuántas horas trabajó cada una.

10. Juan compró una máquina de escribir, una radio y una cámara. Determínese cuánto gastó sabiendo que la radio costó la cuarta del total, la máquina de escribir $ 200.00 más que la radio y la cámara $ 200.00 más que la máquina de escribir.

11. Dentro de la ciudad, cierto automóvil rinde 6 kms por litro; en cambio en carretera rinde 8.5 kms por litro. Si el automóvil consumió 90 litros en un recorrido de 690 kms determínese qué parte del recorrido fue en la ciudad.

12. Un hombre cercó un terreno rectangular de 75 metros de frente y 360 metros de perímetro a un costo de $5 190.00. Si el costo de la cerca del frente fue $2.00 mayor por metro que el de los otros tres lados, encuéntrese el precio por metro en cada caso.

13. Los organizadores de un concierto pusieron a la venta cierto número de boletos con precios de $34.00, $25.00 y $20.00. El ingreso total fue $10 250.00. Se vendieron en igual número los de $25.00 y los de $20.00, en tanto que los de $35.00 representaron dos tercios del total de boletos. Determínese el total de boletos vendidos.

14. Un comerciante compró cierta mercancía en $8 000.00. Al venderla, su utilidad fue 40 por ciento sobre una parte de aquélla y 30 por ciento sobre el resto. El monto de la utilidad fue $2 900.00. Determínese la fracción de los $8 000.00 originales en la que ganó 40 por ciento.

15. Tomás y Enrique reciben un salario de $1 000.00 cada uno. Después de un cierto tiempo Enrique obtuvo un trabajo mejor remunerado con salario de $1 500.00 al mes. Si entre ambos ganaron $53 000.00 en un período de dos años, determínese el tiempo que Enrique permaneció en el primer trabajo.

16. La propietaria de una casa de huéspedes ganó $7 200.00 en un año por concepto de renta de dos cuartos. Determínese la renta de cada cuarto si la de uno de ellos era $100.00 mayor que la del otro y si aquél estuvo vacante tres meses.

17. Al agregar 18 a un cierto número, el dígito de las unidades y el dígito de las decenas intercambian su posición. Determínese el número, sabiendo que el dígito de las unidades es doble del dígito de las decenas.

18. Al principiar una fiesta había tres veces más mujeres que hombres: 75 mujeres se fueron temprano a sus casas y 150 hombres llegaron tarde a la fiesta. Al terminar ésta había el doble de hombres que de mujeres. ¿Cuántos había en total en ese momento?

19. Santiago es cuatro veces mayor que Juan y en cuatro años más su edad será el doble. Encuéntrese la edad actual de cada uno.

20. Al abrir su alcancía Beatriz encontró que entre monedas de 5, 10 y 25 centavos completaba $9.50. Encontró igualmente que el número de monedas de 10 centavos era triple del de las de 25 centavos y que las de 5 centavos era el doble del de las de 10 centavos. ¿Cuántas monedas de cada denominación había en la alcancía?

21. Una joven estudia en una población distante 585 kilómetros de su hogar. Un cierto día toma el autobús con rumbo a su casa y tres horas más tarde su padre sale en automóvil a alcanzarla. Si ambos, el autobús y el automóvil, mantuvieron la velocidad de 65 kms/hora, determínese la distancia recorrida por el padre hasta el momento de encontrar a la hija.

22. Un muchacho pasea en su bicicleta durante tres horas. Luego, durante otras tres horas, pasea a pie hasta llegar a una montaña cercana. Su velocidad en la bicicleta fue 6 kilómetros por hora más rápida que cuando caminaba y en total hizo un recorrido de 36 kilómetros. Determínese la velocidad que mantuvo durante la caminata.

23. Samuel salió de la ciudad en su automóvil. Una hora más tarde Tomás partió con el mismo rumbc manteniendo una velocidad $\frac{5}{4}$ veces que la de Samuel, a quien alcanzó después de recorrer 200 kilómetros. Determínese sus velocidades.

24. Dos aeroplanos, uno menor que otro, parten al mismo tiempo de un mismo aeropuerto y con el mismo plan de vuelo. Al cabo de tres horas están a 525 kilómetros uno de otro. Determínese la velocidad de cada uno sabiendo que la del más pequeño era $\frac{5}{12}$ de la del otro.

25. Un estudiante de biología dedicado a recolectar insectos mantuvo una velocidad de 2 kms/hr al recorrer un cierto camino. Al regreso su velocidad fue 5 kms/hr, empleando en este caso dos horas veinticuatro minutos menos que en el viaje de ida. ¿Cuánto caminó en total?

26. Un cartero tiene a su cargo una ruta rural en forma de lazo de 99 kilómetros de recorrido total. Su velocidad promedio al realizar su trabajo es 12 kms/hr. Una mañana, tres horas treinta y seis minutos después de haber partido, sale en su busca un mensajero, quien viaja a 50 kms/hr a lo largo de la otra rama del lazo. Determínese el tiempo empleado por el mensajero para encontrar al cartero.

27. Una muchacha puede limpiar su cuarto en treinta y seis minutos y su compañera de habitación puede hacerlo en veinticuatro minutos. ¿Cuánto tiempo emplearían si limpian el cuarto entre las dos?

28. Un hombre necesita quince horas para rotular los sobres de tarjetas de felicitación de Navidad en tanto que su mujer puede hacer el mismo trabajo en doce horas. ¿Cuánto tiempo les tomará hacer ese trabajo entre los dos?

29. Un grupo de tres personas pueden hacer un cierto trabajo en seis horas en tanto que un grupo de cuatro pueden hacerlo en cuatro horas. Si durante una hora trabajan tres personas y luego se les une una cuarta, ¿cuánto tiempo tardarán las cuatro en terminar el trabajo?

30. Tres jóvenes tienen que preparar los emparedados para una fiesta. Una lo puede hacer en cuatro horas, otra en tres y la tercera también en cuatro. ¿Cuánto tiempo les lleva prepararlos juntas?

31. En una piscina, la entrada de agua se hace a través de dos tubos. Con el agua proveniente de un tubo se puede llenar en diez horas y con la del otro en catorce horas. ¿En cuánto tiempo se llena si se recibe agua de ambos?

32. Juan, Guillermo y David recibieron el encargo de pintar un cuarto. Cada uno de ellos podía hacerlo en cinco horas. Juan inició el trabajo a las nueve horas; a las nueve treinta empezó a ayudarlo Guillermo y David se unió a ellos a las diez. ¿A qué hora terminaron el trabajo?

33. Un hombre puede pintar una cerca en ocho horas. Su hijo mayor puede hacerlo en diez horas y su hijo menor en doce horas. El trabajo lo iniciaron conjuntamente, pero después de dos horas el menor de los hijos se retiró y cosa igual hizo el mayor al final de tres horas. ¿Cuánto tiempo le llevó al padre completar el trabajo?

34. Una piscina se puede llenar en seis horas con el agua que recibe de un tubo y se puede vaciar en ocho horas abriendo la válvula del tubo de drenaje. ¿En cuánto tiempo se llena la piscina si por descuido la válvula del tubo de drenaje permanece abierta durante tres horas?

35. La admisión de agua a un estanque está controlada por medio de una válvula automática que se cierra cuando el estanque está completamente lleno y que se abre cuando se han drenado $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad. El estanque se puede llenar en seis horas y se puede vaciar en dieciséis horas. Si la válvula del tubo de drenaje se deja abierta continuamente, determínese el tiempo transcurrido entre dos ocasiones sucesivas en que el estanque se llene completamente.

36. ¿Cuántos kilogramos de dulce de precio \$10.00 por kilogramo deben mezclarse con 6 kilogramos de dulce de precio \$7.50 por kilogramo para poder vender la mezcla obtenida al precio de \$9.00 por kilogramo?

37. Una florista vende un ramo de dos docenas de flores en \$7.50. El ramo está

formado de rosas de precio \$5.00 por docena y de claveles de precio \$3.00 por docena. ¿Cuántas flores de cada especie debe poner para formar el ramo?
38. ¿Cuántos litros de solución de sal al 25 por ciento se deben mezclar con 10 litros de otra solución de sal al 15 por ciento para producir una tercera al 17 por ciento?
39. Una solución de cierto insecticida debe contener 0.9 por ciento del insecticida. Por error se mezcla con otra solución que contiene 0.5 por ciento de insecticida y se guarda en frascos de 8 litros de capacidad cada uno. ¿Cuántos litros habrá que sacar en cada frasco y sustituirlos por una solución que contiene 16.5 por ciento de insecticida para obtener la concentración deseada?
40. Un químico mezcla 60 centímetros cúbicos de solución de ácido clorhídrico al 10 por ciento con 40 centímetros cúbicos de solución de ácido clorhídrico al 15 por ciento. De la solución así formada quita una parte y la sustituye por agua destilada, produciendo ahora una solución de ácido clorhídrico al 7.2 por ciento. ¿Cuántos centímetros cúbicos usó de la penúltima solución?
41. En un viaje de 535 kms un estudiante empleó cinco horas manejando bajo la lluvia y cuatro horas manejando en tiempo despejado. La velocidad en el tramo lluvioso fue 10 kms por hora menos que la velocidad en el tramo seco. Determínese la velocidad con que viajó en el tramo lluvioso.
42. Una persona que vive en los suburbios de una gran ciudad recorre diariamente dos tramos, uno de 5 kms en automóvil y otro de 30 kms en tren. La velocidad media del tren es doble que la velocidad media en automóvil; determínense ambas sabiendo que para el recorrido total emplea una hora.
43. Un pescador rema 4 kms río abajo y en el mismo tiempo un kilómetro río arriba. Si la velocidad de la corriente es 3 kilómetros por hora, ¿con qué velocidad puede remar el pescador en agua tranquila?
44. Un aeropuerto "A" está a una distancia de 1 050 millas al oeste de un aeropuerto "B" y 1 320 millas al sur de un aeropuerto "C". Un piloto vuela un cierto día de "B" a "A" y al día siguiente hasta "C". Durante el primer día sopló viento del oeste con velocidad de 25 millas por hora y durante el segundo día viento del sur con velocidad de 20 millas por hora. Determínese la velocidad del avión relativa al aire si en cada vuelo se empleó el mismo tiempo.
45. Un grupo de estudiantes salieron de su escuela en un autobús especial rumbo al aeropuerto, viajando a razón de 30 millas por hora. En el aeropuerto tuvieron una espera de treinta minutos y viajaron luego en avión a razón de 250 millas por hora. El viaje total duró cuatro horas e implicó un recorrido de 765 millas. Determínese la distancia que recorrieron en autobús.
46. Una señora se dirige al centro de una ciudad. Al salir de su casa toma un autobús local hasta la estación de autobuses y ahí un autobús expreso hasta su punto de destino. La velocidad promedio del autobús local fue 20 kilómetros por hora y la del expreso 50 kilómetros por hora. Determínese la distancia recorrida en el autobús local.
47. El señor Gutiérrez pidió a su Banco un préstamo de \$500.00, aceptando pagarlos en mensualidades iguales con interés de 1 por ciento sobre saldos insolutos. Al final del quinto mes había pagado \$24.00 por concepto de intereses. Determínese el monto de cada pago mensual.
48. Una persona puede ejercer una fuerza de 50 kilogramos en el extremo de una palanca de 6 metros de largo. ¿Dónde debe estar el punto de apoyo de la palanca para levantar un peso de 200 kilogramos?

5 FUNCIONES GRAFICAS

LA RELACIÓN ENTRE DOS O MÁS FENÓMENOS se puede observar en la experiencia diaria. Un bote que flota en el agua se hunde a medida que se agrega carga. Una fotografía resulta más clara o más oscura según sea que la película de la cámara se haya expuesto más o menos tiempo a la luz. En la primavera llueve y cosa igual ocurre en el verano. ¿Qué tanto en cada ocasión? Algunas sí y otras no de esas relaciones se pueden expresar claramente; pero, en la mayor parte de los casos, el álgebra es sumamente útil para interpretarlas. El presente capítulo dedicado a ese propósito principiará por definir ciertos términos y por destacar la utilidad de ellos.

5.1 CONSTANTES Y VARIABLES

Una fórmula, y también una ecuación, establecen las relaciones que existen entre combinaciones de letras y de números. Algunas de estas letras pueden representar valores que no cambian nunca; otras, pueden emplearse para cantidades que no cambian durante un cierto problema, y otras más, pueden tener valores que varían dentro de un cierto intervalo. Por ejemplo, consideraremos el siguiente problema:

Se tiene un recipiente cilíndrico en el que se vierte agua a razón de 3 centímetros cúbicos por segundo. Si el radio del recipiente es

5 centímetros y su altura 10 centímetros, ¿con qué velocidad se eleva el nivel del agua dentro de él?

Puesto que el agua en el recipiente toma la forma de un cilindro, su volumen está dado por la fórmula

$$V = \pi r^2 h \tag{5.1}$$

en donde $\pi = 3.1416$ (aproximadamente), r es el radio y h la altura de agua. En este problema, $r = 5$, h varía de 0 a 10 y el valor de π no cambia nunca. Si t representa el número de segundos durante los cuales fluye el agua, entonces el volumen de agua es $V = 3t$ y se tiene

$$3t = \pi r^2 h = \pi 5^2 h \tag{5.2}$$

Por consiguiente, ya que la velocidad con que se eleva el nivel del agua es h/t, se resuelve (5.2) para h y tenemos;

$$h = \frac{3t}{\pi 5^2} \tag{5.3}$$

La discusión anterior ilustra las siguientes definiciones:

variable

Una *variable* es un símbolo que representa a una cantidad que puede tomar diferentes valores dentro de un intervalo dado.

constante

Una *constante* es un símbolo que representa a una cantidad que no cambia en ninguna situación.

constante absoluta

NOTA 1: Se llaman *constantes absolutas* aquellos símbolos cuyos valores no cambian nunca, tales como π, 1, 2, 3, . . .

NOTA 2: Frecuentemente se emplean letras cuyo valor se desconoce por el momento, pero que está determinado por las condiciones dadas de un problema. Por ejemplo, en la ecuación $2x - 1 = 4x - 3$ se desconoce el valor de x hasta que la solución muestra que es igual a 1. Por tanto, en este problema x no es una variable, sino una constante cuyo valor está por conocerse.

5.2 FUNCIONES Y NOTACION FUNCIONAL

Si en (5.3), del Pr. (5.1), se asigna un valor a t, automáticamente se fija el valor de h y éste se puede calcular con tantas cifras decimales como se desee. Tal situación se describe matemáticamente mediante la

función

proposición *h es función de t* e ilustra la siguiente definición

Una variable es función de otra, si por lo menos uno de los valores de la primera queda determinado cada vez que se asigna un valor a la segunda.

variables dependientes e independientes

La variable a la que se asignan diferentes valores recibe el nombre de *variable independiente* y la otra el de *variable dependiente.*

Es frecuente que las funciones se escriban sin mostrar explícitamente la variable dependiente. Por ejemplo, la expresión $x^2 - 2x - 2$ es una variable, ya que su valor cambia cuando cambia x. Además, su valor

está determinado para cada número definido que se asigne a x. Por tanto, es una función de x. La proposición *función de x* se representa usualmente mediante el símbolo $f(x)$, que se lee f de x. La letra encerrada en el paréntesis es la variable independiente de la función. Entonces, a cada valor asignado a la variable independiente la función adquiere un valor determinado. Así, si en este caso particular, $f(x) = x^2 - 2x - 2$, y asignamos a x los valores sucesivos z, 3 y $1/x$, entonces

notación $f(x)$

$$f(z) = z^2 - 2z - 2$$
$$f(3) = 3^2 - 2(3) - 2$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) - 2$$

Si en el mismo ejemplo se tiene otra función tal como $3x^2 - 1$, se le designa entonces por $F(x)$, o por $h(x)$, o por medio de cualquier otra letra diferente de f que procede a x.

EJEMPLO 1 Si $f(x) = (x - 1)(x + 1)$ encuéntrese $f(4)$.

Solución: Sustituyendo x por 4

$$f(4) = (4 - 1)(4 + 1) = (3)(5) = 15$$

EJEMPLO 2 Si $g(t) = 10t + 16t^2$, encuéntrese $g(2)$ y $g(-1)$.

Solución: Sustituyendo g por 2 y por (-1)

$$g(2) = 10(2) + 16(2^2) = 84$$
$$g(-1) = 10(-1) + 16(-1)^2 = 6$$

EJEMPLO 3 Si $h(s) = s^3 - 3s - 2$, encuéntrese $h(2)$ y $h(3)$.

Solución: Sustituyendo s por 2 y por 3.

$$h(2) = 2^3 - 3(2) - 2 = 0$$
$$h(3) = 3^3 - 3(3) - 2 = 16$$

5.3 FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES

En geometría se conoce el teorema según el cual el área A, de un triángulo es igual al semiproducto de la base b, por la altura h. Un ejemplo como ese puede ilustrar la siguiente definición:

Si una variable w está relacionada con otras, $x, y, z, \ldots$, de tal modo que al asignar valores definidos a $x, y, z, \ldots$, se obtiene por lo menos un valor de w, se dice entonces que w es función de $x, y, z, \ldots$ Dicha relación se expresa simbólicamente por medio de

$$w = w(x,y,z, \ldots)$$

EJEMPLO Si $z(x, y) = x^2 + 3x + y^2$ encontrar $z(1, 2)$ y $z(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$

Solución: Para encontrar $z(1,2)$ se sustituye x por 1 e y por 2 en $z(x,y)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} z(1,2) &= 1^2 + 3(1) - (1)(2) + 2^2 \\ &= 1 + 3 - 2 + 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} z(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}) &= (\tfrac{1}{2})^2 + 3(\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{3}) + (-\tfrac{1}{3})^2 \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} \\ &= \frac{9 + 54 + 6 + 4}{36} \\ &= \tfrac{73}{36} \end{aligned}$$

EJERCICIO 17: FUNCIONES

1: Si $y(x) = 6x - 5$, encuéntrese $y(2)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$.
2: Si $h(t) = 5t + 3$, encuéntrese $h(1)$, $h(-2)$, $h(-3)$, $h(-\frac{2}{5})$.
3: Si $g(s) = 3s - 2$, encuéntrese $g(4)$, $g(-3)$, $g(\frac{2}{3})$, $g(3)$.
4: Si $f(a) = 7a + 6$, encuéntrese $f(-1)$, $f(-2)$, $f(3)$, $f(\frac{3}{7})$.
5: Si $f(x) = x^2 + x - 2$, encuéntrese $f(1)$, $f(-2)$, $f(3)$.
6: Si $L(c) = 2c^2 - 3c + 5$, encuéntrese $L(3)$, $L(-1)$, $L(2)$.
7: Si $S(t) = 5t^2 - 7t + 4$, encuéntrese $S(-2)$, $S(0)$, $S(2)$.
8: Si $T(h) = 3h^2 - 8h - 2$, encuéntrese $T(4)$, $T(1)$, $T(-2)$.
9: Si $A(p) = \dfrac{2p - 1}{p^2 + 2p - 3}$, encuéntrese $A(3)$, $A(\frac{1}{2})$, $A(-1)$.
10: Si $B(u) = \dfrac{3u - 5}{5u^2 + u - 1}$, encuéntrese $B(2)$, $B(-1)$, $B(\frac{5}{3})$.
11: Si $K(z) = \dfrac{2z^2 - 5z + 2}{z + 1}$, encuéntrese $K(2)$, $K(\frac{1}{3})$, $K(-1)$.
12: Si $b(a) = \dfrac{3a^2 - 2a - 1}{3a - 2}$, encuéntrese $b(-1)$, $b(\frac{1}{3})$, $b(\frac{2}{3})$.
13: Si $f(h) = \dfrac{2h - 1}{2h^2 + h - 3}$, encuéntrese $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(-2)$.
14: Si $t(p) = \dfrac{4p + 1}{2p^2 + 7p - 4}$, encuéntrese $t(-\frac{1}{4})$, $t(2)$, $t(-1)$.
15: Si $G(y) = \dfrac{6y^2 + y - 1}{y + 2}$, encuéntrese $G(2)$, $G(-\frac{1}{2})$, $G(-3)$.
16: Si $S(u) = \dfrac{4u^2 - 9u + 2}{2u - 1}$, encuéntrese $S(2)$, $S(3)$, $S(\frac{1}{2})$.
17: Si $H(a) = a^2 - 3a + 2$, encuéntrese $H(x)$, $H(x - 1)$, $H(2x)$.
18: Si $B(t) = t^2 + 2t - 1$, encuéntrese $B(s)$, $B(s + 1)$, $B(2s)$.
19: Si $M(e) = 2e^2 - 3e + 5$, encuéntrese $M(t)$, $M(t - 2)$, $M(3t)$.
20: Si $T(x) = 3x^2 - 4x + 1$, encuéntrese $T(y)$, $T(y + 2)$, $T(2y)$.
21: Si $y(x) = 2x - 1$ y $s(x) = 3x + 1$, encuéntrese $y\left(\dfrac{t - 1}{2}\right) \times s\left(\dfrac{t + 1}{3}\right)$.
22: Si $A(x) = 4x + 3$ y $B(x) = 3x - 4$, encuéntrese

$$A\left(\frac{y - 3}{4}\right) \times B\left(\frac{y + 4}{3}\right).$$

23: Si $S(x) = 3x + 2$ y $T(x) = 2x - 3$, encuéntrese

$$S\left(\frac{c - 1}{3}\right) \div T\left(\frac{c + 1}{2}\right).$$

24: Si $M(x) = 5x - 3$ y $N(x) = 3x + 5$, encuéntrese

$$M\left(\frac{y + 3}{5}\right) \div N\left(\frac{y - 5}{3}\right).$$

25: Si $s(x,y) = x^2 + xy - y^2$, encuéntrese $s(2,1)$, $s(-1,3)$.
26: Si $P(d,q) = d^2 - 3dq - q^2$, encuéntrese $P(2,3)$, $P(-1,-2)$.
27: Si $H(a,m) = 2a^2 + 3am + m^2$, encuéntrese $H(1,0)$, $H(2,-4)$.
28: Si $T(e,a) = 2e^2 - ea - a^2$, encuéntrese $T(1,2)$, $T(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

29: Si $S(v,a,t) = vt + \frac{1}{2}at^2$, encuéntrese $S(10,32,4)$, $S(-8,32,6)$.

30: Si $S(n,a,l) = \frac{1}{2}n(a + l)$, encuéntrese $S(9,1,17)$, $S(6,-2,8)$.

31: Si $W(x, y, z) = \dfrac{x + y - z}{x - y + z}$, encuéntrese $W\left(\dfrac{1}{t}, \dfrac{1}{t+1}, 1\right)$,

$$W\left(\frac{1}{t+1}, \frac{1}{t-1}, \frac{1}{t^2-1}\right)$$

32: Si $M(e, a, n) = \dfrac{e + a + n}{e - a + n}$, encuéntrese $M\left(\dfrac{1}{x-1}, \dfrac{1}{x^2+x+1}, \dfrac{2x-x^2}{x^3-1}\right)$,

y $M\left(\dfrac{1}{x-2}, \dfrac{1}{x-3}, \dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}\right)$.

5.4 REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

El modo según el cual una función varía de acuerdo con los cambios de la variable independiente, es un tema importante del álgebra. Dicho comportamiento se puede estudiar por medio de la representación gráfica de los valores correspondientes de la función y de la variable independiente.

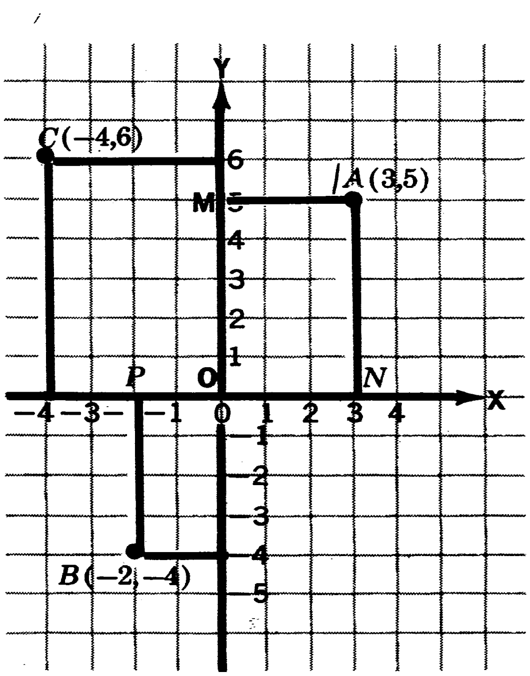


Figura 5.1

La representación gráfica de funciones se puede efectuar por medio del sistema conocido con el nombre de *coordenadas rectangulares*. Para representarlo en un plano, primeramente se escogen dos líneas, una horizontal y otra vertical, y una escala adecuada en cada línea. La línea horizontal se llama *eje de las X* y la línea vertical *eje de las Y*. La intersección de las dos se llama *origen* (figura 5.1). Luego se conviene en que todas las distancias horizontales medidas a la derecha del eje de las Y son positivas y que todas las distancias horizontales medidas a la izquierda son negativas. Además, todas las distancias verticales medidas hacia arriba del eje de las X son positivas y medidas hacia abajo negativas. Se puede observar entonces que a cada punto en el plano se asocian dos distancias dirigidas: una, a partir del eje de las Y, y otra, a partir del eje de las X. De lo anterior se establece la siguiente definición:

La *abscisa o coordenada X* de un punto en un plano, es la distancia dirigida desde el eje de las Y a ese punto. Dicha abscisa es positiva o negativa, según el punto esté a la derecha o a la izquierda de dicho eje. La *ordenada o coordenada Y* de un punto es la distancia dirigida desde

el eje de las X a ese punto y es positiva o negativa según el punto esté arriba o abajo de dicho eje.*

La abcisa y la ordenada se llaman *coordenadas* del punto y se escriben como un par de números encerrados entre paréntesis y separados mediante una coma. La abscisa se escribe primero. Por ejemplo, en la figura 5.1 la abscisa de A es $MA = 3$ y la ordenada $NA = 5$. Por tanto, las coordenadas de A se escriben (3.5). Además ambas coordenadas son positivas, puesto que A está a la derecha del eje Y y arriba del eje X. De igual manera las coordenadas de B son $(-2, -4)$.

El punto C de coordenadas $(-4, 6)$ se puede localizar contando cuatro unidades, a partir de O, a la izquierda del eje X ¿por qué?, y luego 6 unidades hacia arriba.

Cuando un punto se localiza por medio de sus coordenadas se dice que dicho punto se ha *representado gráficamente.*

Con los datos anteriores se puede explicar la representación gráfica de funciones y para ilustrar el procedimiento se indicarán los pasos para construir la gráfica de $x^2 - 2x - 2$. Como primer paso, la función se representa mediante y y se obtiene

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 2 \tag{5.4}$$

En el siguiente paso, se asignan valores diferentes a x y se calculan los correspondientes valores de y.

En la mayor parte de los casos los valores seleccionados para x suelen ser pequeños, generalmente enteros menores que 10. Cuando así ocurre se inicia el cálculo para $x = 0$ y luego se continúa para x igual a 1, 2, 3, 4, . . . Finalmente, se escoge $x = -1$ y $x = -2$. Se calcula después el valor de la función para cada valor de

$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = (0)^2 - 2(0) - 2 = -2 \\ x = 1 & y = (1)^2 - 2(1) - 2 = -3 \\ x = 2 & y = (2)^2 - 2(2) - 2 = -2 \end{array}$$

El proceso se continúa para todos los valores de x mencionados anteriormente. Se debe registrar en una tabla cada valor asignado a x e inmediatamente debajo el valor correspondiente de y. Los valores de x se escriben en orden de su magnitud de izquierda a derecha. Después de calcular y de registrar los valores de y para cada valor de x la tabla queda como sigue:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

*Con toda propiedad el eje horizontal es el *eje de las abscisas* y el eje vertical el *eje de las ordenadas.* Sin embargo, frecuentemente se les designa por ejes X y Y. Ambas denominaciones no sólo son equivalentes sino que su uso indiferenciado es por demás frecuente.

Se considera ahora cada par de valores x, y como las coordenadas de un punto y se representan gráficamente todos los puntos determinados por los pares de valores que aparecen en la tabla. Por último, se unen entre sí esos puntos por medio de una línea. De este modo se obtiene la curva de la figura 5.2. La curva es, pues, la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 2$ e indica los siguientes hechos acerca del comportamiento de la función.

1. El menor valor de la función es -3 y se obtiene para $x = 1$.

2. El valor de la función se incrementa rápidamente cuando x crece o decrece a partir del valor 1.

3. El valor de la función es cero para aquellos valores de x en donde la curva cruza el eje de las abscisas, aproximadamente para $x = 2.7$ y $x = -0.7$. Un cero de una función es un valor de la variable para el cual la función se anula. Por ejemplo, el cero de $2x - 5$, es $x = 2.5$. Para muchas clases de funciones los ceros se pueden obtener algebraicamente, pero para muchas otras se hace necesario recurrir a métodos gráficos. En este caso se construye la gráfica de la función y estimativamente se calculan en ella los valores de las abscisas de los puntos en donde la línea cruza al eje de las X. El cálculo se puede hacer más preciso mientras mayor sea la escala escogida.

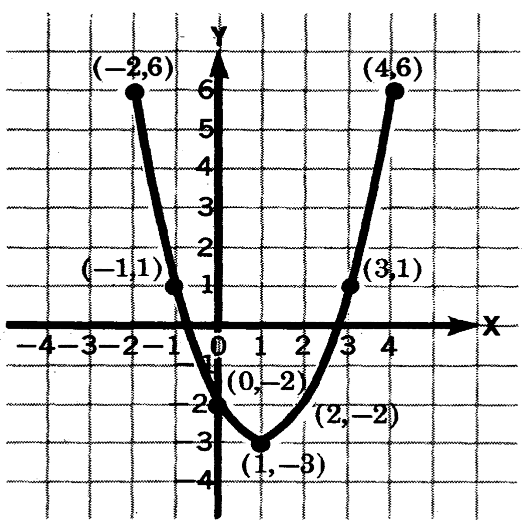


Figura 5.2

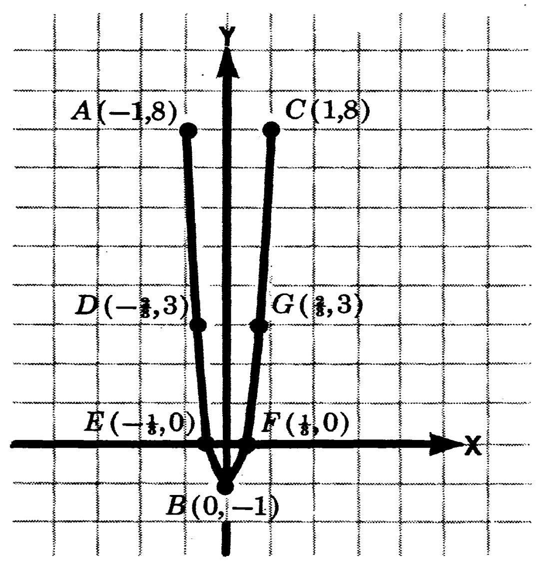


Figura 5.3

Por el momento se considerarán funciones en cuyas gráficas aparecen líneas de longitud ilimitada. Resulta, por tanto, que sólo puede construirse una región de la gráfica, lo que puede hacerse empleando valores de x comparativamente pequeños. Generalmente, se recomienda partir de $x = 0$; luego, asignar diferentes valores enteros consecutivos positivos a x, en número suficiente para observar la trayectoria probable de la línea, y, por último, proceder de modo análogo para valores consecutivos negativos de x.

Para algunas funciones los puntos que se obtienen al asignar valores enteros consecutivos a x quedan en posiciones tan separadas que no se

puede tener una idea acerca de la línea que los une. Por ejemplo, si en la función $y = 9x^2 - 1$ se asignan a x los valores -1, 0 y 1, se obtienen para y los valores 8, -1 y 8, respectivamente, y se determinan con ellos los puntos A, B y C de la figura 5.3. Estos puntos no son suficientes para determinar la forma de la línea. Sin embargo, se emplean $x = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{3}$, y $x = \frac{2}{3}$, y se obtienen los puntos D, E, F y G. Con éstos y con A, B y C se puede dibujar la línea fácilmente.

Por otro lado, algunas funciones presentan puntos tan cercanos unos a otros para valores consecutivos de x que sólo se puede determinar una pequeña región de la curva en el plano. En esos casos, en vez de asignar a x valores enteros consecutivos, se le asignan valores más distantes entre sí, probablemente números que difieran en 2, 3 ó 5. La idea es emplear valores de x adecuados para obtener suficiente número de puntos con los que se pueda determinar la línea en el plano. En la función $y = x/5$ la línea se puede definir fácilmente haciendo $x = -30$, -20, -10, 0, 10, 20 y 30.

5.5 FUNCIONES LINEALES

Una función lineal de x es una función del tipo $ax + b$, en la cual a y b son constantes y a es diferente de cero. En Geometría Analítica se demuestra que la gráfica de una función lineal es una línea recta. Por consiguiente, la gráfica queda determinada por sólo dos puntos. Se recomienda, sin embargo, que al construir la gráfica de estas funciones se determine un tercer punto que sirva para comprobar la exactitud de los otros dos. Igualmente es de recomendarse que se asignen a x valores tales que los puntos determinados con ellos estén suficientemente separados como para poder observar con toda precisión la dirección de la recta.

EJEMPLO Construir la gráfica de la función $3x - 5$.

Solución: Para construir la gráfica de $3x - 5$ se iguala primero la función con y, y se obtiene

$$y = 3x - 5 \qquad (1)$$

Luego se asignan a x los valores -1, 0 y 3 para obtener los correspondientes valores de y, tal como se muestra en la tabla siguiente: Cuando estos puntos se representan gráficamente y se unen entre sí por medio de una línea recta, se obtiene la gráfica que aparece en la figura 5.4.

x	-1	0	3
y	-8	-5	4

Si los tres puntos obtenidos para la gráfica de una función lineal no están en línea recta se debe verificar el valor de cada uno, ya que por lo menos la posición de uno de ellos está equivocada.

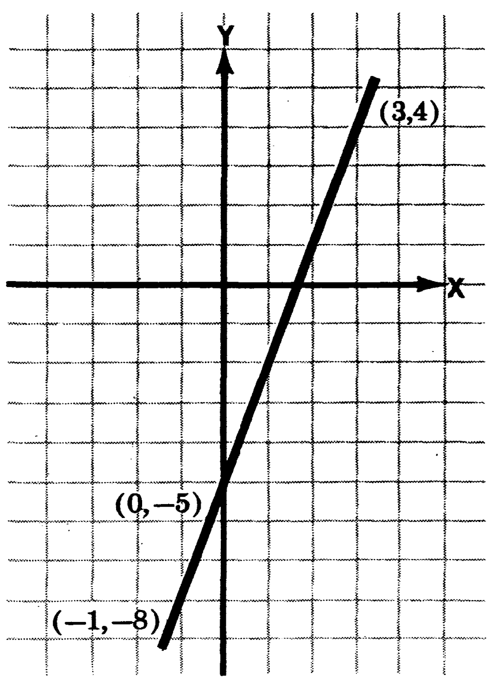


Figura 5.4

5.6 FUNCIONES REPRESENTADAS POR SEGMENTOS

Hasta aquí se ha tratado con funciones gráficas que se pueden trazar sin separar el lápiz del papel. Existe, sin embargo, una gran variedad de funciones cuyas gráficas están dadas por porciones de líneas que no se conectan entre sí.

EJEMPLO 1 En los Estados Unidos el porte postal para piezas de primera clase es 4 centavos por cada onza o fracción. Expresar la relación anterior por medio de una ecuación y trazar su gráfica.

Solución: El porte postal se puede expresar mediante la ecuación $y(x) = 4$, $0 < x \leqq 1$;* $y(x) = 8$, $1 < x \leqq 2$; $y(x) = 12$, $2 < x \leqq 3$; $y(x) = 16$, $3 < x \leqq 4$

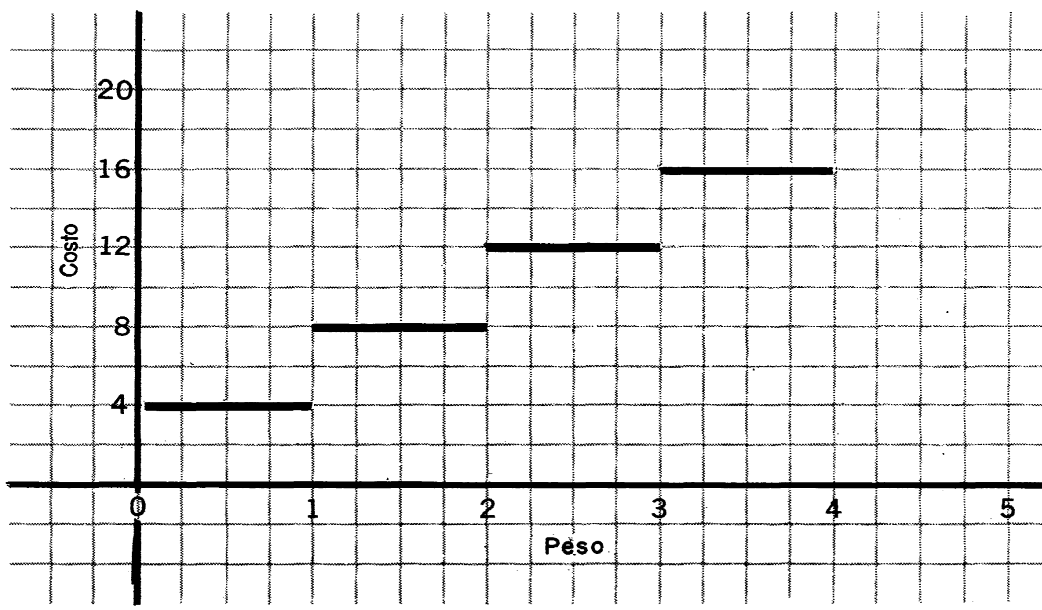


Figura 5.5

para pesos hasta de 4 onzas. Pesos más grandes pueden representarse de manera análoga. La gráfica de la función se muestra en la fig. 5.5.

EJEMPLO 2 Trazar la gráfica de

$$y(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ -x + 4, & x > 2 \end{cases}$$

Solución: La gráfica de $y(x) = x + 1$, $x < 2$ es una línea que se extiende a la izquierda de $x = 2$ y la de $y(x) = -x + 4$, $x > 2$ es una línea que se extiende a la derecha de $x = 2$. Se determinan dos puntos para cada una de ellas, como se muestra en la figura 5.6 y se traza la gráfica.

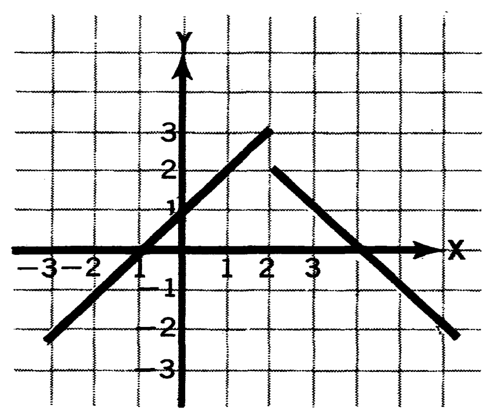


Figura 5.6

*Léase, y de x (ó y función de x) igual a 4 para x mayor que cero y menor o igual que 1.

EJERCICIO 18: GRAFICAS

1: Represéntense gráficamente los puntos (3,2), (4,1), (5, −1), (3, −3), (−2,4) (—1, 2), (−3, −5), (−2, −1), (4, 0), (0, —2).

2: ¿En dónde están localizados todos los puntos de abscisa cero? ¿Todos los puntos de ordenada cero? ¿Aquellos cuyas dos coordenadas son iguales? ¿Aquellos cuyas coordenadas son iguales en valor absoluto, pero de signos opuestos?

3: ¿En dónde están localizados todos los puntos de ordenada 5? ¿Los de abscisa 2? ¿Los de abscisa −4? ¿Los de ordenada −1?

4: ¿En cuál de los cuadrantes están localizados cada uno de los siguientes puntos si k es positivo?

$(3,k)$, $(k,2)$, $(-k,1)$, $(-k,-2)$, $(1,-k)$, $(-3,-k)$, (k,k), $(k,-k)$?

Constrúyanse las gráficas de las funciones de los problemas 5 a 24 y encuéntrense los ceros de cada función.

5: $x - 3$	6: $x + 4$	7: $x + 2$
8: $x - 1$	9: $2x - 3$	10: $3x + 2$
11: $4x + 7$	12: $3x - 1$	13: $2x - 7$
14: $3x - 8$	15: $5x + 9$	16: $4x + 3$
17: $x^2 - 4x + 2$	18: $x^2 + 5x + 3$	19: $x^2 - 3x + 1$
20: $x^2 + 3x - 2$	21: $2x^2 + 5x - 2$	22: $3x^2 + 2x - 2$
23: $-2x^2 - 6x + 3$	24: $-3x^2 + 4x + 2$	

Constrúyase la gráfica de cada una de las funciones siguientes:

25: $y(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ for } x < 0 \\ x + 2 \text{ for } x \geqq 0 \end{cases}$

26: $y(x) = \begin{cases} 2x - 3 \text{ for } x > 1 \\ 3x + 1 \text{ for } x \leqq 1 \end{cases}$

27: $y(x) = \begin{cases} -x + 3 \text{ for } x \geqq 3 \\ -2x + 1 \text{ for } x < 3 \end{cases}$

28: $y(x) = \begin{cases} 2x - 5 \text{ for } x \leqq 2 \\ -3x + 2 \text{ for } x > 2 \end{cases}$

29: $y(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ for } x \leqq 1 \\ 3 \text{ for } 1 < x < 2 \\ 2x - 1 \text{ for } x \geqq 2 \end{cases}$

30: $y(x) = \begin{cases} 2 \text{ for } x \leqq -1 \\ x + 3 \text{ for } -1 < x < 3 \\ x - 1 \text{ for } 3 \leqq x \end{cases}$

31: $y(x) = \begin{cases} 2x - 4 \text{ for } x < 2 \\ \sqrt{-x^2 + 6x - 8} \text{ for } 2 \leqq x \leqq 4 \\ 4x - 1 \text{ for } x > 4 \end{cases}$

32: $y(x) = \begin{cases} -x + 1 \text{ for } x < 0 \\ -\sqrt{2x - x^2} \text{ for } 0 \leqq x \leqq 2 \\ 2x - 3 \text{ for } x > 2 \end{cases}$

5.7 REPRESENTACION GRAFICA DE DATOS ESTADISTICOS

Muchas tablas de datos estadísticos o de datos científicos muestran a simple vista conjuntos de números relacionados entre sí. Esta información se escribe generalmente en dos columnas de tal modo que las cantidades que corresponden quedan en la misma línea horizontal. Por ejemplo, la tabla siguiente muestra los ingresos por servicio postal en un pueblo pequeño durante un período de 20 años:*

*Los ejemplos que se dan en este capítulo y que son de tipo particular se refieren a situaciones en los Estados Unidos (N.T.).

Año	*Ingresos postales*	*Año*	*Ingresos postales*
1928	$5500	1938	$4800
1929	6000	1939	4600
1930	5700	1940	4600
1931	4800	1941	5000
1932	4400	1942	6300
1933	4000	1943	7900
1934	4400	1944	8600
1935	4400	1945	9000
1936	4400	1946	7300
1937	4800	1947	8400

La tabla anterior establece una relación funcional entre dos variables, el año y los ingresos postales, ya que si se indica cualquier año entre 1927 y 1948 queda definitivamente determinado el importe de los ingresos postales con sólo mirar en la tabla. Esta no es una relación funcional en sentido matemático y no existe ninguna fórmula matemática que relacione las dos cantidades. Sin embargo, se puede adaptar el método gráfico anteriormente explicado para representar estos datos. Para ello se escoge una línea horizontal en un plano y sobre ella se marcan 19 intervalos iguales (figura 5.7). El extremo izquierdo de cada intervalo representa los años de 1928 a 1946 y el extremo derecho del último intervalo el año de 1947. En el extremo izquierdo de cada intervalo se dibuja una línea recta que a su vez se divide en intervalos de igual longitud. El extremo superior de cada una de éstas representa múltiplos de $ 1 000.00. Si se emplea papel cuadriculado, se recomienda escoger como unidad de intervalo 10 espacios de la cuadrícula y así, en sentido vertical, cada espacio de la cuadrícula es múltiplo de $ 100.00.

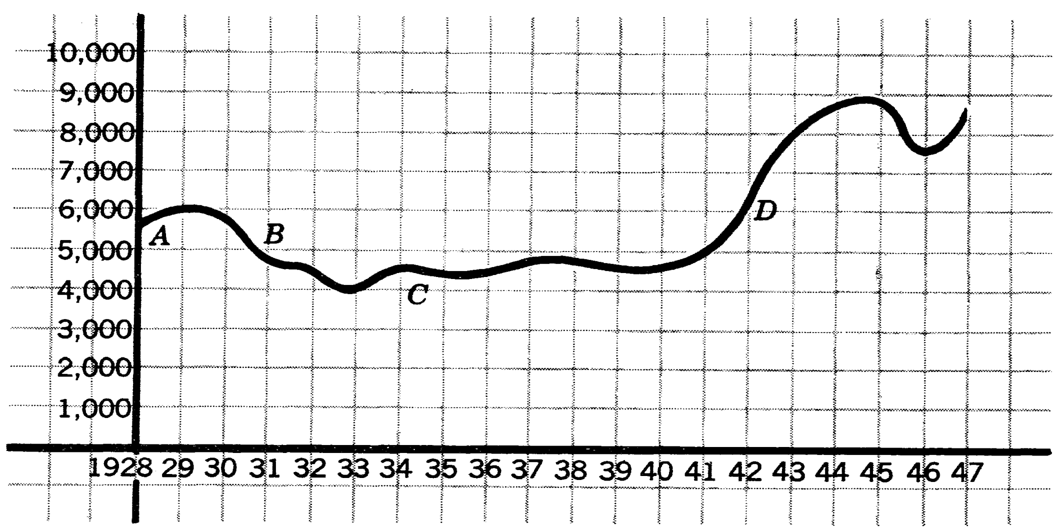


Figura 5.7

Se puede ahora, tomando estas dos líneas como ejes, representar gráfi camente un punto que indique al mismo tiempo cada año y el correspondiente ingreso postal, tal como aparecen enlistados en la tabla. Por ejemplo, el punto A representa el ingreso de $ 5 500.00 para 1928, y los

puntos B, C y D representan los de 1931, 1934 y 1942, respectivamente. Cuando los puntos se unen por medio de una línea se obtiene la gráfica que aparece en la figura 6. Si bien esta curva no tiene sentido algebraico, en cambio es una ayuda visual excelente para interpretar los datos proporcionados. Se observa de inmediato un decremento de 1929 a 1933, un incremento de 1933 a 1940 y un incremento brusco de 1941 a 1945. Estas variaciones eran de esperarse, ya que coinciden con los años de depresión económica, con los de recuperación y con los de la guerra, respectivamente.

La siguiente tabla de valores muestra un conjunto de lecturas efectuadas con un exposímetro. La columna de la izquierda da la medida de la intensidad de la luz y la de la derecha el correspondiente tiempo de exposición, expresado en segundos, necesario para obtener una buena fotografía con una cámara de determinado obturador y empleando un cierto tipo de película:

Intensidad de la luz	*Exposición en segundos*
600	.0025
400	.004
300	.0057
200	.0087
150	.011
100	.017
75	.022
50	.033
25	.067

En la figura 5.8 se muestra la gráfica de estos datos. En este caso se obtiene una curva cuya regularidad hace suponer que la magnitud del tiempo de exposición puede ser una función matemática de la intensidad de la luz. En realidad, eso es lo que ocurre, aun cuando no es posible dar en este libro el método para establecer esta relación. Sin embargo, se puede emplear la curva para obtener el tiempo de exposición que corresponde a intensidades luminosas no representadas en la tabla. Por ejemplo, el tiempo de exposición para una intensidad de la luz de 175 es de 0.009.

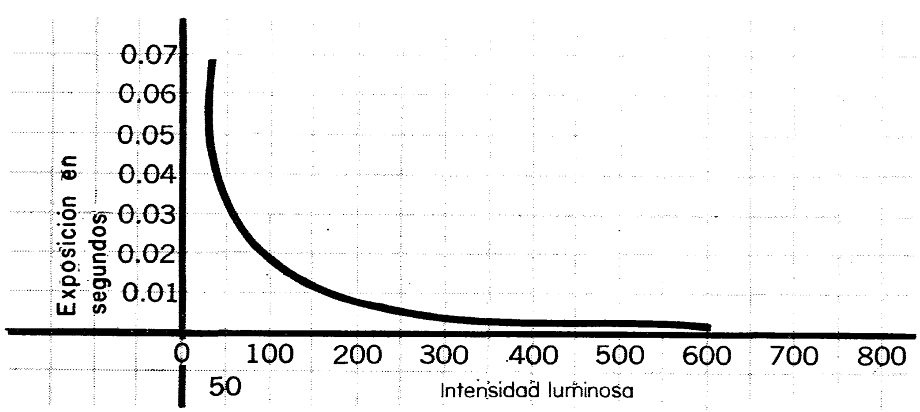


Figura 5.8

Las gráficas de datos científicos llevan frecuentemente al descubrimiento de leyes. Cuando la línea resultante es regular, se puede, mediante métodos avanzados, encontrar una ecuación que satisfaga la totalidad de la línea o por lo menos una parte de ella. Y cuando se ha obtenido esa ecuación, se encuentra la ley que rige la situación expresada por los datos.

EJERCICIO 19: GRAFICAS

Constrúyase la gráfica que muestre la relación entre los datos dados en cada uno de los problemas siguientes.

1: La tabla que sigue da la rapidez de ascenso de un avión ligero, en metros por minuto, a diversas velocidades en kilómetros por hora.

Velocidad	72	88	104	120	136	152	168	184	200
Rapidez de ascenso	90	124	147	165	180	169	150	123	90

2: La tabla siguiente da la presión, en centímetros de mercurio, del vapor de agua saturado, a diferentes temperaturas en grados centígrados.

Temperatura	0	10	20	30	40	60	80	100	120
Presión	0.46	0.92	1.75	3.17	5.51	14.9	35.5	76.0	148.9

3: La tabla siguiente da el combustible empleado, en litros por hora, por un aeroplano, a diversas velocidades en kilómetros por hora.

Velocidad	120	128	144	160	176	192	222	256	290	320
Combustible	95	82	79	82	94	105	120	146	176	214

4: La tabla siguiente da, en metros, el desplazamiento de un automóvil después de aplicarle los frenos, para diferentes velocidades, en kilómetros por hora.

Velocidad	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160
Distancia	8.7	11.7	21	33	48	69	90	114	141	168

5: La tabla siguiente da la altura, en centímetros, y el correspondiente peso, en kilogramos, para hombres de treinta años de edad.

Altura	155	160	165	170	175	180	185	190
Peso	59	62	65	69	73	77	82	89

6: La tabla siguiente da los valores de temperatura, en grados centígrados, y el tiempo correspondiente, en minutos, necesarios para obtener el negativo de una cierta densidad.

Temperatura	55	60	65	70	75	80	85	90
Tiempo	15.0	12.8	10.9	9.0	7.4	6.0	4.5	3.6

7: La tabla siguiente da algunos valores que se corresponden entre grados Farenheit y grados Centígrados.

Farenheit	—67	—49	—40	—22	5	32	68	95	122	149
Centígrados	—55	—45	—40	—30	—15	0	20	35	50	65

8: La tabla siguiente da la distancia, en kilómetros, desde la cual es visible cierta luz colocada a diferentes alturas, en metros, sobre el nivel del mar.

Distancia	4.8	9.6	19.4	28.8	38.4	57.5
Altura	1.8	7.2	28.8	65.0	115	260

9: La tabla siguiente da el número de centenares de calorías necesarias en la alimentación de jóvenes a diferentes edades.

Edad	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Calorías	17	19	21	21	23	25	26	27	27	28

10: Para cierto tipo de película y cierta abertura del obturador la tabla siguiente da el tiempo de exposición en segundos para la intensidad de luz especificada.

Intensidad	25	50	75	100	150	200	300	400	600
Tiempo	.05	.025	.018	.013	.01	.007	.004	.003	.002

11: La tabla siguiente da el número de millones de vehículos de motor de combustión interna registrados en los Estados Unidos en los años que se indican.

Año	1940	1942	1944	1946	1948	1950	1952	1954	1956	1958
Vehículos	31.1	30.0	30.5	34.4	41.2	49.2	53.3	58.6	65.2	68.4

12: La tabla siguiente da el número de millones de automóviles nuevos de pasajeros vendidos en los años que se indican desde 1905 hasta 1955.

Año	1910	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
Autos	.18	.90	1.91	3.74	2.79	3.27	3.72	.07	6.67	7.92

13: La tabla siguiente da el número de inmigrantes, en cientos de miles, llegados a los Estados Unidos en los años que se indican desde 1860 hasta 1950.

Año	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
Inmigrantes	1.5	3.9	4.6	4.6	4.5	10.4	4.3	2.4	.7	2.5

14: La tabla siguiente da el número de millones de toneladas de carga que fueron transportadas a lo largo del Canal de Panamá durante los años indicados.

Año	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Carga	23.5	27.7	30.0	31.8	34.6	38.1	39.0	43.8	46.0	49.7

15: La tabla siguiente da el número de decenas de millones de pasajeros transportados en ferrocarriles estadounidenses en los siete años que se indican.

Año	1935	1940	1945	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956
Pasajeros	44.8	45.6	89.7	48.8	48.5	47.1	45.8	44.1	43.3	43.0

16: La tabla siguiente da el número de millones de toneladas de seda producidos en el mundo durante los años que se indican.

Año	1940	1945	1947	1949	1951	1953	1955	1957
Seda	130	24	41	47	47	57	65	67

17: La tabla siguiente da el número de millones de barriles de cerveza producidos en los Estados Unidos en los años que se indican.

Año	1930	1935	1940	1945	1950	1951	1953	1955	1957
Cerveza	3.6	45.2	54.9	86.6	88.8	89.0	90.4	89.8	89.9

18: La tabla siguiente da el número de millones de kilogramos de tabaco para masticar producidos en los Estados Unidos en los años que se indican.

Año	1935	1940	1945	1947	1949	1951	1953	1955
Tabaco	30.0	24.7	30.5	23.8	21.2	20.2	19.4	18.6

19: A continuación se muestra el número de millones de barriles de petróleo crudo producidos en Texas durante los años indicados.

Año	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1953	1955	1957
Petróleo	145	290	393	493	755	830	1019	1053	1084

20: La tabla siguiente da el número de millones de toneladas de sal producidas en los Estados Unidos para los años que se indican.

Año	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
Sal	18.4	17.8	18.8	18.7	20.7	22.0	22.1

6 ECUACIONES SIMULTANEAS DE PRIMER GRADO

EN EL CAPÍTULO 4 SE MOSTRÓ cómo es posible expresar algunas veces la relación entre números conocidos y números desconocidos mediante una ecuación y cómo dicha ecuación sirve para hallar la respuesta a un problema dado. Las ecuaciones vistas en el capítulo 4 fueron ecuaciones de primer grado con una incógnita. Es frecuente, sin embargo, encontrar problemas que por su naturaleza no se pueden expresar mediante una sola ecuación de primer grado, en tanto que pueden serlo mediante dos o más ecuaciones de primer grado con dos o más incógnitas. El presente capítulo tratará de la utilidad y de los métodos empleados para resolver dos o más ecuaciones de primer grado.

6.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Si en una relación funcional aparece explícitamente la variable dependiente se tiene entonces una ecuación con dos incógnitas. Por ejemplo, la proposición

$$y = \tfrac{3}{4}x - 5 \tag{6.1}$$

no sólo muestra a y como función lineal de x, sino que también establece que las dos cantidades son iguales y, por tanto es una ecuación. Cualquier par de números, uno para x y otro para y, para el cual los dos miembros de (6.1) son iguales, es *solución* de la ecuación. Se pueden obtener tantas soluciones de (6.1) como se deseen con sólo asignar diferentes valores a x y luego calcular cada valor correspondiente de y. Obviamente, las coordenadas de cualquier punto de la gráfica de (6.1) son solución de la ecuación.

De los axiomas I y II , en el Pr. 4.2, se sabe que cualquier solución de (6.1) es también solución de:

$4y = 3x - 20$ *se ha multiplicado cada miembro de (6.1) por 4* (6.2)

$3x - 4y = 20$ *se ha transpuesto 3x y luego se ha dividido entre —1* (6.3)

La ecuación (6.3) es del tipo $ax + by = c$ donde a, b y c son constantes. Una ecuación de este tipo se llama ecuación de primer grado con dos incógnitas.

6.2 RESOLUCION GRAFICA DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

sistema de ecuaciones lineales

solución

En el parágrafo anterior se estableció que una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene tantas soluciones como se desee. Dos o más ecuaciones de primer grado con las mismas incógnitas reciben el nombre de *sistema de ecuaciones lineales* y pueden tener una solución común. Cuando ese es el caso reciben el nombre de ecuaciones *simultáneas*. Por lo general, dos ecuaciones simultáneas serán satisfechas por sólo un par de valores. El par de valores que satisface dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se denomina *solución* de las dos ecuaciones y puede ser hallado gráficamente.

Si $b \neq 0$, la ecuación

$$ax + by = c \tag{6.4}$$

se puede resolver para y, y se obtiene

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \tag{6.5}$$

De acuerdo con el Pr. 5.5 se sabe que la gráfica de (6.4) es una línea recta. Por tanto, dicha gráfica queda totalmente determinada por dos puntos cuyas coordenadas satisfagan a (6.4).

métodos para encontrar puntos para trazar las curvas

El procedimiento empleado para hallar los puntos cuyas coordenadas satisfacen a (6.4) depende en cierta extensión de los valores de a, b y c. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, los dos puntos se pueden obtener fácilmente haciendo $x = 0$ y resolviendo para y, y luego haciendo $y = 0$, y resolviendo para x. En este caso es aconsejable determinar un tercer punto a modo de comprobación.

Si $c = 0$, la ecuación (6.4) resulta $ax + by = 0$ y se satisface para $x = 0$, $y = 0$. El segundo punto de la gráfica se obtiene asignando a x un valor cualquiera y resolviendo la ecuación para y. Nuevamente, también es aconsejable obtener un tercer punto a modo de comprobación.

Si $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, la ecuación (6.4) resulta $by = c$ y, por tanto, $y = c/b$. En consecuencia, sólo aquellos puntos cuyas ordenadas

sean c/b pertenecerán a la gráfica y serán todos los puntos colocados en una línea recta paralela al eje x, situada a la distancia c/b de dicho eje. Análogamente, si $a \neq 0$ y $b = 0$, la gráfica es una línea recta paralela al eje y situada a la distancia c/a de dicho eje.

En los ejemplos que siguen se hace referencia a este conjunto de condiciones y las letras a, b y c corresponden, respectivamente, a los coeficientes de x, de y y al término independiente.

EJEMPLO 1 Resolver gráficamente las ecuaciones

$$3x + 2y = 14 \qquad (1)$$
$$2x - y = 2 \qquad (2)$$

Solución: En cada una de las ecuaciones dadas, $a \neq 0$, $b \neq 0$, y $c \neq 0$. Se considera, por tanto, $x = 0$ y se resuelve para y y luego se considera $y = 0$ y se resuelve para x. Como comprobación, en la primera ecuación se pone $x = -2$ y se resuelve para y y en la segunda ecuación se hace $x = 3$ y se resuelve para y. De esa manera se puede escribir la siguiente tabla de valores correspondientes de x y y.

x	-2	0	$4\frac{2}{3}$
y	10	7	0

de (1)

y

x	0	1	3
y	-2	0	4

de (2)

Representando gráficamente los puntos determinados en estas tablas y construyendo las gráficas de las líneas se obtiene la figura 6.1. Las gráficas se cortan en un punto cuyas coordenadas son, aproximadamente, (2.6, 3.2). Por tanto, de acuerdo con la gráfica se puede decir que la solución de las ecuaciones (1) y (2) es $x = 2.6$ e $y = 3.2$. La exactitud del procedimiento empleado depende del valor de la escala considerada. Si en el miembro de la izquierda de (1) se sustituyen los valores obtenidos se tiene

$$3(2.6) + 2(3.2) = 7.8 + 6.4 = 14.2$$

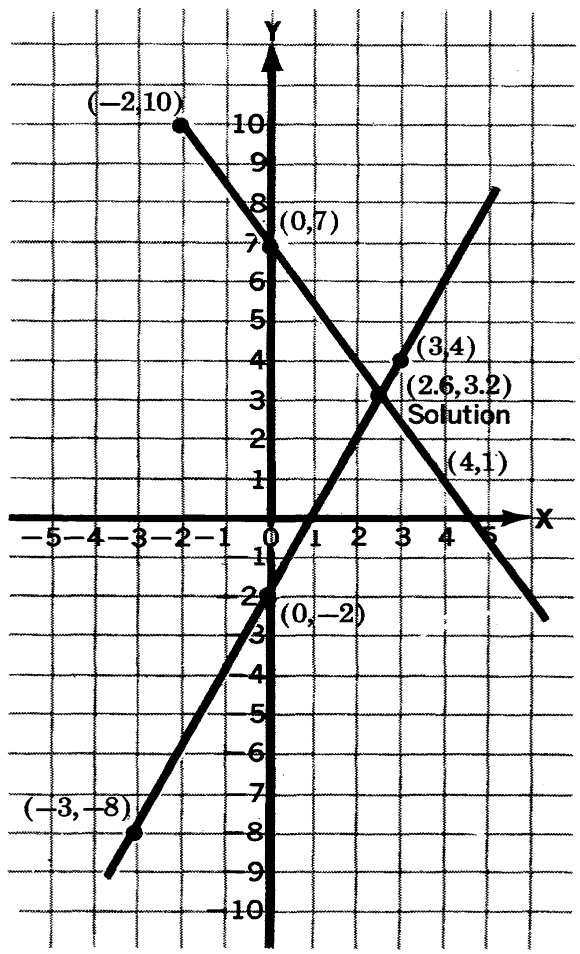


Figura 6.1

De igual manera para los mismos valores de x y de y, el miembro de la izquierda de (2) se transforma en

$$2(2.6) - 3.2 = 5.2 - 3.2 = 2$$

Ya que los miembros de la derecha de (1) y (2) son, respectivamente, 14 y 2, se observa el par de valores $x = 2.6$, $y = 3.2$, no es exactamente la solución de las dos

ecuaciones, pero que con una cifra decimal más quizá se obtengan los valores correctos.

EJEMPLO 2 Resolver gráficamente las ecuaciones

$$2y - 3x = 0 \qquad (1)$$
$$x = 3 \qquad (2)$$

Solución: En la ecuación (1), $c = 0$, y, por tanto, la gráfica de (1) se obtiene tomando como uno de sus puntos $x = 0$, $y = 0$. Otro punto se obtiene haciendo $x = 4$ y hallando $y = 6$. En la ecuación (2), $b = 0$ y $a = 1$. Por tanto, $x = c/a = 3/1 = 3$, para todos los valores de y. En consecuencia, la gráfica de (2) es una línea recta paralela al eje y distante 3 unidades a la derecha de dicho eje. (Fig. 6.2). Las dos gráficas se intersectan en el punto (3,4.5). Esto es, la solución de las ecuaciones (1) y (2) es $x = 3$, $y = 4.5$.

Puede suceder que las gráficas de dos ecuaciones de primer grado sean rectas paralelas. Por ejemplo, en la figura 6.3 se muestran las gráficas de dos rectas paralelas que corresponden a las ecuaciones siguientes:

$$3x - 2y = 6 \qquad (6.6)$$
$$9x - 6y = -3 \qquad (6.7)$$

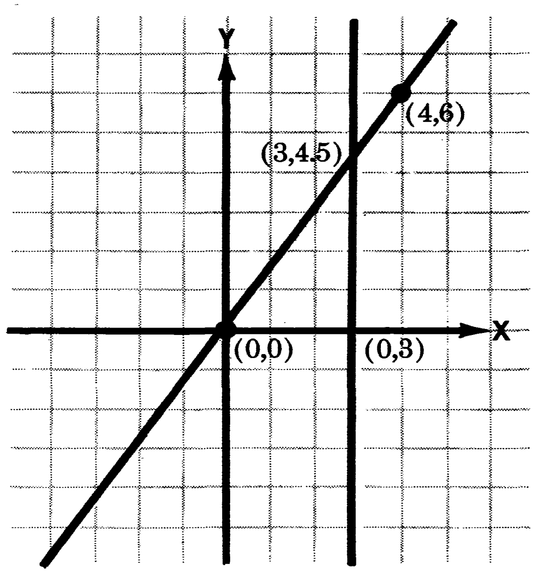


Figura 6.2

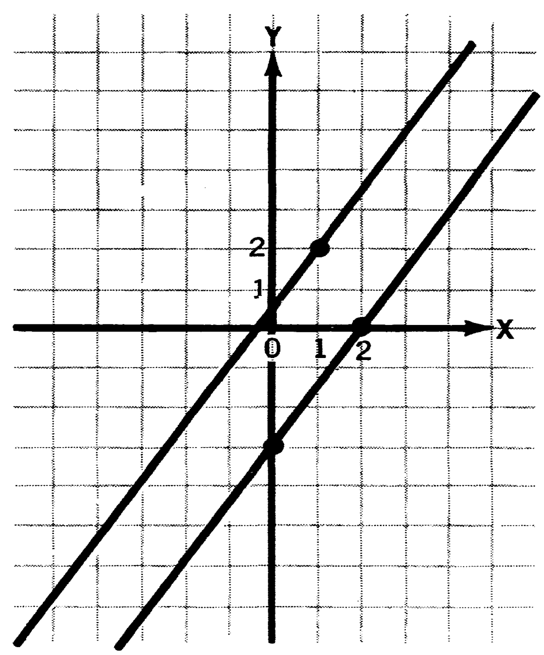


Figura 6.3

Por tanto, las ecuaciones no tienen solución. Algebraicamente se puede observar este hecho si se considera que el miembro de la izquierda de (6.7) es exactamente 3 veces mayor que el miembro de la izquierda de (6.6). Por tanto, cualquier par de valores que hagan igual a 6 el miembro de la izquierda de (6.6) hacen que el miembro de la izquierda de (6.7) sea igual a 18 y no a —3.

Por otro lado, se pueden tener dos ecuaciones cuyas gráficas coincidan en todos sus puntos. Entonces cualquier par de valores que satisfaga

a la primera ecuación satisface también a la segunda y el par de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones.

ecuaciones consistentes inconsistentes y dependientes

Si dos ecuaciones con dos incógnitas tienen una y sólo una solución, se denominan *ecuaciones consistentes.* Si no tienen solución se llaman *ecuaciones inconsistentes,* y si tienen un número infinito de soluciones, *ecuaciones dependientes.*

Aunque el método gráfico es un auxiliar para comprender los tres anteriores tipos de pares de ecuaciones de primer grado, no es, sin embargo, un método eficaz para obtener la solución, cuando ésta existe. En primer lugar es excesivamente laborioso. En segundo, la exactitud del método depende de la habilidad del operador para construir las dos gráficas y para estimar las coordenadas de su punto de intersección. Los dos métodos algebraicos que se presentarán a continuación son más fáciles de operar y permiten además obtener con absoluta exactitud la solución, cuando ésta existe.

EJERCICIO 20: RESOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES

Encuéntrense las soluciones de los siguientes pares de ecuaciones, con aproximación hasta una cifra decimal, usando el método gráfico. Identifíquense los pares que son inconsistentes y los que son dependientes.

1: $\begin{aligned} 3x - 2y &= 16 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$	2: $\begin{aligned} 4x + y &= -1 \\ x + 3y &= 8 \end{aligned}$	3: $\begin{aligned} 2x + 3y &= -5 \\ 3x + 4y &= -6 \end{aligned}$
4: $\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= 8 \end{aligned}$	5: $\begin{aligned} 4x + 3y &= -1 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$	6: $\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ 5x + 4y &= 4 \end{aligned}$
7: $\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 6x - 5y &= 5 \end{aligned}$	8: $\begin{aligned} 4x + y &= 1 \\ 6x - 2y &= -9 \end{aligned}$	9: $\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 7x - 3y &= 16 \end{aligned}$
10: $\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 3x + 9y &= -2 \end{aligned}$	11: $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 8x - 4y &= 4 \end{aligned}$	12: $\begin{aligned} x + y &= -2 \\ 3x - 7y &= -9 \end{aligned}$
13: $\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 6x - 9y &= 3 \end{aligned}$	14: $\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 4x + 8y &= -4 \end{aligned}$	15: $\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 3x + y &= -2 \end{aligned}$
16: $\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 4 \end{aligned}$	17: $\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 12x - 4y &= 24 \end{aligned}$	18: $\begin{aligned} 5x - 15y &= 10 \\ x - 3y &= 3 \end{aligned}$
19: $\begin{aligned} 3x - 5y &= 5 \\ x + 5y &= 3 \end{aligned}$	20: $\begin{aligned} 4x + 2y &= 2 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned}$	21: $\begin{aligned} 4x + 5y &= 4 \\ 3x - 10y &= -8 \end{aligned}$
22: $\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 8x - 12y &= 4 \end{aligned}$	23: $\begin{aligned} 4x - 3y &= 0 \\ 6x - 2y &= 1 \end{aligned}$	24: $\begin{aligned} 2x + 4y &= 1 \\ 6x - 3y &= -6 \end{aligned}$
25: $\begin{aligned} 3x - 4y &= 12 \\ 4y - 8 &= 0 \end{aligned}$	26: $\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 3x - 2 &= 0 \end{aligned}$	27: $\begin{aligned} 3x - 5y &= 0 \\ 2x + 4 &= 0 \end{aligned}$
28: $\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \\ 3y - 6 &= 0 \end{aligned}$		

6.3 ELIMINACION DE UNA VARIABLE POR ADICION O SUSTRACCION

Para resolver dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se *elimina* primero una de las variables. Esto es, de las dos ecuaciones dadas se obtiene una tercera, con una sola incógnita cuya solución es uno de los valores buscados. Luego se sustituye este valor en cualquiera

de las ecuaciones dadas y se resuelve ésta para la otra incógnita. Probablemente, el método más usado es el llamado de *eliminación por adición* o *sustracción.* Se explicará este procedimiento al aplicarlo a las ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

Se supone que las ecuaciones son consistentes, esto es, que existe un valor de x y un valor asociado de y, tales que los miembros de la izquierda son, respectivamente, 1 y 5. En consecuencia, para tal par de valores la suma de los miembros de la izquierda será igual a la suma de los miembros de la derecha. Por tanto, la ecuación

$$(2x - 3y) + (x + 3y) = 5 + 1$$

se satisface con la misma solución que las ecuaciones dadas. Simplificando esta ecuación se reduce a $3x = 6$, o sea, $x = 2$. En consecuencia, uno de los valores buscados es $x = 2$. Sustituyendo ahora 2 en vez de x en la primera de las ecuaciones dadas se obtiene el valor de y.

$$\begin{aligned} 4 - 3y &= 1 \\ -3y &= -3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución deseada es $x = 2$, $y = 1$.

Como segundo ejemplo sean las ecuaciones

$$2x - 3y = 6 \tag{6.8}$$
$$3x + 2y = 12 \tag{6.9}$$

En este caso no se llega a ningún resultado si se suman los correspondientes miembros de (6.8) y (6.9) en virtud de que la ecuación resultante contendrá las dos incógnitas z y y. Sin embargo, una de las dos incógnitas se puede eliminar por adición o por sustracción si previamente (6.8) y (6.9) se convierten en ecuaciones equivalentes en las cuales los coeficientes de x o los coeficientes de y sean iguales. Arbitrariamente se escoge y como la variable por eliminar. Se observa que si (6.8) se multiplica por 2 y (6.9) por 3, el valor numérico de y en las ecuaciones resultantes será 6. Se procede como sigue.

$4x - 6y = 12$	*se ha multiplicado cada miembro de (6.8) por 2*	(6.10)
$9x + 6y = 36$	*se ha multiplicado cada miembro de (6.9) por 3*	(6.11)
$13x = 48$	*se ha efectuado la suma algebraica*	(6.12)
$x = \frac{48}{13}$	*se han dividido ambos miembros entre 13*	(6.13)

El valor anterior es el valor buscado de x. El procedimiento se completa sustituyendo y por $\frac{48}{13}$ en cualesquiera de las ecuaciones dadas y resolviendo para y. Si se emplea la ecuación (6.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
2(\tfrac{48}{13}) - 3y &= 6 \\
\tfrac{96}{13} - 3y &= 6 \\
-3y &= 6 - \tfrac{96}{13} && \textit{transponiendo } \tfrac{96}{13} \\
&= \frac{78 - 96}{13} && \textit{combinando el segundo miembro en una sola fracción} \\
-3y &= -\tfrac{18}{13} \\
y &= -\tfrac{18}{13} \div -3 && \textit{diviendo ambos miembros entre } -3 \\
y &= \tfrac{6}{13}
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es $x = \frac{48}{13}$ $y = \frac{6}{13}$.

Puesto que para obtener el valor de y se empleó la ecuación (6.8), la solución anterior satisfará a (6.8), suponiendo que no haya habido ningún error en las operaciones. Sin embargo, si la solución satisface a (6.9) se puede asumir entonces que sus valores son correctos. Para los valores hallados de x y y el primer miembro de (6.9) viene a ser

$$3(\tfrac{48}{13}) + 2(\tfrac{6}{13}) = \tfrac{144}{13} + \tfrac{12}{13} = \tfrac{156}{13} = 12$$

En consecuencia, puesto que el miembro de la derecha de (6.9) es 12 la solución es correcta.

El problema anterior pudo haber sido resuelto con igual número de operaciones si al principio se hubiera eliminado x en vez de y. Sin embargo, frecuentemente el proceso de eliminación puede ser más extenso para una variable que para la otra. Por tanto, se recomienda estudiar el problema antes de intentar resolverlo y con ello seleccionar el método que requiera menor número de operaciones.

Los pasos para la resolución de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas puede resumirse como sigue:

pasos para resolver dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

1. Se selecciona la incógnita más fácil de eliminar.
2. Se encuentra el MCM de los dos coeficientes de esta incógnita.
3. Se multiplican las dos miembros de cada ecuación por el cociente obtenido al dividir el anterior MCM entre el coeficiente de la incógnita seleccionada en la ecuación.
4. Se suman o se restan los miembros correspondientes de las ecuaciones obtenidas en el paso anterior, según sean opuestos o iguales los signos de los términos en los que aparece la incógnita seleccionada.
5. Se resuelve, para la incógnita que queda, la ecuación resultante.
6. Se sustituye el valor obtenido en el paso anterior en cualquiera de las ecuaciones dadas y se resuelve ésta para la otra incógnita.
7. Se escribe la solución en la forma $x =$, $y =$, poniendo los valores obtenidos en los pasos 5 y 6.

8. Se comprueban las operaciones sustituyendo en la ecuación original que no se usó en el paso 6 los valores obtenidos en el paso 7.

EJEMPLO Resolver las ecuaciones

$$4x - 11y = -3 \qquad (1)$$
$$6x + 7y = 19 \qquad (2)$$

Solución: Los MCM de los coeficientes de x y de y son 12 y 77, respectivamente. Por tanto, se puede operar con números más pequeños si se elimina x en vez de y. Si se divide 12 entre 4, y 12 entre 6 se obtienen 3 y 2, respectivamente. Por tanto, se multiplican los dos miembros de (1) por 3 y los de (2) por 2, y se obtiene

$$12x - 33y = -9 \qquad \textit{multiplicando ambos miembros de (1) por 3} \qquad (3)$$
$$12x + 14y = 38 \qquad \textit{multiplicando ambos miembros de (2) por 2} \qquad (4)$$

Ya que los términos que contienen a x tienen el mismo signo, se resta (4) de (3), y se tiene

$$-47y = -47 \qquad \textit{restando (4) de (3)} \qquad (5)$$
$$y = 1 \qquad \textit{dividiendo ambos miembros por } -47 \qquad (6)$$

Sustituyendo en (1) $y = 1$, se tiene

$$4x - 11 = -3 \qquad (7)$$
$$4x = 11 - 3 = 8 \qquad \textit{trasponiendo y sumando} \qquad (8)$$
$$x = 2 \qquad \textit{dividiendo ambos por 4} \qquad (9)$$

Por consiguiente, la solución es $x = 2$, $y = 1$.

Puesto que para obtener el valor de x se usó la ecuación (1), se debe comprobar la solución mediante el uso de (2). Para $x = 2$ y $y = 1$ el miembro de la izquierda de (2) es

$$6(2) + 7(1) = 12 + 7 = 19$$

Siendo también 19 el miembro de la derecha de (2), la solución es correcta.

6.4 ELIMINACION DE UNA VARIABLE POR SUSTITUCION

A continuación se enumeraran los pasos a seguir en el método de eliminación por sustitución y luego se ilustrará su aplicación mediante dos ejemplos. Con el fin de lograr mayor precisión en lo que va a exponerse se supondrá que y es la variable que debe eliminarse. Sin embargo, las mismas instrucciones pueden seguirse para eliminar a x, con sólo intercambiar x e y en cada paso.

pasos para resolver dos ecuaciones lineales por sustitución.

1. Se resuelve una de las ecuaciones para y, en términos de x.
2. Se sustituye el valor encontrado de y en la otra ecuación, y se obtiene así una ecuación en la que aparece únicamente x.
3. Se resuelve para x esta última ecuación.
4. Se sustituye el valor de x en la función obtenida en el paso 1 y se calcula el valor de y.
5. Se escribe la solución en la forma $x =$, $y =$, poniendo los valores obtenidos en los pasos 3 y 4.

6. Se comprueba la solución sustituyendo sus valores en la ecuación no usada en el paso 1.

EJEMPLO 1 Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$5x + 3y = 13 \qquad (1)$$
$$3x - y = 5 \qquad (2)$$

Solución: Se observa que si la ecuación (2) se resuelve para y, no se obtienen fracciones. Efectuando la operación, se tiene

$$y = 3x - 5 \qquad \textit{transponiendo } 3x \textit{ y multiplicando por } -1 \qquad (3)$$

Se sustituye ahora $3x - 5$ en vez de y en la ecuación (1) y se tiene

$$5x + 3(3x - 5) = 13$$

Se resuelve esta ecuación

$$5x + 9x - 15 = 13$$
$$14x = 28 \qquad \textit{combinando y transponiendo términos y}$$
$$x = 2 \qquad \textit{dividiendo ambos miembros por } 14$$

Se sustituye 2 en vez de z en la ecuación (3), y se obtiene

$$y = 3(2) - 5 = 1$$

Por tanto la solución es $x = 2$, $y = 1$

Puesto que en el paso 1 se usó la ecuación (2), se comprueba la solución obtenida sustituyendo por sus valores las letras del miembro de la izquierda de la ecuación (1). De ese modo, se obtiene

$$5(2) + 3(1) = 10 + 3 = 13$$

Ya que el miembro de la derecha de la ecuación (2) es también 13 la solución es correcta.

EJEMPLO 2 Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$6x + 5y = 13 \qquad (1)$$
$$7x - 4y = 25 \qquad (2)$$

Solución: Puesto que al resolver como primer paso cualquiera de estas ecuaciones la solución contiene fracciones, no existe ninguna diferencia en escoger una u otra. Por tanto, arbitrariamente se selecciona (1) y se resuelve para x, obteniendo

$$x = \frac{13 - 5y}{6} \qquad (3)$$

Sustituyendo el miembro de la derecha de (3) en vez de x en (2), se tiene

$$7\left(\frac{13 - 5y}{6}\right) - 4y = 25 \qquad (4)$$

Eliminando las fracciones en (4) y multiplicando ambos miembros por 6, se tiene sumando y transponiendo

$$7(13 - 5y) - 24y = 150$$
$$91 - 35y - 24y = 150$$

Por tanto,

$$-59y = 150 - 91$$
$$= 59$$
$$y = -1$$

Sustituyendo -1 en vez de y en (3) se tiene

$$x = \frac{13 - 5(-1)}{6}$$
$$= \frac{13 + 5}{6}$$
$$= 3$$

Por tanto, la solución es $x = 3$, $y = -1$.

La solución se comprueba sustituyendo por sus valores las letras del miembro de la izquierda de (2) y se obtiene

$$7(3) - 4(-1) = 25$$

Por tanto, siendo 25 el miembro de la derecha de (2) la solución es correcta.

EJERCICIO 21: RESOLUCION ALGEBRAICA DE ECUACIONES

Resuélvanse los pares de ecuaciones de los problemas 1 a 16 por el método de adición o sustracción.

1: $x + 2y = 8$; $2x + y = 7$

2: $2x + 2y = -6$; $x - 3y = 5$

3: $2x - 3y = -4$; $3x + y = 5$

4: $3x + 3y = -3$; $4x + y = 5$

5: $2x + 3y = 3$; $3x - 2y = 11$

6: $4x + 5y = -7$; $5x - 3y = 19$

7: $24x - 12y = -24$; $3x + 2y = -17$

8: $2x + 9y = 8$; $3x + 10y = 5$

9: $4x + 2y = 6$; $2x + 3y = 7$

10: $4x + 3y = 10$; $6x + 9y = 21$

11: $4x + 3y = 4$; $8x + 9y = 3$

12: $4x + 10y = 1$; $8x + 15y = 0$

13: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 6$; $\frac{1}{2}x + y = 7$

14: $2x - 2y = -6$; $3x + 3y = -9$

15: $5x - 4y = -13$; $5x + 4y = -7$

16: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 0$; $x + \frac{2}{3}y = 8$

Resuélvanse los pares de ecuaciones de los problemas 17 a 32 por el método de sustitución.

17: $3x + 2y = -4$; $4x + 9y = 1$

18: $4x - 8y = -4$; $2x + 3y = 12$

19: $5x - 7y = 17$; $x + 9y = -7$

20: $8x + 3y = 30$; $6x - 2y = 14$

21: $7x + 6y = -8$; $3x + 3y = -6$

22: $4x + 5y = -17$; $2x - 3y = 19$

23: $6x + 2y = 12$; $4x - 3y = 34$

24: $3x - 2y = -29$; $4x - 3y = -41$

25: $x + 4y = 4$; $3x + 6y = 7$

26: $3x + 2y = 7$; $6x - 4y = 2$

27: $3x + 3y = 6$; $4x - 2y = -1$

28: $6x + 8y = 10$; $9x - 4y = 3$

29: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2}$; $x - 6y = -3$

30: $\frac{5}{2}x + 3y = 20$; $3x + 2y = 16$

31: $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = \frac{5}{6}$; $6x - 3y = 1$

32: $\frac{5}{3}x + \frac{1}{4}y = \frac{19}{4}$; $x + 5y = -2$

Resuélvanse por cualquier método los pares de ecuaciones de los problemas 33 a 48.

33: $\dfrac{x + 3y}{4} + \dfrac{x}{6} = \dfrac{-1}{12}$

34: $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x - y}{6} = \dfrac{1}{2}$

$$x + 4y = 2$$

$$x + 3y = -1$$

35: $$\frac{x + 2y}{2} + \frac{2x - y}{4} = \frac{9}{2}$$
$$2x + y = 8$$

36: $$2x + y + \frac{x + y}{4} = 6$$
$$6x - y = 3$$

37: $$\frac{4x - 3y + 3}{x + y - 2} = 5$$
$$x + 2y = 1$$

38: $$\frac{2x + 3y - 1}{2x - y + 2} = 2$$
$$x + 2y = 11$$

39: $$\frac{x + y + 2}{x - 2y + 1} = 2$$
$$x + 3y = 16$$

40: $$\frac{2x + 2y + 8}{3x + 4y + 1} = 3$$
$$2x + 3y = 1$$

41: $$\frac{4x - 2y}{3} - \frac{x + 2y}{2} = \frac{5}{6}$$
$$\frac{3x + y}{3} - \frac{2x + y}{2} = -\frac{1}{6}$$

42: $$\frac{3x - y}{3} + \frac{2x + y}{2} = \frac{53}{6}$$
$$\frac{x + y}{3} + \frac{x + y}{5} = \frac{24}{5}$$

43: $$\frac{3x - 4y}{3} - \frac{2x - 3y}{5} = \frac{7}{15}$$
$$\frac{2x - y}{2} + \frac{x + 5y}{3} = \frac{23}{6}$$

44: $$\frac{3x + y}{7} - \frac{3x - 5y}{2} = 10$$
$$\frac{x + y}{2} + \frac{7x - y}{4} = 8$$

45: $$bx + ay = a + b$$
$$3bx - 2ay = 3a - 2b$$

46: $$2ax + by = 2a^2$$
$$x + y = 3a - b$$

47: $$ax + by = a^2 + b^2$$
$$a^2x + b^2y = a^2b + ab^2$$

48: $$abx - by = b - 1$$
$$a^2x + b^2y = a + b$$

Resuélvanse para $1/x$ y para $1/y$, y después para x y para y, las ecuaciones de los problemas 49 a 56.

49: $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$$
$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 16$$

50: $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-7}{12}$$
$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{11}{12}$$

51: $$\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = \frac{-3}{2}$$
$$\frac{5}{x} + \frac{1}{y} = \frac{23}{12}$$

52: $$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 1$$
$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 11$$

53: $$\frac{9}{x} + \frac{5}{y} = -1$$
$$\frac{3}{x} - \frac{10}{y} = -5$$

54: $$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5$$
$$\frac{5}{x} - \frac{2}{y} = -16$$

55: $$\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 3$$
$$\frac{9}{x} + \frac{20}{y} = -1$$

56: $$\frac{10}{x} + \frac{9}{y} = 1$$
$$\frac{5}{x} - \frac{6}{y} = -3$$

57: Si $I_a = \dfrac{E}{R + R_a}$ y $E = RI$, demuéstrese que $R = \dfrac{R_aI_a}{I - I_a}$.

6.5 TRES ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON TRES INCOGNITAS

La solución, cuando ésta existe, de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, consiste de tres números, uno por cada incógnita, que satisfacen todas las ecuaciones dadas. Para encontrar dicha solución se elimina primero una de las variables. Es decir, se obtienen a partir de las ecuaciones dadas dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cuya solución da dos de los números que se buscan. El valor de la tercera incógnita puede entonces determinarse por sustitución.

El método más frecuentemente empleado para eliminar la primera incógnita es el de adición o sustracción. El procedimiento se ilustrará a través de los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$3x - 2y + 3z = 16 \quad (1)$$
$$x + 3y - 6z = -23 \quad (2)$$
$$5x + 4y - 2z = -9 \quad (3)$$

Solución: Ya que el coeficiente de z en (2) es divisible entre los coeficientes de z en (1) y (3), se empieza por eliminar a z. La operación se efectúa multiplicando (1) por 2 y sumando el resultado a (2). Esto es

$$\begin{array}{rcll} 6x - 4y + 6z &=& 32 & \text{ec. } (1) \times 2 \quad (4) \\ x + 3y - 6z &=& -23 & \quad (2) \\ \hline 7x - y &=& 9 & \text{ec. } (4) + \text{ec. } (2) \quad (5) \end{array}$$

Se multiplica ahora la ecuación (3) por 3 y el resultado se resta de la ecuación (2). Se tiene

$$\begin{array}{rcll} x + 3y - 6z &=& -23 & \quad (2) \\ 15x + 12y - 6z &=& -27 & \text{ec. } (3) \times 3 \quad (6) \\ \hline -14x - 9y &=& 4 & \text{ec. } (2) - \text{ec. } (6) \quad (7) \end{array}$$

Se tienen ahora las ecuaciones (5) y (7) que contienen sólo a x y a y, y que se pueden resolver por el método del Pr. 39 como se indica a continuación.

$$\begin{array}{rcll} 14x - 2y &=& 18 & \text{ec. } (5) \times 2 \quad (8) \\ -14x - 9y &=& 4 & \quad (7) \\ \hline -11y &=& 22 & \text{ec. } (8) + \text{ec. } (7) \\ y &=& -2 & \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2$ en (5), se obtiene

$$\begin{aligned} 7x - (-2) &= 9 \\ 7x + 2 &= 9 \\ 7x &= 7 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto, los valores buscados son $x = 1$, $y = -2$. Sustituyendo estos valores en cualquiera de las tres ecuaciones originales se puede obtener z. Si se escoge (1), se tiene

$$\begin{aligned} 3(1) - 2(-2) + 3z &= 16 \\ 3 + 4 + 3z &= 16 \end{aligned}$$

resolviendo para z

$$\begin{aligned} 3z &= 16 - 7 \\ 3z &= 9 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$, y se puede comprobar sustituyendo en (2) o en (3).

EJEMPLO 2 Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$3x + 4y - 5z = 37 \quad (1)$$
$$2x - 3y + 2z = -8 \quad (2)$$
$$x - 2z = 11 \quad (3)$$

Solución: Ya que la ecuación (3) contiene únicamente a x y a z, se elimina y de las ecuaciones (1) y (2) y la ecuación resultante se resuelve con (3). Los pasos en este procedimiento son, como se indica a continuación.

$$
\begin{array}{rll}
9x + 12y - 15z = 111 & ec.\ (1) \times 3 & (4) \\
8x - 12y + 8z = -32 & ec.\ (2) \times 4 & (5) \\
\hline
17x \qquad - 7z = 79 & ec.\ (4) + ec.\ (5) & (6)
\end{array}
$$

Luego se elimina x de (3) y de (6) y se resuelve para z.

$$
\begin{array}{rll}
17x - 34z = 187 & ec.\ (3) \times 17 & (7) \\
17x - 7z = 79 & & \\
\hline
-27z = 108 & ec.\ (7) - ec.\ (6) & (6) \\
z = -4 & &
\end{array}
$$

Sustituyendo $z = -4$ en (3), se tiene

$$
\begin{aligned}
x - 2(-4) &= 11 \\
x + 8 &= 11 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Por último, sustituyendo $x = 3$, $z = -4$, en(1), se tiene

$$
\begin{aligned}
3(3) + 4y - 5(-4) &= 37 \\
9 + 4y + 20 &= 37 \\
4y &= 37 - 29 = 8 \\
y &= 2
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, la solución es $x = 3$, $y = 2$, $z = -4$.

Esta solución se puede comprobar sustituyendo estos valores en la ecuación (2).

Igualmente se puede emplear el método de sustitución para resolver tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. Incluso se recomienda este método cuando dos de las ecuaciones contienen sólo dos variables.

EJEMPLO 3 Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$
\begin{array}{rl}
2x - y \qquad = 11 & (1) \\
3x \qquad + 5z = 17 & (2) \\
2x + 5y + 4z = -3 & (3)
\end{array}
$$

Solución: Se resuelve (1) para y con respecto a x y (2) para z también respecto a x. Se sustituyen luego las expresiones resultantes para y y para z en (3) y se obtiene una ecuación con una incógnita. Resolviendo (1) para y, se tiene

$$y = 2x - 11 \qquad (4)$$

Análogamente, resolviendo (2) para z se tiene

$$z = \frac{17 - 3x}{5} \qquad (5)$$

Se sustituyen ahora y y z en (3) con los valores obtenidos en (4) y en (5) y se resuelve la ecuación que resulta como se indica a continuación.

$$2x + 5(2x - 11) + 4\left(\frac{17 - 3x}{5}\right) = -3 \qquad (6)$$

$$2x + 10x - 55 + \frac{68 - 12x}{5} = -3$$

$$10x + 50x - 275 + 68 - 12x = -15 \qquad \textit{multiplicando ambos miembros por 5}$$

$$10x + 50x - 12x = -15 + 275 - 68 \qquad \textit{combinando y transponiendo términos}$$

$$
\begin{aligned}
48x &= 192 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Si se sustituye $x = 4$ en (4) y en (5) se obtiene la solución completa $x = 4$, $y = -3$ $z = 1$.

EJERCICIO 22: RESOLUCION DE ECUACIONES CON TRES INCOGNITAS

Resuélvanse las ecuaciones siguientes para x, y y z.

1: $\begin{aligned} x + y - 2z &= 8 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= 6 \end{aligned}$

2: $\begin{aligned} x + 3y + z &= 7 \\ 3x + 6y - z &= -1 \\ 2x + 4y + z &= 6 \end{aligned}$

3: $\begin{aligned} x + 2y - 6z &= -7 \\ x - y - 2z &= 6 \\ x + 3y + 8z &= 4 \end{aligned}$

4: $\begin{aligned} 2x + y - 4z &= -9 \\ x - y + z &= 12 \\ 3x + y + 2z &= 13 \end{aligned}$

5: $\begin{aligned} 3x + 4y + z &= 20 \\ x + y + 2z &= -3 \\ 2x + 2y + z &= 9 \end{aligned}$

6: $\begin{aligned} 5x - 2y + 3z &= -4 \\ 3x + 3y + 8z &= -11 \\ 2x - y - 4z &= -11 \end{aligned}$

7: $\begin{aligned} 3x - 2y + 3z &= 25 \\ 2x - 4y + 2z &= 14 \\ x - y - z &= -4 \end{aligned}$

8: $\begin{aligned} 3x - 2y + 6z &= -15 \\ 2x + 3y - 2z &= 33 \\ 5x - 4y + 3z &= 8 \end{aligned}$

9: $\begin{aligned} 6x + 3y + 4z &= 30 \\ 5x - 2y - 3z &= 5 \\ x + 2y - z &= -11 \end{aligned}$

10: $\begin{aligned} 5x + 2y - 3z &= -25 \\ 3x + y + 4z &= 7 \\ 2x + 3y + 2z &= 16 \end{aligned}$

11: $\begin{aligned} 3x - 2y - 3z &= -6 \\ 5x + 3y - 4z &= 33 \\ 3x - 2y + z &= 14 \end{aligned}$

12: $\begin{aligned} 7x + 3y - 5z &= 21 \\ 2x + 4y + 2z &= 16 \\ 3x - 5y - 6z &= -5 \end{aligned}$

13: $\begin{aligned} 5x + 3y + 12z &= 7 \\ 5x - 3y + 6z &= 2 \\ 20x - 9y - 18z &= 3 \end{aligned}$

14: $\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 6 \\ 6x - 5y - 6z &= -3 \\ 9x + 6y - 16z &= -3 \end{aligned}$

15: $\begin{aligned} 5x + y + z &= 3 \\ 7x - y + 2z &= 4 \\ 3x + 5y - z &= 2 \end{aligned}$

16: $\begin{aligned} 2x + 3y + 7z &= 3 \\ 3x + 2y + 8z &= 3 \\ 5x - 4y - 20z &= -2 \end{aligned}$

17: $\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 3 \\ 3x - y - 2z &= -5 \\ 9x + 6y + 8z &= 4 \end{aligned}$

18: $\begin{aligned} 3x + 2y + 8z &= 3 \\ 6x - 3y + 2z &= 6 \\ 9x - y + 6z &= 8 \end{aligned}$

19: $\begin{aligned} 2x + 3y + 3z &= 10 \\ 6x - 6y + z &= -10 \\ -4x + 3y + 2z &= 12 \end{aligned}$

20: $\begin{aligned} 6x + 3y + 4z &= 14 \\ 5x + 2y + 6z &= 16 \\ 3x - 6y + 2z &= 2 \end{aligned}$

21: $\begin{aligned} x \phantom{{}+5y} + 4z &= 3 \\ y + 3z &= 9 \\ 2x + 5y - 5z &= -5 \end{aligned}$

22: $\begin{aligned} 2x + 3y &= -5 \\ 2x - 4y + 3z &= 28 \\ 3x + y + 4z &= 19 \end{aligned}$

23: $\begin{aligned} 2x + y &= 18 \\ 2y + 2z &= -2 \\ 3x - 2y - 5z &= 38 \end{aligned}$

24: $\begin{aligned} 5x + 4y &= 10 \\ 3x - 4y + 2z &= 6 \\ 8y + z &= 7 \end{aligned}$

25: $\begin{aligned} x + 3z &= -3 \\ 2y - z &= 12 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$

26: $\begin{aligned} x - 3y &= -1 \\ 3y - z &= -9 \\ x - 4y &= 1 \end{aligned}$

27: $\begin{aligned} 2x + z &= 2 \\ 3y - 2z &= 22 \\ 2x - y &= 13 \end{aligned}$

28: $\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 4x - 2z &= -2 \\ 4y + 3z &= 25 \end{aligned}$

29: Si $E = I_x(R_x + R)$, $E = I_a(R_a + R)$, y $E = IR$, demostrar que
$$R_x = \left(\frac{\dfrac{I - I_x}{I_x}}{\dfrac{I - I_a}{I_a}}\right) R_a.$$

6.6 PROBLEMAS CUYAS SOLUCIONES IMPLICAN SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

número de ecuaciones en un sistema

En el planteo de muchos problemas aparece más de una cantidad desconocida y con frecuencia la resolución de los mismos es más fácil si se introduce más de una incógnita. Sin embargo, para que el problema pueda ser resuelto se requiere que el número de ecuaciones empleadas sea igual al número de incógnitas. El procedimiento general para obtener esas ecuaciones es el mismo que el considerado en el Pr. 4.5 y el estudiante debe volver a leerlo antes de estudiar los ejemplos siguientes o de intentar resolver los problemas del ejercicio.

EJEMPLO 1 Un propietario recibió \$12 000.00 por pago de la renta de dos oficinas en el año de 1948. La renta mensual de una era \$100.00 mayor que la de la otra. ¿Cuál fue la renta mensual que recibió de cada una si la más cara estuvo desalquilada dos meses?

Solución: Si hacemos
$x =$ renta mensual de la más cara
$y =$ renta mensual de la otra.

Entonces

$$x - y = 10 \tag{1}$$

Además ya que la primera estuvo rentada por diez meses y la segunda por doce meses, se infiere que $10x + 12y$ es el total de la renta recibido. Por tanto,

$$10x + 12y = 1200 \tag{2}$$

Se tienen así las ecuaciones (1) y (2) con las incógnitas x y y, que se pueden resolver simultáneamente eliminando a y

$$\begin{array}{rcll} 12x - 12y & = & 120 & \quad ec.\ (1) \times 12 \qquad (3) \\ 10x + 12y & = & 1200 & \qquad\qquad\qquad\quad (2) \\ \hline 22x & = & 1320 & \quad ec.\ (3) + ec.\ (2) \end{array}$$

Por tanto,

$$x = 60 \qquad \textit{dividiendo ambos miembros por 22.}$$

Sustituyendo x por 60 en (1) se tiene

$$\begin{aligned} 60 - y &= 10 \\ -y &= 10 - 60 = -50 && \textit{transponiendo términos} \\ y &= 50 && \textit{dividiendo ambos términos por} - 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, las rentas mensuales fueran \$600.00 y \$500.00, respectivamente.

EJEMPLO 2 Un comerciante mezcla tabaco de cierta calidad y precio de \$28.00 por kilogramo con otro de precio \$36.00 por kilogramo y obtiene 100 kilogramos de una mezcla que vende a \$31.20 por kilogramo. ¿Cuánto usó de cada clase de tabaco?

Solución: Si hacemos
$x =$ número de kilogramos usados del de \$20.00
$y =$ número de kilogramos usados del de \$36.00

Entonces

$$x + y = 100 \tag{1}$$

puesto que se obtuvieron 100 kilos de la mezcla. Además, el valor del primero en pesos fue \$28.00x y el del segundo \$36.00y y el valor de la mezcla resultante \$31.20 (100).

Por consiguiente,

$$28x + 36y = 31.2(100) = 3120. \tag{2}$$

Por tanto, (1) y (2) son las ecuaciones deseadas que se pueden resolver eliminando a x.

$$\begin{array}{lll} 28x + 28y = 2800 & ec.\ (1) \times 28 & (3) \\ \underline{28x + 36y = 3120} & & (4) \\ \quad -8y = -320 & ec.\ (3) - ec.\ (2) & \end{array}$$

De donde se obtiene

$$y = \frac{-320}{-8} = 40,$$

Sustituyendo 40 en vez de y en (1), se tiene

$$\begin{aligned} x - 40 &= 100 \\ x &= 100 - 40 \\ x &= 60. \end{aligned}$$

Por tanto, el comerciante empleó 60 kilogramos del de precio \$28.00 y 40 kilogramos del de precio \$36.00.

EJEMPLO 3 Dos aeropuertos, A y B, están a 400 km uno de otro y B está situado al este de A. Un avión voló en 2 horas de A a B y luego regresó a A en $2\frac{1}{2}$ horas. Si durante todo el viaje estuvo soplando viento del oeste a velocidad constante, encontrar la velocidad del avión en el aire en reposo y la velocidad del viento.

Solución. Sea

$x =$ la velocidad del avión en el aire en reposo
$y =$ la velocidad del viento

luego, considerando que el viento soplaba del oeste

$x + y =$ velocidad del avión de A a B
$x - y =$ velocidad del avión durante el regreso.

Por consiguiente,

$$\frac{400}{x+y} = \text{tiempo empleado de } A \text{ a } B$$

$$\frac{400}{x-y} = \text{tiempo empleado de } B \text{ a } A.$$

De donde

$$\frac{400}{x+y} = 2 \tag{1}$$

$$\frac{400}{x-y} = 2\tfrac{1}{2} \tag{2}$$

Para eliminar las fracciones se multiplican por $x + y$ los dos miembros (1) y por $2(x - y)$ los de (2). Se tiene

$$400 = 2x + 2y \tag{3}$$
$$800 = 5x - 5y \tag{4}$$

Estas ecuaciones se resuelven simultáneamente, eliminando primero a y.

$2000 = 10x + 10y$	*ec. (3) multiplicado por 5*	(5)
$1600 = 10x - 10y$	*ec. (4) multiplicado por 2*	(6)
$3600 = 20x$	*ec. (5) + ec. (6)*	
$x = 180$		

Sustituyendo x por 180 en (3) se tiene

$$\begin{aligned} 400 &= 2(180) + 2y \\ 400 &= 360 + 2y \\ 2y &= 40 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Por tanto, la velocidad del avión en el aire en reposo era de 180 km/hr., y la velocidad del viento era de 20 km/hr.

EJEMPLO 4 Una caja registradora contiene \$50.00 en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. En total son 802 monedas, siendo 10 veces mayor el número de las de cinco centavos que el de las de diez centavos. Encontrar cuántas monedas hay de cada valor.

Solución: Sea

$v =$ número de monedas de 25 centavos.
$d =$ número de monedas de 10 centavos
$c =$ número de monedas de 5 centavos.

Ahora, se establecen las tres siguientes ecuaciones de primer grado con v, d y c.

$25v + 10d + 5c = 5000$	*puesto que \$50.00 = 5000 centavos*	(1)
$v + d + c = 802$	*que es el total de monedas*	(2)
$c = 10d$	*ya que hay 10 veces más monedas de cinco centavos que de diez centavos*	(3)

Si se sustituye c por $10d$, según su valor, ec. (3), en las ec. (1) y (2) se obtienen dos ecuaciones de primer grado con d y v. De (1), se tiene

$25v + 10d + 5(10d) = 5000$	*expresión que se reduce a*	
$25v + 60d = 5000$	*Además de (2) se tiene*	(4)
$v + d + 10d = 802$		
$v + 11d = 802$		(5)

Eliminando v de (4) y (5) como se muestra

$$
\begin{array}{rll}
25v + 60d = 5{,}000 & & (4) \\
25v + 275d = 20\,050 & ec.\ (5) \times 25 & (6) \\
\hline
-215d = -\ 15{,}050 & ec.\ (4) - ec.\ (6) & \\
-\ 215d = -\ 15{,}050 & & \\
d = 70 & &
\end{array}
$$

Sustituyendo el valor de d en (3), se tiene

$c = 10(70) = 700$

Por último, sustituyendo $d = 70$ en (5)

$$v + 11(70) = 802$$
$$v = 802 - 770 = 32.$$

Consecuentemente en la caja hay 32 monedas de veinticinco centavos, 70 de diez centavos y 700 de cinco centavos.

EJERCICIO 23. PROBLEMAS RELACIONADOS CON ECUACIONES SIMULTANEAS

Resuélvanse los problemas siguientes introduciendo más de una variable.

1: Dos hermanos compraron, a partes iguales, un receptor de televisión con costo de $2 200.00. El hermano mayor invirtió en esa operación la mitad de sus ahorros y el hermano menor las dos terceras partes de los suyos. Después de haber efectuado la compra todavía reunían entre los dos $1 600.00 de ahorros. Determínese la cantidad ahorrada por cada uno, previa a la compra.

2: En ocasión de un día de asueto un estudiante aprovechó para ir al hogar paterno, yendo y viniendo por diferentes caminos. El viaje de regreso fue 4 kilómetros más corto que la mitad del viaje de ida. El recorrido total, ida y regreso, fue de 68 kilómetros. Determínese la distancia recorrida en cada tramo.

3: Tomás pagó a Ricardo $300.00 por concepto de un adeudo. Después de efectuado el pago Tomás tenía aún $25.00 más que la quinta parte del total de Ricardo. Si juntos totalizaban $625.00, ¿cuánto tenían cada uno antes del pago?

4: Un cuidador ocasional de automóviles cobra 50 centavos por hora y por automóvil, antes de medianoche, y 75 centavos después de medianoche. Durante un cierto tiempo ganó $10.50. El número de horas que trabajó antes de medianoche fue el cuádruple, menos una hora, de las que trabajó después de medianoche. Determínese el número de horas trabajado en cada período.

5: El gerente de una librería estimaba un ingreso de $400.00 en la venta de plumas, $5.00 cada una, y lápices, $2.50 cada uno. Después de haber vendido la mitad de las plumas y la cuarta parte de los lápices reduce el precio de las primeras a $4.50 y el de los segundos a $2.25. Este remanente le produce un ingreso de $202.50. ¿Cuántas plumas y cuántos lápices vendió en total?

6: La colecta de la Cruz Roja en una escuela primaria fue de $45.00. Si había 650 niños y cada uno aportó una moneda de cinco centavos o una de diez centavos encuéntrese cuántas monedas de cada valor hubo en la colecta.

7: A cierta ciudad situada en una isla se transporta diariamente un promedio de 50 bolsas de correspondencia, haciéndose parte del recorrido en camión y parte en helicóptero. En cada viaje el camión transporta 10 bolsas y el helicóptero 6. El helicóptero efectúa un viaje más que el doble de viajes del camión ¿Cuántos viajes efectúa cada uno al día?

8: Jaime sabe que el automóvil rinde 7 kilómetros por litro cuando usa gasolina etílica de precio $1.00 por litro y que el automóvil rinde 6 kilómetros por litro cuando usa gasolina regular de precio $0.90 por litro. En cierta ocasión realiza

un viaje de 1 000 kilómetros y gasta $151.00 por concepto de gasolina. ¿Cuántos litros de gasolina de cada tipo compró?

9: Francisco ganó $11 500.00 trabajando jornada parcial durante diez meses y jornada completa durante otros dos. Federico ganó $8 750.00 trabajando tan sólo nueve meses de jornada parcial y un mes de jornada completa. Determínesé él salario mensual cubierto para el caso de jornada parcial y para el caso de jornada completa.

10: Carlos esperaba pagar $900.00 por un par de binoculares y una radio de transistores. Mediante una selección cuidadosa pudo ahorrar la octava parte del costo estimado de los binoculares y la décima parte del costo estimado de la radio, logrando con ello un ahorro de $100.00. ¿Cuánto esperaba gastar inicialmente en cada artículo?

11: Dos estudiantes tuvieron un ingreso de $690.00 por concepto de venta de dulces a razón de $1.50 el paquete y de nueces a razón de $1.00 la bolsa. Originalmente habían gastado $407.50, pagando el paquete de dulces a $1.00 cada uno y la bolsa de nueces a $0.50 cada una. ¿Cuántos paquetes de dulces y cuántas bolsas de nueces vendieron?

12: Una persona renta una casa de su propiedad y durante nueve meses recibe en pago de renta una cantidad que es $750.00 menor que el 10 por ciento del costo de la casa. Luego, durante otros doce meses, a lo largo de los cuales la renta mensual es $100.00 menor que en aquellos primeros nueve meses, recibé por concepto de renta $1 800.00 más que el 10 por ciento del costo de la casa. Determínese el costo de la casa y el monto de la primera renta mensual.

13: Cierta organización estudiantil organizó una fiesta a la que asistieron 133 de sus miembros. El ingreso total por concepto de boletos de admisión fue $5 845.00. El precio de los boletos fue $30.00 por socio o $65.00 por socio y su pareja. ¿Cuántos de ellos asistieron con pareja?

14: Como producto de dos inversiones una persona recibe anualmente $302.55. Una de las inversiones produce 4 por ciento y la otra 3 por ciento. Si las inversiones se intercambiaran una por otra ganaría $280.90. ¿A cuánto asciende cada inversión?

15: Un piloto vuela 1 410 kilómetros hacia el norte y luego regresa a su punto de partida. Durante todo el viaje sopló viento del norte con velocidad constante. Determínese la velocidad del avión relativa al aire y la velocidad del viento, sabiendo que en el viaje de ida empleó cuatro horas veinticuatro minutos y en el viaje de regreso tan sólo cuatro horas.

16: Dos grupos de turistas parten al mismo tiempo de un albergue, en direcciones opuestas, para recorrer una carretera escénica cuyo trazo es el de una curva cerrada. Cuando vuelven a encontrarse, uno de los grupos ha recorrido 38 kilómetros y el otro 57 kilómetros. Determínese la velocidad promedio de cada grupo si el segundo regresó al albergue una hora antes que el primero.

17: Un ingeniero dedicado a la perforación de pozos petroleros sale de su campamento viajando en su propio automóvil hasta la estación más cercana de autobuses; ahí toma un autobús y se dirige a la ciudad más próxima a pasar el fin de semana. Mientras viajaba en su automóvil conservó una velocidad promedio de 65 kilómetros por hora y cuando viajaba en autobús una velocidad promedio de 80 kilómetros por hora. Para el recorrido total empleó cinco horas. La gasolina del automóvil le costó a razón de 23.4 centavos por kilómetro y el pasaje en autobús a razón de 31.3 centavos por kilómetro. Determínese la distancia recorrida en cada vehículo sabiendo que el viaje le costó $115.00.

18: Dos hermanos cortan el césped de un cierto terreno en $2\frac{2}{9}$ horas. En una ocasión el hermano mayor trabaja solo durante tres horas y luego el otro hermano termina el trabajo en $1\frac{1}{4}$ horas. ¿Cuánto tiempo le tomaría a cada muchacho ha-

cer todo el trabajo él solo?

19: La distancia entre una ciudad y el pueblo más próximo es 96 kilómetros .Un camión de correos sale a las ocho horas de la ciudad rumbo al pueblo. y a las ocho treinta y seis horas sale del pueblo un autobús rumbo a la ciudad. A las nueve horas se cruzan en el camino. En el viaje de regreso vuelven a encontrarse a las diez cincuenta horas. Determínese la velocidad de cada vehículo sabiendo que cada uno permaneció treinta minutos en su punto de destino.

20: Un jardinero plantó dos macizos de jardín con camelias, cuyos costos eran $6.00 y $3.00 por planta. El costo de plantas para uno de los macizos fue $27.00 y para el otro $30.00. En éste el número de plantas de $6.00 fue $\frac{2}{3}$ de las que había en aquél y el número de plantas de $3.00 doble en éste que en aquél. ¿Cuántas plantas de cada tipo se usaron en total?

21: Los propietarios de un centro comercial en el que 70 por ciento del área se empleaba para estacionamiento de automóviles compraron un terreno adyacente, dedicando 85 por ciento del mismo a estacionamiento y el resto a edificios. El área así aumentada alcanzó un total de 30,000 metros cuadrados, 75 por ciento del cual se destinó a estacionamiento de automóviles. Determínense el área original del centro comercial y el área de terreno comprada.

22: Alicia y Beatriz trabajaron juntas cinco horas, logrando realizar en este tiempo la mitad del trabajo que pensaban presentar en una exposición. La tarde siguiente Alicia trabajó sola durante dos horas, luego se le unió Beatriz y juntas terminaron en cuatro horas más. ¿Cuánto tiempo le hubiera tomado a cada una hacer sola ese trabajo?

23: Por concepto de transporte un agente viajero que utiliza su propio auto está autorizado a cargar a su compañía $1.00 por kilómetro, más $37.50 diarios por gastos generales. Cierto mes presenta la cuenta que cubre ambos gastos por valor de $1,040.00. El cargo por el número de kilómetros recorridos fue $456.00 menor que el cargo por gastos generales. Determínese el número de kilómetros recorridos y el número de días así trabajados.

24: Una persona envía 340 kilogramos de mercancía de Nueva York a Boston y 364 kilogramos de Nueva York a Filadelfia. La tarifa en ambos casos es la misma, 14 centavos por kilogramo por cada 100 kilómetros. La factura importó $470.00 y ampara un total de 525 kilómetros. ¿Qué, tan lejos queda Nueva York de Boston y Nueva York de Filadelfia?

25: Alicia gastó $410.00 en un vestido, un par de zapatos y un bolso. El costo combinado de bolso y zapatos es $10.00 mayor que el costo del vestido. El costo combinado de vestido y bolso es $70.00 menor que el doble del costo de los zapatos. ¿Cuánto importa cada artículo?

26: El salario promedio de Guillermo, Roberto y Juan, es de $820.00. El salario promedio de Roberto y Guillermo es de $800.00. El salario promedio de Guillermo y Juan es de $810.00. Determínese el salario mensual de cada uno.

27: Una organización agrupa a sus asociados en tres categorías; blancos, azules y amarillos. El total de asociados es 285. El número combinado de amarillos y azules es mayor en 15 unidades que el doble del número de blancos. El número combinado de blancos y azules es mayor en 45 unidades que el triple del número de amarillos. Determínese el número de miembros que pertenecen a cada categoría.

28. Una negociación dedicada a la venta de automóviles recibió 30 unidades. El precio para los tipo sedán se fijó en $67 500.00, para los tipo convertible en $75 000.00 y para los tipo camioneta en $78 000.00. El vendedor esperaba tener un ingreso bruto de $2,185,000.00 y que el ingreso por la venta de sedanes excediera en $157 500.00 al ingreso por la venta de camionetas. ¿Cuántas unidades de cada tipo recibió?

29: Una asociación estudiantil recreativa gastó $3.025.00 en la compra de 650 ar-

tículos para después venderlos en una fiesta. Los artículos indicados y sus precios fueron: ramilletes de flores, \$7.50; listones con leyendas, \$0.50; banderolas, \$6.00. Después de vender todos los artículos, menos 10 ramilletes y 25 listones, se tuvo un ingreso bruto de \$4 087.50. Los precios de venta fueron: ramilletes de flores, \$10.00; listones con leyendas, \$2.50; banderolas, \$7.50. Determínese el número de artículos de cada tipo comprados inicialmente.

30: Tres jóvenes, Teodoro, Raymundo y Juan, acordaron poner una capa de cera y con ello dar lustre a sus autos. El primer día, trabajando entre los tres, terminaron el auto de Teodoro en $1\frac{1}{2}$ hora. El segundo día Teodoro ayudó a Juan a pulir su auto en dos horas y el tercer día Juan ayudó a Raymundo a lustrar su auto en $2\frac{1}{4}$ horas. ¿Cuánto tiempo hubiera necesitado cada muchacho para lustrar su propio auto suponiendo que cada uno de ellos desarrollara igual trabajo y que da lo mismo un auto que otro?

31: Una aspirante a estrella cinematográfica viajó por tren, con velocidad promedio de 80 kilómetros por hora, desde su pueblo natal hasta la Estación Unión de los Angeles. Ahí tomó un taxi, velocidad promedio 32 kilómetros por hora, que la llevó hasta el centro de los Angeles, y luego un autobús que con velocidad promedio de 22.4 kilómetros por hora la llevó hasta Hollywood. El recorrido totalizó 575 kilómetros y le tomó 7.6 horas. El tiempo empleado en el recorrido en autobús fue 5 veces al empleado en el recorrido en taxi. ¿Cuánto tiempo empléó viajando en cada uno de los tramos así descritos?

32: Un panadero produce 3 variedades de galletas, cuyos precios son \$0.60, \$0.90 y \$1.20 por docena, respectivamente. Con las variedades de 60 centavos y de 90 centavos forma una mezcla con precio resultante de \$0.80 por docena. Lo que le queda de la variedad de 60 centavos lo mezcla con la variedad de \$1.20 y produce otra mezcla con precio de venta de \$1.00. Si originalmente tenía en total 12 docenas, ¿cuántas docenas de cada variedad habrá en cada mezcla?

6.7 SOLUCION DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS POR MEDIO DE DETERMINANTES

En otros parágrafos de este capítulo se estudiaron los métodos algebraicos que permiten la resolución de dos o tres ecuaciones lineales. Al resolver los ejercicios correspondientes el lector habrá apreciado que el trabajo para hallar las soluciones puede llegar a ser de cuantía, principalmente cuando aumenta el número de ecuaciones del sistema. Para simplificar tal operación es frecuente hacer uso de un artificio o invento* que se describe en lo que resta del presente capítulo. Para observar el método se partirá de la resolución de dos ecuaciones lineales *generales*, en donde a, b, c y d representarán los coeficientes de las dos variables, y m y n los términos independientes. Esto es, dadas

$$ax + by = m \tag{6.14}$$
$$cx + dy = n \tag{6.15}$$

* Debido a Leibniz (1646-1716) en lo que toca al mundo occidental. Un matemático japonés, Seki Kowa (1647-1708), produjo el mismo invento diez años antes que Leibniz. Su trabajo no fue conocido oportunamente a causa del aislamiento en que se encontraba su país en aquella época.

las resolveremos para y por el método de la adición y sustracción, el cual es aplicable a cualquier sistema de ecuaciones de primer grado. El mínimo común múltiplo de los coeficientes de y en (6.14) y (6.15) es bd; por tanto, por el método del Pr. 39, se obtiene

$$adx + bdy = dm \qquad ec\ (6.14) \times d \tag{6.16}$$
$$bcx + bdy = bn \qquad ec\ (6.15) \times b \tag{6.17}$$

$$adx - bcx = dm - bn \qquad ec\ (6.16) - ec\ (6.17)$$
$$x(ad - bc) = dm - bn$$
$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc} \tag{6.18}$$

Análogamente, se obtiene

$$y = \frac{an - cm}{ad - bc} \tag{6.19}$$

Si en (6.18) y en (6.19), $ad - bc = 0$, entonces no existen valores únicos para x o para y y el sistema de ecuaciones es *inconsistente* o *dependiente.*

Las expresiones (6.18) y (6.19) se pueden emplear como fórmulas para obtener la solución de todo par de ecuaciones consistentes. Sin embargo, su empleo en la forma anterior es relativamente difícil por el esfuerzo de memorización que requiere. Este se puede simplificar notablemente si se introduce la notación que se indica en seguida.

Se define la ordenación de cuatro números que ocupan los vértices de un cuadrado.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

como igual a $ad - bc$. Tal relación puede recordarse con mayor facilidad por medio del diagrama siguiente

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{6.20}$$
$$- \qquad +$$

Cada flecha indica el producto de las letras que conecta. El signo menos al final de la flecha que va del extremo superior derecho al extremo inferior izquierdo indica que ese producto debe sustraerse del otro. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (4)(2) = 15 - 8 = 7$$

$$-\qquad +$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) - (7)(-3) = -10 + 21 = 11$$

Lo anterior se resume en la definición siguiente: La ordenación cuadricular de cuatro números

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determinante de segundo orden

se denomina *determinante de segundo orden* y su *valor* o *desarrollo* es $ad - bc$. Las letras a, b, c y d se llaman *elementos del determinante.*

Las soluciones (6.18) y (6.19) de las ec. (6.14) y (6.15) se pueden escribir del modo siguiente, de acuerdo con la notación recién dada.

$$dm - bn = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$$

y

$$an - cm = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$$

por tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \tag{6.21}$$

El determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

determinante de los coeficientes

se conoce como *determinante de los coeficientes.*

Los determinantes de segundo orden se pueden emplear para resolver todo par de ecuaciones consistentes de primer grado y la solución se encuentra mediante la aplicación de los pasos siguientes:

1. En cada ecuación se transponen y ordenan los términos de tal mo-

pasos para resolver un par de ecuaciones por medio de determinantes

do que los términos constantes aparezcan en el miembro de la derecha y los que contienen los variables en el de la izquierda. Estos deben tener el mismo orden en cada ecuación (6.14).

2. Se indica cada solución (o valor de una de las incógnitas) como cociente de dos determinantes. El divisor (o denominador) es siempre el determinante de los coeficientes.

3. El dividendo (o numerador) de la solución para una incógnita es el determinante que se obtiene al sustituir en el determinante de los coeficientes los coeficientes de la incógnita por los términos constantes.

EJEMPLO Para resolver por determinantes

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}$$

se observa primero que el determinante de los coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Luego, de acuerdo con el paso 3, se reemplazan en ese determinante los coeficientes de x, 2 y 3, por los términos constantes 8 y 1 para obtener el numerador del valor de x. Se tiene así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8(-1) - (3)(1)}{2(-1) - (3)(3)} = \frac{-8 - 3}{-2 - 9} = \frac{-11}{-11} = 1$$

Análogamente,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 24}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2$$

6.8 DETERMINANTES DE TERCER ORDEN.

La definición dada en el párrafo anterior se puede hacer extensiva a cualquier ordenación cuadricular de números que tenga cualquier cantidad de hileras. A continuación se definirá el determinante de tercer orden y se indicará cómo se obtiene su desarrollo.

La ordenación cuadricular

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{6.22}$$

determinante de tercer orden

se llama *determinante de tercer orden* y su valor o desarrollo es

$$a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3.$$

NOTA: El lector debe observar que en cada producto del desarrollo hay una letra de cada hilera y una de cada columna. Además, cada producto va precedido de signo más o de signo menos, según sea para o impar el número de veces que un índice mayor precede a uno menor, estando las letras ordenadas alfabéticamente.

El determinante de tercer orden (6.22) se puede desarrollar también escribiendo nuevamente las dos primeras columnas y multiplicando como indican las flechas (6.22a).

Dos factores determinan el signo del producto; los signos de los propios coeficientes y, por la definición de determinante, la dirección de la multiplicación. Así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ - & - & - & + & + \quad + \end{array}\right. \tag{6.22a}$$

$$= a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

6.9 RESOLUCION DE UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES DE PRIMER GRADO POR MEDIO DE DETERMINANTES.

En el Pr. 6.8 se advierte que una determinante de tercer orden puede ser utilizada para resolver un sistema de tres ecuaciones de primer grado. Para ello, como en el Pr. 6.7, comenzamos escribiendo las ecuaciones, empleando a_1, a_2 y a_3 como coeficientes de x; b_1, b_2 y b_3 como coeficientes de y; c_1, c_2, y c_3 como coeficientes de z y d_1, d_2 y d_3 como términos constantes. El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Si se resuelve simultáneamente el sistema (6.23) de acuerdo con el método de eliminación por suma y resta (Pr. 6.5) se obtiene

$$x = \frac{d_1b_2c_3 + d_3b_1c_2 + d_2b_3c_1 - d_3b_2c_1 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$$

con tal de que el denominador no sea cero.

Este resultado se puede expresar, como cociente de dos determinantes, del modo siguiente

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad D \neq 0 \tag{6.24}$$

En la representación anterior debe notarse que el símbolo Nx representa el determinante del numerador para el valor de x. Después se empleará una notación análoga para y y para z. Igualmente debe observarse que Nx se puede obtener reemplazando en D cada a por la correspondiente d.

$$y = \frac{N_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D} \tag{6.25}$$

De igual manera, resolviendo para y y para z, se tiene

$$z = \frac{N_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{D} \tag{6.26}$$

regla para determinar el numerador de la incógnita

Cualquiera que sea la incógnita que se despeje, *su numerador se obtiene sustituyendo en D sus coeficientes por los términos constantes.*

EJEMPLO Resolver el siguiente sistema por medio de determinantes.

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 12 \\ x + y + z &= 6 \\ x - 2y - z &= -2 \end{aligned}$$

Solución: El denominador de cada una de las incógnitas es el determinante de los coeficientes y su valor

$$\mathrm{D} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$
\begin{aligned}
&= (3)(1)(-1) + (2)(1)(1) + (-1)(1)(-2) \\
&\qquad\qquad - (-1)(1)(1) - (3)(1)(-2) - (2)(1)(-1) \\
&= -3 + 2 + 2 + 1 + 6 + 2 \\
&= 10
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en D los coeficientes de x por los términos constantes

$$
N_x = \left|\begin{array}{ccc|cc}
12 & 2 & -1 & 12 & 2 \\
6 & 1 & 1 & 6 & 1 \\
-2 & -2 & -1 & -2 & -2
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
- & - & - & + & + & +
\end{array}
$$

según la ec. (6.24) y remplazando el coeficiente de x en D por el término constante.

$$
\begin{aligned}
&= -12 - 4 + 12 - 2 + 24 + 12 \\
&= 30
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
N_y = \left|\begin{array}{ccc|cc}
3 & 12 & -1 & 3 & 12 \\
1 & 6 & 1 & 1 & 6 \\
1 & -2 & -1 & 1 & -2
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
- & - & - & + & + & +
\end{array}
$$

según ec. (6.25)

$$
\begin{aligned}
&= -18 + 12 + 2 + 6 + 6 + 12 \\
&= 20
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{30}{10} = 3 \quad \text{and} \quad y = \frac{N_y}{D} = \frac{20}{10} = 2$$

El valor de z se puede determinar sustituyendo a x y a y por sus valores en cualquiera de las ecuaciones originales. Usando la segunda, se tiene

$$
\begin{aligned}
3 + 2 + z &= 6 \\
z &= 1
\end{aligned}
$$

En consecuencia, la solución es $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

EJERCICIO 24: DETERMINANTES

Desarróllense los determinantes de los problemas 1 a 16.

1: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ **2:** $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ **3:** $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ **4:** $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$

5: $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$ **6:** $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$ **7:** $\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 11 \end{vmatrix}$ **8:** $\begin{vmatrix} -8 & -6 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$

9: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ **10:** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ **11:** $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix}$ **12:** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

13: $\begin{vmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ 14: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ 15: $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 11 \\ 8 & 3 & -5 \\ 12 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ 16: $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

Resuélvanse por medio de determinantes los siguientes sistemas de ecuaciones.

17: $\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 3x - 4y &= 1 \end{aligned}$

18: $\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}$

19: $\begin{aligned} 4x + y + 1 &= 0 \\ 3x + 2y &= 3 \end{aligned}$

20: $\begin{aligned} 4x + 3y &= -2 \\ x - y + 4 &= 0 \end{aligned}$

21: $\begin{aligned} x + 6y &= 6 \\ 2x - 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$

22: $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 6x - 2y &= -1 \end{aligned}$

23: $\begin{aligned} 4x + 2y &= 1 \\ 4x - 3y &= 1 \end{aligned}$

24: $\begin{aligned} 6x - y &= 1 \\ 3x - y + 1 &= 0 \end{aligned}$

25: $\begin{aligned} 2x - 2y &= -2a \\ x + y &= a + 2b \end{aligned}$

26: $\begin{aligned} 3bx - 2ay &= ab \\ 2abx + 3a^2y &= 5a^2b \end{aligned}$

27: $\begin{aligned} 2x + y &= 3a - b \\ ax + by &= a^2 + b^2 \end{aligned}$

28: $\begin{aligned} 2x + 2y &= 2b \\ x + 3y &= b + 2a \end{aligned}$

29: $\begin{aligned} 3x - 2y - z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ x - y + 2z &= 7 \end{aligned}$

30: $\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 1 \\ 4x + y - 5z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= -6 \end{aligned}$

31: $\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 2 \\ 4x + 2y - 3z &= -1 \\ 2x - y + 5z + 11 &= 0 \end{aligned}$

32: $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 3 \\ 3x - 3y + z &= 0 \\ 4x + y + 5z - 1 &= 0 \end{aligned}$

33: $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z - 2 &= 0 \\ 4x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$

34: $\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 5 \\ 6x + 3y - 2z &= 2 \\ 3x - 4y + 8z &= 5 \end{aligned}$

35: $\begin{aligned} 3x + 4y - 6z &= -3 \\ x + y + z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$

36: $\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ x - 3y + 4z &= 2 \\ 3x - y + 6z &= 5 \end{aligned}$

37: $\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ 2y - z &= 2 \\ 3x - 2z - 5 &= 0 \end{aligned}$

38: $\begin{aligned} x - z &= 1 \\ 2y + z &= 0 \\ x + 4y &= -1 \end{aligned}$

39: $\begin{aligned} x - 2y + 1 &= 0 \\ 3x + 2z &= 9 \\ 3y - 4z &= 6 \end{aligned}$

40: $\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ x - z &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$

41: $\begin{aligned} x - y + z &= 2a \\ 3x + y - z &= 2a \\ 2x - 3y - 2z &= 5b \end{aligned}$

42: $\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 3a \\ 4x - 2y + 3z &= b \end{aligned}$

43: $\begin{aligned} x + 2y + z &= 5a \\ 3x - y + 3z &= a \\ 2x - y + 3z &= 2b \end{aligned}$

44: $\begin{aligned} x - y - z &= a + 2b \\ 2x - 3y - z &= 0 \\ 3x - 3y - z &= 3a \end{aligned}$

7 EXPONENTES Y RADICALES

EN EL PR. 1.6 SE TRATÓ DE MANERA BREVE con productos del tipo $a \times a$. escritos en la forma a^2, y con productos del tipo $a \times a \times a \cdots$ hasta n factores, escritos en la forma a^n. El término a^n recibe el nombre de potencia enésima de a, y n, el de exponente de la base a.

Hasta este momento la mayor parte de las expresiones algebraicas usadas en este libro han sido, por lo común, sumamente simples y los exponentes de las incógnitas o de las cantidades conocidas han sido números enteros, relativamente pequeños. Sin embargo, no son aquellos los casos típicos del álgebra y, por el contrario, es frecuente el uso de exponentes que no son números pequeños. Uno de los propósitos del presente capítulo es ampliar el significado de exponente y dar al lector la base adecuada para operar con términos exponenciales.

Los términos exponenciales, esto es, potencias de números, se encuentran asociados con términos radicales, esto es, raíces de números.* Una de las raíces cuadradas de 4 es $+2$ y tal hecho puede escribirse $\sqrt{4} = +2$, en donde $\sqrt{\ }$ recibe el nombre de signo radical. De manera análoga, $\sqrt[4]{16}$, es la raíz cuarta de 16, y por extensión al dominio de las literales, $\sqrt[n]{a}$, es la raíz enésima de a. Obviamente, términos tales como $\sqrt[n]{a}$ no pueden evaluarse en tanto que no se asignen valores numéricos a a y a n; pero pueden en cambio, ser operados algebraicamente. Determinar cómo puede hacerse esto último es el segundo propósito del presente capítulo.

* La palabra radical, por su raíz latina *radix*, significa raíz.

7.1 LEYES DE LOS EXPONENTES.

En los primeros seis parágrafos se ampliarán algunos conceptos acerca de los exponentes y se enunciarán otras leyes más acerca de su uso. Para conveniencia del lector se presentan a continuación en forma de lista tanto la definición de exponenciación como diversas leyes anteriormente expuestas.

$a^n = a \times a \times a \cdots n$ factores. *Pr. 1.6* (7.1)

En (7.1), la letra a se llama *base* y la letra n se llama *exponente.*

En las ecuaciones (7.2) a (7.6) m y n son enteros positivos.

▶ $a^m a^n = a^{m+n}$ *ec. (1.4)* (7.2)

▶ $(ab)^n = a^n b^n$ *ec. (1.5)* (7.3)

▶ $(a^m)^n = a^{mn}$ *ec. (1.6)* (7.4)

▶ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0 \quad m > n$ *ec. (1.7)* (7.5)

▶ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$ *ec. (1.8)* (7.6)

▶ $a^0 = 1 \quad a \neq 0$ *ec. (1.13)* (7.7)

Debe observarse que en (7.7) se excluye el caso $a = 0$ por las razones siguientes: Si haciendo uso del método del Pr. 1.10 se busca una interpretación para 0^0, se obtiene $0^n/0^n = 0/0$, la cual no tiene ningún valor definido. En consecuencia, no es posible asignar ningún valor a 0^0.

En los parágrafos 1.6 y 1.8 se dieron las demostraciones de las leyes (7.2) a (7.5) y la de (7.6) se da a continuación:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \cdots \text{to } n \text{ factors} && \textit{según (7.1)} \\
&= \frac{a \times a \times a \cdots \text{to } n \text{ factors}}{b \times b \times b \cdots \text{to } n \text{ factors}} && \textit{según (3.1)} \\
&= \frac{a^n}{b^n} && \textit{según (7.1)}
\end{aligned}$$

En este punto el lector debe revisar los ejemplos puestos al final de los Prs. 1.6 y 1.8

7.2 EXPRESIONES EXPONENCIALES CON EXPONENTES ENTEROS POSITIVOS Y EXPONENTES CERO.

Para simplificar una expresión que comprende exponentes enteros positivos y exponentes cero, se efectúan todas las operaciones posibles de acuerdo con las leyes (7.2) a (7.7). Si el resultado es una fracción, se reduce a su mínima expresión.

EJEMPLO 1 Simplificar $\left(\dfrac{2x^3y^4}{z^3}\right)^4\left(\dfrac{3y^2z^3}{2x^2}\right)^2$

Solución: Para simplificar se efectúan los pasos siguientes

1. Se aplican (7.3) y (7.6) a las expresiones que están dentro de los paréntesis.
2. Se aplica (7.4) a todas las expresiones así obtenidas y que están en la forma de *potencia de una potencia.*
3. Se efectúa la multiplicación que quede indicada en el resultado obtenido en el paso anterior.
4. Se reduce a su mínima expresión el resultado obtenido en el paso anterior, dividiendo numerador y denominador por el mayor factor que les sea común.

Efectuando los pasos indicados, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2x^3y^4}{z^3}\right)^4\left(\frac{3y^2z^3}{2x^2}\right)^2 &= \left[\frac{2^4(x^3)^4(y^4)^4}{(z^3)^4}\right]\left[\frac{3^2(y^2)^2(z^3)^2}{2^2(x^2)^2}\right] && \textit{según (7.3) y (7.6)}\\
&= \left(\frac{16x^{12}y^{16}}{z^{12}}\right)\left(\frac{9y^4z^6}{4x^4}\right) && \textit{según (7.4)}\\
&= \frac{144x^{12}y^{20}z^6}{4x^4z^{12}}\\
&= \frac{36x^8y^{20}}{z^6} && \textit{dividiendo numerador y denominador entre } 4x^4z^6
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Simplificar la expresión $\left(\frac{12x^{2a-2}}{6x^{a-2}}\right)^4\left(\frac{1}{2x^{2a}}\right)^2$

Solución: La simplificación es más fácil si se aplica primero (7.5) a la expresión contenida en el primer paréntesis; se usan luego (7.3), (7.4) y (7.6), y, finalmente, se simplifica el resultado obtenido. Las operaciones son

$$\begin{aligned}
\left(\frac{12x^{2a-2}}{6x^{a-2}}\right)^4\left(\frac{1}{2x^{2a}}\right)^2 &= [2x^{2a-2-(a-2)}]^4\left(\frac{1}{2x^{2a}}\right)^2 && \textit{según (7.5)}\\
&= (2x^{2a-2-a+2})^4\left(\frac{1}{2x^{2a}}\right)^2\\
&= (2x^a)^4\left(\frac{1}{2x^{2a}}\right)^2\\
&= (16x^{4a})\left(\frac{1}{4x^{4a}}\right) && \textit{según (7.3), (7.4) y (7.6)}\\
&= \frac{16x^{4a}}{4x^{4a}}\\
&= 4x^0 && \textit{según (7.5)}\\
&= 4(1) = 4 && \textit{según (7.6)}
\end{aligned}$$

NOTA: La solución anterior muestra cada paso en el proceso de simplificación. Después de cierta práctica se pueden efectuar mentalmente muchos de esos pasos y obtener más rápidamente el resultado.

La ley (7.3) leída de derecha a izquierda se puede usar para obtener el producto de dos potencias iguales. Por ejemplo, $(2a^3)^4(3a^2)^4 = (6a^5)^4$. Cuando se multiplican potencias iguales es más conveniente aplicar (7.3) de ese modo y luego proceder a la multiplicación. La Ley (7.6) se puede usar de manera análoga al operar con cocientes de potencias iguales.

EJEMPLO 3 Simplificar la expresión $\left(\frac{2a^2c^3}{15b^4}\right)^3\left(\frac{30b^6}{4a^2c^2}\right)^3$.

Solución. Si el procedimiento anterior se aplica a la expresión se tiene

$$\left(\frac{2a^2c^3}{15b^4}\right)^3\left(\frac{30b^6}{4a^2c^2}\right)^3 = \left[\left(\frac{2a^2c^3}{15b^4}\right)\left(\frac{30b^6}{4a^2c^2}\right)\right]^3 \qquad \textit{según (7.3)}$$
$$= \left(\frac{60a^2b^6c^3}{60a^2b^4c^2}\right)^3$$
$$= (a^0b^2c)^3 \qquad \textit{según (7.5)}$$
$$= (b^2c)^3 \qquad \textit{según (7.7)}$$
$$= b^6c^3 \qquad \textit{según (7.3) y (7.4)}$$

NOTA 1. Al aplicar (7.4) se debe observar que el exponente dentro del paréntesis se multiplica por el del exterior. Por ejemplo, $(2a^2)^3 = 8a^{2(3)} = 8a^6$.

NOTA 2. Cuando se multiplican dos potencias de la misma base *se conserva la base* y se suman los exponentes. Por ejemplo $(2a^2)^3\ (2a^2)^2 = (2a^2)^5$.

NOTA 3. Cuando se multiplican dos potencias iguales de bases diferentes *se conserva el exponente* y se multiplican las bases, $(3a^2)^3(2a^4)^3 = (6a^6)^3$

EJERCICIO 25: SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES EXPONENCIALES

Efectúense las operaciones indicadas en los problemas 1 a 32.

1: 3^23^3 2: 2^42 3: 5^35^2 4: 4^44^2 5: $2^6/2^2$
6: $3^7/3^4$ 7: $6^5/6^3$ 8: $5^8/5^4$ 9: 3^22^2 10: 2^43^4
11: $8^3/4^3$ 12: $4^2/2^2$ 13: $(\frac{2}{3})^3$ 14: $(\frac{3}{5})^3$ 15: $(\frac{3}{2})^4$
16: $(\frac{5}{7})^2$ 17: $(2^4)^3$ 18: $(3^2)^3$ 19: $(2^33^2)^2$ 20: $(3^25)^2$
21: $(2a^3)(3a^2)$ 22: $(4x^4)(2x^2)$ 23: $(3x^3)(2x^4)$ 24: $(4x^2)(5x^3)$
25: b^5/b^2 26: a^7/a^3 27: $\dfrac{6^3b^7}{6^2b^2}$ 28: $\dfrac{a^5b^6}{ab^3}$
29: $(2x^3)^2$ 30: $(2x^4)^3$ 31: $(-3x^3)^3$ 32: $(-3x^5)^3$

Simplifíquense las expresiones exponenciales siguientes, de acuerdo con los métodos expuestos en el Pr. 7.1.

33: $\dfrac{18a^3b^4}{6a^2b}$ 34: $\dfrac{18y^5z^6}{9y^3z^2}$ 35: $\dfrac{30ax^3}{24a^3x^2}$ 36: $\dfrac{15b^7y^3}{9b^5y^2}$

37: $\dfrac{27a^2x^3y}{18ax^2y^4}$ 38: $\dfrac{32b^7y^2t}{12b^4y^5t^4}$ 39: $\dfrac{33a^5b^3c^2}{12a^2b^5c^2}$ 40: $\dfrac{42b^4a^3t^2}{35b^4a^4t^2}$

41: $\left(\dfrac{2a^2b^3}{6c^4}\right)\left(\dfrac{3ac^2}{4b}\right)$ 42: $\left(\dfrac{16b^3a^2}{5f^4}\right)\left(\dfrac{10bf^2}{8f}\right)$ 43: $\left(\dfrac{15a^2xt^3}{7ax^3}\right)\left(\dfrac{21a^3}{5t^3}\right)$

44: $\left(\dfrac{14b^2um^3}{15b^6}\right)\left(\dfrac{20u^3}{21b^2m}\right)$ 45: $\left(\dfrac{2h^2a^3}{3ha^4}\right)^3$ 46: $\left(\dfrac{4a^3k^5}{8ak^2}\right)^2$

47: $\left(\dfrac{6am^2}{15a^3m}\right)^4$ 48: $\left(\dfrac{12t^2p^3}{30tp^5}\right)^3$ 49: $(2a^2t)^3(3a^3t)^3$

50: $(4b^2z^3)^2(3bz^2)^2$ 51: $(2t^2h^3)^3(3t^2h^3)^3$ 52: $(3s^2h^3)^2(2s^3h)^2$

53: $\left(\dfrac{4a^2b^3}{3c^4}\right)^3\left(\dfrac{6ac^5}{8b^2}\right)^3$ 54: $\left(\dfrac{6b^3d^4}{5c^2}\right)^2\left(\dfrac{10bc^3}{12d^5}\right)^2$ 55: $\left(\dfrac{6p^3d^2}{5q}\right)^4\left(\dfrac{20p^2q^3}{24d}\right)^4$

56: $\left(\dfrac{9s^3a^4}{7p^2}\right)^3\left(\dfrac{28p^4a}{36s^2}\right)^3$ 57: $\dfrac{(b^2a^3t)^4}{(bat)^2(ba^2t)^3}$ 58: $\dfrac{(c^3o^2w)^5}{(c^2ow^3)^2(c^3o^3w^2)^3}$

59: $\dfrac{(p^4d^2q)^2(pd^3q^2)^3}{(p^2d^3q)^5}$ 60: $\dfrac{(s^2h^3p^5)^3(sh^2p^2)^4}{(s^5h^8p^{12})^2}$ 61: $k^{2a+3}k^{a-2}$

62: $t^{s-1}t^{2-s}$ 63: $a^{3+b}a^{1-2b}$ 64: $d^{u+5}d^{2u-3}$

65: $\dfrac{a^{b+2}c^{d-1}}{a^{b-1}c^{1+d}}$ 66: $\dfrac{b^{n-3}c^{2n+1}}{b^{2-n}c^{n-2}}$ 67: $\dfrac{x^{2a-1}y^{a-2}}{x^{a-3}y^{3a-2}}$

68: $\dfrac{c^{2n-5}d^{n+3}}{c^{n+3}d^{n-1}}$ 69: $\dfrac{(a^{n+2}b^{n+1})^2}{a^{2n}b^2}$ 70: $\dfrac{(a^{n-2}b^{n+1})^4}{a^{n-8}b^{3n-1}}$

71: $\dfrac{(x^{2n-3}y^{n-2})^3}{x^{n-8}y^{3n-7}}$ 72: $\dfrac{(b^{3n+1}c^{2n+3})^2}{b^{6n}c^6}$

7.3 EXPRESIONES EXPONENCIALES CON EXPONENTES ENTEROS NEGATIVOS.

En este párrafo se ampliará la interpretación acerca de los exponentes de modo de incluir exponentes enteros negativos.

Se considerará que a^{-n}, $a \neq 0$, representa un número y que ec. (7.2) se aplica a exponentes de este tipo. Si se multiplica a^{-n} por a^n/a^n, se obtiene

$$
\begin{aligned}
a^{-n} = a^{-n}\left(\frac{a^n}{a^n}\right) &= \frac{a^{-n+n}}{a^n} && \textit{según (7.2)} \\
&= \frac{a^0}{a^n} \\
&= \frac{1}{a^n} && \textit{según (7.7)}
\end{aligned}
$$

Por tanto, a^{-n} se define como sigue: Si $a \neq 0$ y n es entero positivo, entonces

$$
a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{7.8}
$$

Ya que esta definición da un sentido para los exponentes negativos, se puede ahora levantar la restricción impuesta en (7.5) de que $m > n$. Además, las leyes (7.3) a (7.6), Pr. 46, se satisfacen también para esta interpretación. El método general para demostrar esta proposición se muestra a continuación al aplicarlo a (7.5).

$$
\begin{aligned}
\frac{a^{-m}}{a^{-n}} &= \frac{\frac{1}{a^m}}{\frac{1}{a^n}} && \textit{según (7.8)} \\
&= \frac{a^n}{a^m} && \textit{se ha multiplicado numerador y denominador por } a^m a^n \\
&= a^{n-m} && \textit{según (7.5)} \\
&= a^{-m-(-n)}
\end{aligned}
$$

Mediante el uso de (7.5) de este párrafo y de las leyes (7.3) a (7.7), se puede convertir cualquier expresión con exponentes enteros negativos en otra equivalente en la cual todos los exponentes sean positivos.

Convertir las expresiones siguientes en otras sin exponentes negativos

EJEMPLO 1 4^{-2}

Solución

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

EJEMPLO 2 $2^{-4} \times 2^{-2}$

Solución

$$2^{-4} \times 2^{-2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

EJEMPLO 3 $3^{-5} \div 3^{-3}$

Solución

$$\frac{3^{-5}}{3^{-3}} = 3^{-5-(-3)} = 3^{-5+3} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

EJEMPLO 4 $\dfrac{4x^a y^{-b}}{z^{-c}}$

Solución

$$\frac{4x^a y^{-b}}{z^{-c}} = \frac{4x^a\left(\dfrac{1}{y^b}\right)}{\dfrac{1}{z^c}} = \frac{\dfrac{4x^a}{y^b}}{\dfrac{1}{z^c}} = \frac{\dfrac{4x^a}{y^b}\,(y^b z^c)}{\dfrac{1}{z^c}\,(y^b z^c)} = \frac{4x^a z^c}{y^b}$$

Si en el ejemplo (4) se compara la fracción original con la del resultado, se observa que cada letra con exponente negativo que está en cualquier miembro de la fracción original aparece, con signo contrario en el exponente, en el otro miembro de la fracción que se obtiene como resultado. Lo anterior ilustra la regla siguiente para exponentes negativos.

Cualquier factor de un miembro de una fracción se puede trasladar al otro miembro, si se cambia el signo del exponente del factor.

EJEMPLO 5 Escribir $\dfrac{2a^{-2}bc^{-3}}{x^{-4}y^{-2}z^3}$ como una fracción sin exponentes negativos.

Solución

$$\frac{2a^{-2}bc^{-3}}{x^{-4}y^{-2}z^3} = \frac{2bx^4y^2}{a^2c^3z^3}$$

Debe notarse que la proposición del anterior ejemplo se aplica a *factores y no a términos*. Cualquier intento para aplicarla a fracciones cuyos miembros no estén factorizados conduce a errores graves, como se ilustra en el ejemplo siguiente

EJEMPLO 6 Si se aplica (7.3) a $(2^{-2} + 2^{-3})/2^{-4}$, se tiene

$$\frac{2^{-2} + 2^{-3}}{2^{-4}} = \frac{\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3}}{\dfrac{1}{2^4}} = \frac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}}{\dfrac{1}{16}} = \frac{\dfrac{2+1}{8}}{\dfrac{1}{16}} = \frac{\dfrac{3}{8}}{\dfrac{1}{16}} = 6$$

Este resultado no es igual a $2^4/(2^2 + 2^3) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ que es lo que se obtendría si se aplicara la proposición del ejemplo 5 a este problema.

Se convendrá, por tanto, en que una expresión que contiene exponentes negativos queda simplificada cuando se han hecho todas las combinaciones posibles según las leyes (7.2) a (7.6) y cuando el resultado se ha expresado sin exponentes negativos ni exponente cero. Si este resultado es una fracción, debe reducirse a su mínima expresión.

EJEMPLO 7 Simplificar

$$\left(\frac{3a^{-2}b^2}{a^3c^{-3}}\right)^{-2}$$

Solución

$$\left(\frac{3a^{-2}b^2}{a^3c^{-3}}\right)^{-2} = \frac{3^{-2}(a^{-2})^{-2}(b^2)^{-2}}{(a^3)^{-2}(c^{-3})^{-2}} \qquad \textit{según (7.6)}$$

$$= \frac{3^{-2}a^4b^{-4}}{a^{-6}c^6} \qquad \textit{según (7.4)}$$

$$= \frac{a^6a^4}{3^2b^4c^6} \qquad \textit{según la regla para exponentes negativos en los factores}$$

$$= \frac{a^{10}}{9b^4c^6} \qquad \textit{según (7.2)}$$

En el ejemplo anterior se muestran en detalle todos los pasos de la solución. Después de cierta práctica se pueden efectuar muchos de ellos mentalmente. Algunas veces es más rápido eliminar primeramente todos los exponentes negativos y continuar luego con la simplificación. Si se emplea este procedimiento en el ejemplo anterior se tiene

$$\left(\frac{3a^{-2}b^2}{a^3c^{-3}}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\dfrac{3b^2c^3}{a^2a^3}\right)^2} \qquad \textit{por la regla para exponentes negativos y ec. (7.8)}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{3b^2c^3}{a^5}\right)^2} = \frac{(a^5)^2}{(3b^2c^3)^2} = \frac{a^{10}}{9b^4c^6}$$

Podemos, por tanto, eliminar cualquier exponente negativo que entre en una expresión, sea en un término o en un factor, introduciendo el exponente positivo correspondiente. Así podemos eliminar a^{-n} multiplicando y dividiendo por a^n, lo cual equivale a multiplicar por 1; por ello no se altera el valor de la expresión.

EJEMPLO 8 Simplificar $\dfrac{2x^{-2} - y}{x^{-1} - 3y^{-2}}$

Solución: Se multiplica y se divide la expresión por x^2y^2, se eliminan los exponentes negativos y se tiene

$$\frac{2x^{-2} - y}{x^{-1} - 3y^{-2}} = \frac{2x^{-2} - y}{x^{-1} - 3y^{-2}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2}$$

$$= \frac{2y^2 - x^2y^3}{xy^2 - 3x^2} \frac{y^2(2 - x^2y)}{x(y^2 - 3x)} \qquad \textit{sumando los exponentes de los términos semejantes.}$$

EJERCICIO 26: ELIMINACION DE EXPONENTES NEGATIVOS

Encuéntrese el valor de cada una de las expresiones dadas en los problemas 1 a 20.

1: 3^{-2} **2:** 4^{-1} **3:** 5^{-3} **4:** 2^{-4}

5: $2^{-6}2^{3}$ **6:** $3^{-2}3^{3}$ **7:** $5^{-1}5^{3}$ **8:** $4^{-1}4^{-2}$

9: $(3^{-2})^{-2}$ **10:** $(2^{-3})^{2}$ **11:** $(4^{2})^{-1}$ **12:** $(2^{-1})^{-2}$

13: $(3^{-2}4^{2})^{-2}$ **14:** $(2^{-3}3^{2})^{-3}$ **15:** $(5^{-1}4^{2})^{-1}$ **16:** $(3^{-2}4^{-1})^{-2}$

17: $(2^{-1})^{-2}(3^{2})^{-2}$ **18:** $(3^{-2})^{-1}(9^{-1})^{-1}$

19: $(2^{-4})^{-1}(4^{2})^{-1}$ **20:** $(3^{-3})^{-2}(2^{2})^{-2}$

Mediante el uso de exponentes negativos escríbanse sin denominadores las expresiones de los problemas 21 a 32.

21: $\dfrac{2x^2}{y^{-3}}$ 22: $\dfrac{x^3}{y^{-2}}$ 23: $\dfrac{a^3}{b^2}$ 24: $\dfrac{a^4}{b^5}$

25: $\dfrac{2y}{x^2y^3}$ 26: $\dfrac{3x^2}{2yz^3}$ 27: $\dfrac{2a}{3y^2w}$ 28: $\dfrac{b^2}{c^3d^2}$

29: $\dfrac{a^2b^{-1}}{ab^{-2}c^{-3}}$ 30: $\dfrac{xy^{-2}}{x^2y^{-3}w^0}$ 31: $\dfrac{2x^0y}{a^{-2}x^{-1}y^{-3}}$ 32: $\dfrac{8^2h^{-3}k^{-1}}{4^3h^{-1}k^{-2}a}$

Simplifíquense las expresiones siguientes expresando los resultados sin exponentes negativos y sin exponente cero. Usense todas las combinaciones posibles de las leyes (7.2) a (7.6).

33: $a^{-2}y$ 34: $a^{-1}y^{-2}$ 35: a^0c^{-2} 36: $a^{-3}y^{-1}$

37: $\dfrac{2a^{-3}b^{-1}}{4^{-1}a^2b^{-3}}$ 38: $\dfrac{2^{-3}a^{-1}b^{-2}}{4^{-2}a^{-2}b}$ 39: $\dfrac{3^{-3}a^{-2}b^{-3}}{9^{-1}a^2b^{-5}}$ 40: $\dfrac{2^{-5}a^{-6}b^{-3}}{4^{-2}a^{-4}b^{-1}}$

41: $\dfrac{3^{-1}x^{-2}y^2z^{-1}}{2^{-2}x^{-1}y^{-1}z^{-2}}$ 42: $\dfrac{2^{-4}x^0y^{-1}z^{-3}}{4^{-2}x^{-4}y^{-2}z}$ 43: $\dfrac{6^{-2}a^{-1}b^3c^{-5}}{2^{-3}ab^{-1}c^{-2}}$ 44: $\dfrac{6^{-2}a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{3^{-4}a^{-3}b^{-2}c}$

45: $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2}$ 46: $\left(\dfrac{c^{-1}}{d^{-2}}\right)^3$ 47: $\left(\dfrac{x^0}{y^2}\right)^{-3}$ 48: $\left(\dfrac{b^4}{c^{-3}}\right)^{-2}$

49: $(a^{-2}x)^{-2}$ 50: $(c^2d^{-3})^2$ 51: $(c^3p^2)^{-3}$ 52: $(b^{-1}y^{-2})^3$

53: $\left(\dfrac{2^{-4}a^{-1}b^2}{4^{-1}a^{-2}b^{-1}}\right)^2$ 54: $\left(\dfrac{3^3x^2y^{-2}}{9^2x^{-1}y^3}\right)^{-2}$ 55: $\left(\dfrac{8^{-1}a^{-2}y^{-3}}{4^{-2}b^{-1}y}\right)^3$ 56: $\left(\dfrac{6^{-2}a^3b^2}{3^{-4}a^{-1}c^0}\right)^{-3}$

57: $\left(\dfrac{a^{-1}b^2c^{-2}}{a^0b^2c^{-3}}\right)^{-4}$ 58: $\left(\dfrac{x^{-2}y^3z^{-1}}{x^{-3}z^{-2}}\right)^4$ 59: $\left(\dfrac{b^{-2}a^{-1}t^0}{b^{-3}a^{-2}t^{-1}}\right)^2$ 60: $\left(\dfrac{a^{-2}bc^3}{a^0b^{-1}c}\right)^{-2}$

61: $x^2 + \dfrac{3}{x^{-2}}$ 62: $x^{-2} + \dfrac{3}{x^2}$ 63: $3x^{-1} - \dfrac{2}{x}$ 64: $3x - \dfrac{2}{x^{-1}}$

65: $\dfrac{a}{b^{-1}} + \dfrac{b}{a^{-1}}$ 66: $\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}} + \dfrac{b}{a}$ 67: $\dfrac{a^{-1}}{b} + \dfrac{b^{-1}}{a}$ 68: $\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}} + \dfrac{a}{b}$

69: $\dfrac{x^{-1} - x^{-2}}{x^{-3}}$ 70: $\dfrac{a^{-2} - b^{-3}}{c^{-1}}$ 71: $\dfrac{a^{-2} - b^{-3}}{a^{-2}}$ 72: $\dfrac{a^{-1}}{a^{-2} - b^{-1}}$

73: $\dfrac{y^{-1} + x^{-1}}{y^{-1} - x^{-1}}$ 74: $\dfrac{y^{-2} - x^{-2}y^{-1}}{x^{-1}y^{-2} - x^{-2}}$ 75: $\dfrac{x^{-1}y^{-2} + x^{-2}y^{-1}}{y^{-2} - x^{-2}}$

76: $\dfrac{x^{-2}y^{-3} - x^{-3}y^{-2}}{y^{-3} - x^{-3}}$

77: $\dfrac{y^{-2} + 3x^{-1}y^{-1} + 2x^{-2}}{x^{-1}y^{-2} + x^{-2}y^{-1}}$

78: $\dfrac{y^{-2} - x^{-1}y^{-1} - 2x^{-2}}{x^{-1}y^{-2} - 2x^{-2}y^{-1}}$

79: $\dfrac{x^{-1}y^{-2} + 2x^{-2}y^{-1}}{y^{-2} + x^{-1}y^{-1} - 2x^{-2}}$

80: $\dfrac{x^{-1}y^{-2} - x^{-2}y^{-1}}{y^{-2} + 2x^{-1}y^{-1} - 3x^{-2}}$

81: $-3(x - 1)(x + 1)^{-4} + (x + 1)^{-3}$

82: $-(x + 3)^2(x - 2)^{-3} + (x - 2)^{-2}(x + 3)$

83: $-3(x - 1)^4(x - 2)^{-4} + 4(x - 1)^3(x - 2)^{-3}$

84: $-4(x-3)^{-3}(x+2)^{-5}-3(x-3)^{-4}(x+2)^{-4}$
85: $-2(x-1)(2x-3)^{-2}+(2x-3)^{-1}$
86: $-3(x+2)^2(3x-1)^{-3}+(x+2)(3x-1)^{-2}$
87: $3(2x-1)^{-2}(3x+2)^{-2}+2(2x-1)^{-3}(3x+2)^{-1}$
88: $3(2x+3)^{-1}(3x-2)^{-2}+2(2x+3)^{-2}(3x-2)^{-1}$

7.4 RAICES DE LOS NUMEROS.

En la proposición $3^2 = 9$ se dice que 9 es la segunda potencia o el cuadrado de 3 y que 3 es la *raíz cuadrada* de 9. Análogamente, puesto que $4^3 = 64$, 4 es la *raíz cúbica* de 64 y siendo $2^5 = 32$, 2 es la *raíz quinta* de 32. En general, se tiene la definición siguiente: un número a es la raíz enésima de b si $a^n = b$.

raíz enésima principal

Si existe una *raíz real positiva enésima* de un número, ésta se denomina *raíz enésima principal.* Si no existe ninguna raíz real positiva enésima de un número, pero existe una raíz real *negativa* enésima, la raíz negativa se denomina raíz enésima principal.* Por ejemplo, la raíz principal cuadrada de 9 es el número positivo 3; la raíz principal cúbica de -27 es -3, puesto que no existe raíz cúbica positiva de -27.

radical
radicando
índice

La notación más usual para la raíz principal enésima de a es $\sqrt[n]{a}$. Este símbolo recibe el nombre de *radical de orden n.* La letra a se llama *radicando* y n *índice* del radical. Por definición.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \tag{7.9}$$

Si a no es la potencia enésima de un número racional, el valor de $\sqrt[n]{a}$ no puede expresarse *exactamente* por medio de un entero o de una fracción. Es posible expresarlo en otras formas, pero nunca es posible hacerlo exactamente sin hacer uso del radical. Sin embargo, si $\sqrt[n]{a}$ es real, su valor se puede expresar *aproximadamente* por medio de una fracción decimal.

Números imaginarios. En el Pr. 1.1 se examinó una invención de la mente humana, el llamado sistema de los números reales, y se encontró que siempre que se efectúe cualquiera de las cuatro operaciones fundamentales sobre dos cualesquiera números reales se obtiene a su vez un número real. De la misma manera, se ha visto que las raíces de los números positivos se pueden expresar siempre dentro del sistema de los números reales, pero que no ocurre así con las raíces cuadradas de números negativos. (Al llegar a este punto es conveniente que el lector revise el contenido del Pr. 1.1).

Se desea nuevamente hacer hincapié en que las matemáticas son un invento resultante de un largo e irregular desarrollo que responde en más o en menos a una necesidad. Cuando se hizo necesario resolver

* En el capítulo 11 se definirá la raíz principal enésima de un número cuando todas las n raíces son imaginarias.

ciertos problemas aparecieron ecuaciones del tipo $x^2 = -1$. Resolviendo esa ecuación para x, se tiene: $x = \pm\sqrt{-1}$, esto es, dos números que no se pueden expresar como números reales. Para operar con números como esos fue necesario ampliar el sistema numérico. Sin llegar por el momento a un análisis completo de dicha ampliación, *conviene hacer notar lo siguiente: puesto que $(+\sqrt{a})^2 = a$ y $(-\sqrt{a})^2 = a$, siendo a en cada caso positivo, entonces cualquier número positivo tiene dos raíces cuadradas, una positiva y otra negativa, cuyos valores numéricos son iguales. Se concluye así que no puede haber una raíz real cuadrada de $-a$, esto es, que dentro del sistema de los números reales no existe un número que multiplicado por sí mismo produzca $-a$. Además, no puede existir la raíz cuarta real de un número negativo o la raíz enésima real de $-a$, en donde n es par y a es positivo. Las raíces tales como $\sqrt[n]{-a}$, en donde n es un entero par y $a > 0$, se llaman números imaginarios.† Algunos ejemplos de números imaginarios son: $\sqrt{-5}$, $\sqrt[4]{-13}$, y $\sqrt{-1}$.

En el capítulo 11 se demostrará que todo número tiene n enésimas raíces, pero que muchas de ellas son imaginarias.**

7.5 EXPONENTES FRACCIONARIOS.

Ahora es posible ampliar más aún las definiciones acerca de los exponentes y obtener una interpretación para los exponentes fraccionarios.

Si se considera que la ley (7.4) Pr. 46 es válida para $m = 1/n$, se tiene

$$(a^{1/n})^n = a^{n/n} = a$$

Por tanto, $a^{1/n}$ es un número cuya potencia enésima es a y en consecuencia de acuerdo con la definición del Pr. 7.4, es una raíz enésima de a. Por tanto, se tiene

$$\blacktriangleright\ a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \tag{7.10}$$

De donde (7.10) se acepta como la interpretación de un exponente fraccionario cuyo numerador es uno. Además si $a^{q/p}$ se interpreta como

$$\blacktriangleright\ a^{q/p} = \sqrt[p]{a^q} \tag{7.11}$$

* Véanse Pr. 8.4 y capítulo 11.

† Su nombre se debe a que originalmente se pensó que eran números imaginarios, en su sentido usual. Sin embargo, los números imaginarios encuentran a la fecha gran variedad de aplicaciones en electrónica y los fenómenos que representan están bien lejos de ser imaginarios.

** Si a es positiva, las raíces cuadradas de a son $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$, siendo ambas reales si $n = 4$ y a es positiva, existen dos raíces reales y dos raíces imaginarias cuartas de a. Por ejemplo, las cuatro raíces cuartas 16 son: 2, -2, $\sqrt{4}$ y $-\sqrt{-4}$.

entonces

$a^{q/p} = (a^q)^{1/p}$

y la ley (7.4) es satisfecha para $m = 1/p$ y $n = q$.

Por consiguiente, un número con exponente fraccionario se define como la potencia de un radical. El denominador del exponente es el índice del radical y el numerador indica la potencia a la cual se eleva el radical.

Si $\sqrt[p]{a}$ es un número real,* entonces

$$a^{q/p} = (a^{1/p})^q = (a^q)^{1/p} \tag{7.12}$$

y la ley (7.4), se satisface para $m = q$ y $n = 1/p$.

Si se emplea la forma radical para la segunda y para la tercera de las expresiones de (7.12) se tiene

$$a^{q/p} = (\sqrt[p]{a})^q = \sqrt[p]{a^q} \tag{7.13}$$

Si $\sqrt[p]{a}$ es racional, es más conveniente usar la primera expresión radical de (7.3). De lo contrario es más adecuada la forma del segundo radical.

EJEMPLO 1 Expresar $64^{2/3}$ en forma radical.

Solución: $1.64^{2/3} = (\sqrt[3]{64})^2 = 16$.

EJEMPLO 2 Expresar $25^{2/3}$ en forma radical.

Solución: Si para $25^{2/3}$ se usa la primera expresión radical de (7.13) se tiene $(\sqrt[3]{25})^2$. Ya que no existe raíz cúbica racional de 25, no se puede expresar $(\sqrt[3]{25})^2$ sin uso del radical. Sin embargo, se puede expresar en otra forma usando la segunda expresión radical de (7.13),

$(\sqrt[3]{25})^2 = \sqrt[3]{25^2} = \sqrt[3]{625}$

Posteriormente se indicará como simplificar $\sqrt[3]{625}$.

Se puede demostrar que las leyes (7.2) a (7.6), son válidas para la interpretación de exponentes fraccionarios dada en (7.13). Como prueba de la demostración se considerará que (7.4) se satisface tanto para m como para n fraccionarios. Como primer paso se tiene

*Se excluye únicamente el caso en el cual a es negativo y p es par. La relación (7.13) establece que, excepto para el caso excluido, los procesos de extraer sucesivamente una raíz y luego elevar el resultado a una potencia son conmutativos. Para demostrar (7.13) se considera $\sqrt[p]{a})^q$ en la forma exponencial y luego la expresión se eleva a la potencia p. Esto es

$$\begin{aligned}[(a^{1/p})^q]^p &= (a^{1/p})^{pq} && \textit{según (7.4)}\\ &= a^{pq/p} && \textit{según (7.4)} \text{ con } n = pq \text{ y } m = {}^{1/p}.\\ &= a^q\end{aligned}$$

Por tanto, $(a^{1/p})^q$ es una raíz p de a^q como $(a^q)^{1/p}$. Si a es positivo, entonces $(a^{1/p})^q$ y $(a^q)^{1/p}$ son positivos. Si a es negativo entonces p es impar y, por consiguiente, tanto $(a^{1/p})^q$ como a^q son positivos o negativos según q sea para o impar. Por tanto, excepto para el caso excluido, $(a^{1/p})^q$ es la raíz p principal de a^q, esto es, $(\sqrt[p]{a})^q = \sqrt[p]{a^q}$.

$$
\begin{aligned}
[(a^{1/u})^{1/v}]^{uv} &= (a^{1/u})^{uv/v} \\
&= (a^{1/u})^{u} \\
&= a^{u/u} = a \qquad \textit{aplicando (7.12)}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $(a^{1/u})^{1/v}$, es la raíz uv de a y a excepción hecha de los casos excluidos (a negativo y u o v par) es la raíz principal.

Por tanto,

$$(a^{1/u})^{1/v} = a^{1/uv} \tag{7.14}$$

Se considera ahora

$$
\begin{aligned}
(a^{u/v})^{r/s} &= \{[(a^{u})^{1/v}]^{1/s}\}^{r} && \textit{según (7.12)} \\
&= [(a^{u})^{1/vs}]^{r} && \textit{según (7.14)} \\
&= [(a^{1/vs})^{u}]^{r} && \textit{según (7.12)} \\
&= (a^{1/vs})^{ur} && \textit{según (7.4)} \\
&= a^{ur/vs} && \textit{según (7.12)}
\end{aligned}
$$

Puesto que

$$a^{-r/s} = (a^{-r})^{1/s} = \left(\frac{1}{a^{r}}\right)^{1/s} = \frac{1}{a^{r/s}}$$

se concluye que (7.8) se aplica cuando n es una fracción.

EJEMPLO 3 Escribir $\sqrt{5x^6y^3}/\sqrt[3]{z^4w^9}$ sin radicales

Solución

$$\frac{\sqrt{5x^6y^3}}{\sqrt[3]{z^4w^9}} = \frac{(5x^6y^3)^{1/2}}{(z^4w^9)^{1/3}} = \frac{5^{1/2}x^{6/2}y^{3/2}}{z^{4/3}w^{9/3}} = \frac{5^{1/2}x^3y^{3/2}}{z^{4/3}w^3}$$

EJEMPLO 4 Expresar $3a^{1/2}b^{3/2}/c^{2/3}d^{4/3}$ exponentes fraccionarios.

Solución

$$\frac{3a^{1/2}b^{3/2}}{c^{2/3}d^{4/3}} = \frac{3(ab^3)^{1/2}}{(c^2d^4)^{1/3}} = \frac{3\sqrt{ab^3}}{\sqrt[3]{c^2d^4}}$$

EJEMPLO 5 Escribir $3x^{3/4}y^{-2/3}$ sin exponentes fraccionarios o negativos.

Solución

$$3x^{3/4}y^{-2/3} = \frac{3x^{3/4}}{y^{2/3}} = \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{y^2}}$$

7.6 SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES EXPONENCIALES.

Se mostrará ahora, por medio de varios ejemplos, el procedimiento seguido para simplificar o convertir una expresión exponencial a otras formas.

EJEMPLO 1 Efectuar todas las combinaciones posibles con las fórmulas (7.2) a (7.6) en $\dfrac{6a^2b^{-3}c^{-1/2}}{18a^{2/3}b^{1/4}}$ expresando el resultado sin exponentes negativos o exponentes cero.

Solución: Se aplica primero (7.5), a las potencias de a y al mismo tiempo se trasladan b^{-3} y $c^{-1/2}$ al denominador cambiando los signos de los exponentes.

Se tiene así

$$\frac{6a^2b^{-3}c^{-1/2}}{18a^{2/3}b^{1/4}} = \frac{6a^{2-2/3}b^{-3}c^{-1/2}}{18b^{1/4}}\,\frac{b^3c^{1/2}}{b^3c^{1/2}}$$
$$= \frac{6a^{4/3}b^{-3+3}c^{-1/2+1/2}}{18b^{3+1/4}c^{1/2}}$$
$$= \frac{a^{4/3}}{3b^{13/4}c^{1/2}}$$

ya que $b^0 = c^0 = 1$.

EJEMPLO 2 Aplicar las reglas (7.2) a (7.6) a $\left(\dfrac{2x^3y^{1/2}z^2}{3x^{1/3}z^4}\right)\left(\dfrac{x^{-1/2}y^{3/2}}{z^{-1}}\right)^2$ y expresar el resultado sin exponentes cero o negativos.

Solución: Primero se eleva al cuadrado la expresión del segundo paréntesis, luego se multiplica el resultado por la expresión del primer paréntesis y, por último, se simplifica el producto

$$\left(\frac{2x^3y^{1/2}z^2}{3x^{1/3}z^4}\right)\left(\frac{x^{-1/2}y^{3/2}}{z^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{2x^3y^{1/2}z^2}{3x^{1/3}z^4}\right)\left(\frac{x^{(-1/2)2}y^{(3/2)2}}{z^{(-1)2}}\right)$$
$$= \left(\frac{2x^3y^{1/2}z^2}{3x^{1/3}z^4}\right)\left(\frac{x^{-1}y^3}{z^{-2}}\right)$$
$$= \frac{2x^{3-1}y^{1/2+3}z^2}{3x^{1/3}z^{4-2}}$$
$$= \frac{2x^2y^{7/2}z^2}{3x^{1/3}z^2}$$
$$= \tfrac{2}{3}x^{5/3}y^{7/2}z^0$$
$$= \tfrac{2}{3}x^{5/3}y^{7/2}$$

EJEMPLO 3 Simplificar $\left(\dfrac{3x^{-1/2}y^{-1/2}}{x^{-1/2} - y^{-1/2}}\right)^{-2}$

Solución: Como el denominador no está factorizado, se debe reemplazar cada término que tenga exponente negativo por otro término semejante que tenga exponente positivo y luego proceder a la simplificación. De este modo se tiene

$$\left(\frac{3x^{-1/2}y^{-1/2}}{x^{-1/2} - y^{-1/2}}\right)^{-2} = \left[\frac{3\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)\left(\dfrac{1}{y^{1/2}}\right)}{\dfrac{1}{x^{1/2}} - \dfrac{1}{y^{1/2}}}\right]^{-2}$$
$$= \left[\frac{3(x^{1/2}y^{1/2})\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)\left(\dfrac{1}{y^{1/2}}\right)}{(x^{1/2}y^{1/2})\left(\dfrac{1}{x^{1/2}} - \dfrac{1}{y^{1/2}}\right)}\right]^{-2} \qquad \textit{multiplicando numerador y denominador por } x^{1/2}y^{1/2}$$
$$= \left(\frac{3}{y^{1/2} - x^{1/2}}\right)^{-2}$$
$$= \frac{3^{-2}}{(y^{1/2} - x^{1/2})^{-2}}$$
$$= \frac{(y^{1/2} - x^{1/2})^2}{3^2}$$
$$= \frac{y - 2y^{1/2}x^{1/2} + x}{9}$$

EJEMPLO 4 Simplificar $(2x + 1)^{1/2} - (x + 1)\,(2x + 1)^{-1/2}$

Solución

$$\begin{aligned}(2x+1)^{1/2}-(x+1)(2x+1)^{-1/2} &= (2x+1)^{1/2}-\frac{x+1}{(2x+1)^{1/2}}\\ &= \frac{(2x+1)^{1/2}(2x+1)^{1/2}-(x+1)}{(2x+1)^{1/2}}\\ &= \frac{2x+1-x-1}{(2x+1)^{1/2}}\\ &= \frac{x}{(2x+1)^{1/2}}\end{aligned}$$

EJERCICIO 27: SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES RADICALES Y EXPONENCIALES

Escríbanse sin exponentes o radicales los números o expresiones de los problemas 1 a 48.

1: $64^{1/2}$	2: $25^{1/2}$	3: $64^{1/3}$	4: $64^{1/6}$
5: $.01^{1/2}$	6: $.064^{1/3}$	7: $.0016^{1/4}$	8: $.027^{1/3}$
9: $32^{2/5}$	10: $16^{3/4}$	11: $27^{4/3}$	12: $16^{3/2}$
13: $.01^{3/2}$	14: $.027^{2/3}$	15: $.00032^{4/5}$	16: $.000064^{5/6}$
17: $(\frac{4}{25})^{3/2}$	18: $(\frac{8}{27})^{4/3}$	19: $(\frac{16}{81})^{3/4}$	20: $(\frac{32}{243})^{4/5}$
21: $4^{-1/2}$	22: $8^{-1/3}$	23: $32^{-2/5}$	24: $27^{-2/3}$
25: $(\frac{4}{9})^{-1/2}$	26: $(\frac{27}{8})^{-2/3}$	27: $(\frac{16}{81})^{-3/4}$	28: $(\frac{27}{125})^{-2/3}$
29: $\sqrt{25}$	30: $\sqrt{64}$	31: $\sqrt[3]{27}$	32: $\sqrt[5]{32}$
33: $\sqrt{4^3}$	34: $\sqrt[3]{8^2}$	35: $\sqrt[6]{8^2}$	36: $\sqrt[6]{4^3}$
37: $\sqrt{16a^2b^4}$	38: $\sqrt{9a^4b^6}$	39: $\sqrt{4b^8c^6}$	40: $\sqrt{25a^0y^6}$
41: $\sqrt[3]{8x^3y^6}$	42: $\sqrt[3]{27a^6c^9}$	43: $\sqrt[4]{16y^4w^8}$	44: $\sqrt[5]{32x^5y^{15}}$
45: $\sqrt{\frac{49x^4}{y^2z^6}}$	46: $\sqrt[3]{\frac{y^6w^{12}}{27t^3}}$	47: $\sqrt[4]{\frac{16a^0}{b^4c^8}}$	48: $\sqrt[5]{\frac{243a^5}{x^{10}y^{20}}}$

Escríbanse en su forma radical las expresiones de los problemas 49 a 60. Las potencias de orden n deben quedar fuera de los radicales de orden n.

49: $a^{4/3}$	50: $b^{2/3}$	51: $a^{3/5}$	52: $a^{5/3}$
53: $s^{3/4}t^{1/4}$	54: $a^{2/5}b^{6/5}$	55: $c^{2/3}d^{5/3}$	56: $ac^{5/2}$
57: $\frac{a^{2/3}b}{c^{1/3}}$	58: $\frac{b^{-3/4}c^{5/4}}{d^{-1/4}}$	59: $\frac{32^{-3/5}}{a^{1/5}b^{-6/5}}$	60: $\frac{8^{2/3}a^{-4/3}}{b^{-1/3}}$

Simplifíquense las expresiones siguientes:

61: $x^{1/2}x^{3/4}$	62: $y^{2/3}y^{1/2}$	63: $z^{2/5}z^{3/5}$	64: $w^{1/3}w^{1/5}$
65: $\frac{g^{5/6}}{g^{1/2}}$	66: $\frac{h^{2/3}}{h^{1/2}}$	67: $\frac{j^{5/6}}{j^{1/3}}$	68: $\frac{k^{3/4}}{k^{2/3}}$
69: $(4x^2y^6)^{1/2}$	70: $(9x^0y^4)^{1/2}$	71: $(32a^{10})^{1/5}$	72: $(81a^{-4}b^{12})^{1/4}$

73: $(16h^{4/3}k^{-4})^{1/4}$	74: $(27a^{-6}b^{3/2})^{-1/3}$
75: $(9x^{-4}y^{2/3})^{-1/2}$	76: $(32^{-1}x^{10})^{1/5}$
77: $\left(\frac{16x^{-4}y^{2/5}}{9^{-1}a^4y^{2/3}}\right)^{1/2}$	78: $\left(\frac{8a^{-3}y^{3/4}}{27^{-1}b^6}\right)^{1/3}$
79: $\left(\frac{16^{-1}a^{4/3}b^{-4}}{81^{-2}c^{8/5}}\right)^{1/4}$	80. $\left(\frac{32^{-2}x^{5/6}}{y^{-5/4}z^{10}}\right)^{1/5}$
81: $(6a^{-1}b^{2/3})(ab^{1/3})$	82: $(2s^{-2}y^{2/5})(s^{1/2}y^{1/5})$
83: $(8a^2y^{-2/3})(\frac{3}{4}a^{-3}y^{1/3})$	84: $(9x^{1/2}y^{-3/5})(\frac{2}{3}x^{-1}y^{1/5})$
85: $\frac{27^{2/3}a^{2/5}y^{-1/2}}{3a^{-2/5}y}$	86: $\frac{4^{3/2}x^{-2/3}y^{1/2}}{3^{-1}xy^{-3/2}}$

87: $\dfrac{8^{-2/3}b^{-2}y^{2/5}}{4^{-1}b^{-1}y^{1/5}}$ 88: $\dfrac{81^{3/4}x^{-1/3}y}{27^{2/3}x^{-1}y^{-1}}$

89: $(4a^2b^4)^{1/2}(8a^3b^6)^{-1/3}$ 90: $(9x^2y^{-4})^{1/2}(8x^{-3}y^6)^{1/3}$

91: $(27a^{-6}y^3)^{-2/3}(4a^{-2}y^4)^{1/2}$ 92: $(16x^4y^{-8})^{-3/4}(32^{-1}x^5y^5)^{1/5}$

93: $\left(\dfrac{4x^{-2}y}{9xy^{1/2}}\right)^{-1/2}$ 94: $\left(\dfrac{27a^3y}{8a^{-1}y^{1/2}}\right)^{-1/3}$

95: $\left(\dfrac{16a^3b^{1/2}}{a^0c^{4/7}}\right)^{-1/4}$ 96: $\left(\dfrac{a^{-5}b^{5/4}}{32^{-1}a^{5/7}}\right)^{-1/5}$

97: $(a^{3/2} - a^{1/2})(a^{3/2} + a^{1/2})$

98: $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

99: $(a^{2/3} + b^{2/3})(a^{4/3} - a^{2/3}b^{2/3} + b^{4/3})$

100: $(2a^{3/4} + a^{5/4})(2a^{1/4} - a^{3/4})$

101: $(x + 1)(2x - 1)^{-1/2} + (2x - 1)^{1/2}$

102: $(2x - 1)(3x + 2)^{-1/3} + (3x + 2)^{2/3}$

103: $(3x + 2)(2x - 1)^{-1/4} + 8(2x - 1)^{3/4}$

104: $(2x - 3)3(3x - 4)^{-3/4} + 8(3x - 4)^{1/4}$

105: $2(x + 1)^{1/2}(x - 1)^{-2/3} + 2(x + 1)^{-1/2}(x - 1)^{1/3}$

106: $(2x - 5)^{1/2}2(8x + 1)^{-3/4} + (2x - 5)^{-1/2}(8x + 1)^{1/4}$

107: $(3x - 2)^{-2/3}(4x + 1)^{1/4} + 3(3x - 2)^{1/3}(4x + 1)^{-3/4}$

108: $(5x - 1)^{2/5}(3x + 1)^{-2/3} + 2(5x - 1)^{-3/5}(3x + 1)^{1/3}$

109: $\left(\dfrac{x^{1/(a-1)}}{x^{1/(a+1)}}\right)^{(a^2-1)/a}$ 110: $\left(\dfrac{x^{a-2b}}{x^{-b}}\right)^{a/(a-b)}$

111: $\left(\dfrac{y^{b+2c}}{y^c}\right)^{b/(b^2-c^2)}$ 112: $(x^{a^3-b^3})^{1/(a-b)}$

113: $(x^{3a-3b})^{1/(a-b)}$ 114: $\left(\dfrac{x^{a+b}}{x^b}\right)^a\left(\dfrac{x^{b-a}}{x^b}\right)^{a-b}$

115: $\left(\dfrac{x^{a+b}}{x^a}\right)^a\left(\dfrac{x^{b-a}}{x^b}\right)^{a+b}$ 116: $[(x^{1/(a+b)})^{a-b^2/a}]^{a/(a-b)}$

7.7 LEYES DE LOS RADICALES.

Puesto que las leyes (7.3), (7.4) y (7.6), son válidas para exponentes fraccionarios, se pueden emplear para obtener leyes acerca de los radicales, como las tres que se muestran a continuación.

Si en la ley (7.3), se reemplaza n por $1/n$, se tiene

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$$

que expresada en forma radical, es

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \tag{7.15}$$

De la misma manera, de (7.6), se obtiene

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \tag{7.16}$$

Aplicando el mismo procedimiento a (7.4), se tiene

$(a^{1/n})^{1/m} = (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/mn}$

que es igual a

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} \tag{7.17}$$

7.8 REDUCCION DE RADICALES QUE CONTIENEN MONOMIOS ENTEROS

Se entiende por radical que contiene monomios enteros una expresión radical en la que el radicando es un solo término que no contiene fracciones.

La reducción de un radical de esta clase consiste de las operaciones siguientes:

Eliminación de factores racionales del radical. La ley (7.15) del párrafo anterior permite eliminar uno o más factores de un radical de orden n, si el radicando tiene factores que sean enésimas potencias.

EJEMPLO 1 Si en $\sqrt{72}$, se escribe $72 = (36)2 = (6^2)2$, se tiene.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt{72} &= \sqrt{(6^2)(2)} \\ &= \sqrt{6^2}\sqrt{2} && \text{según ec. (7.15)} \\ &= 6\sqrt{2} && \text{según la definición en el Pr. 7.4}\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Eliminar los factores posibles de $\sqrt[3]{54a^3b^5}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54a^3b^5} &= \sqrt[3]{(27a^3b^3)2b^2} \\ &= \sqrt[3]{(3ab)^3 2b^2} \\ &= \sqrt[3]{(3ab)^3}\sqrt[3]{2b^2} && \text{según ec. (7.15)} \\ &= 3ab\sqrt[3]{2b^2}\end{aligned}$$

Reducción del orden del radical. El método más simple para reducir el orden del radical, cuando la reducción es posible, es expresarlo en términos de exponentes fraccionarios, reducir luego los exponentes fraccionarios a su mínima expresión y, por último, escribir el resultado nuevamente en la forma radical.

EJEMPLO 3 Reducir el orden del radical. $\sqrt[4]{9a^2}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{9a^2} &= \sqrt[4]{(3a)^2} \\ &= (3a)^{2/4} \\ &= (3a)^{1/2} \\ &= \sqrt{3a}\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Reducir el orden en el radical $\sqrt[9]{64a^6b^{12}}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt[9]{64a^6b^{12}} &= \sqrt[9]{4^3a^6b^{12}} \\ &= 4^{3/9}a^{6/9}b^{12/9} \\ &= 4^{1/3}a^{2/3}b^{4/3} \\ &= (4a^2b^4)^{1/3} && \text{según } (7.2) \\ &= \sqrt[3]{4a^2b^4} && \text{según } (7.10)\end{aligned}$$

De los ejemplos anteriores resulta evidente que el orden de un radical se puede reducir si el índice del radical y todos los exponentes de los factores tienen un factor común. Para reducir el orden de un radical de esta clase sin cambiar previamente a exponentes fracccionarios se divide tanto el índice del radical como cada exponente del radicando entre el mayor factor común que tengan.

EJEMPLO 5 Reducir el orden en el radical $\sqrt[12]{64x^3y^9}$ sin cambiar los exponentes fraccionarios

Solución

En el radical, 3 es el mayor factor común del índice del radical y de los exponentes de los factores del radicando. Por tanto, si se divide cada uno de ellos entre 3, se tiene

$$\sqrt[12]{2^6x^3y^9} = \sqrt[4]{2^2xy^3} = \sqrt[4]{4xy^3}$$

Reducción de un radical del tipo $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$. Mediante el uso de (7.17) se puede reducir un radical de la clase $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ a un radical simple.

EJEMPLO 6 Reducir el radical $\sqrt[3]{\sqrt[2]{6a^5}}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\sqrt[2]{6a^5}} &= \sqrt[(3)(2)]{6a^5} \\ &= \sqrt[6]{6a^5}\end{aligned}$$

Frecuentemente se puede reducir a una forma más simple el radical obtenido en el paso anterior.

EJEMPLO 7 Reducir el radical

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\sqrt[3]{9x^2y^4}} &= \sqrt[12]{9x^2y^4} \\ &= \sqrt[12]{(3xy^2)^2} \\ &= (3xy^2)^{2/12} = (3xy^2)^{1/6} \\ &= \sqrt[6]{3xy^2}\end{aligned}$$

EJERCICIO 28. SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES RADICALES

En los problemas 1 a 64 escríbanse fuera del radical todos los factores posibles.

1: $\sqrt{18}$	2: $\sqrt{45}$	3: $\sqrt{48}$	4: $\sqrt{75}$	5: $\sqrt{98}$
6: $\sqrt{320}$	7: $\sqrt{216}$	8: $\sqrt{363}$	9: $\sqrt[3]{16}$	10: $\sqrt[3]{108}$

11: $\sqrt[3]{250}$ 12: $\sqrt[3]{448}$ 13: $\sqrt[4]{32}$ 14: $\sqrt[4]{405}$ 15: $\sqrt[4]{512}$
16: $\sqrt[4]{3125}$ 17: $\sqrt{3x^2}$ 18: $\sqrt{5x^4y^2}$ 19: $\sqrt{7a^8b^4}$
20: $\sqrt{11a^0y^8}$ 21: $\sqrt[3]{5a^3b^6}$ 22: $\sqrt[3]{6x^6y^9}$ 23: $\sqrt[3]{7x^3y^3}$
24: $\sqrt[3]{2a^9b^3}$ 25: $\sqrt{18x^5}$ 26: $\sqrt{12x^3y^5}$ 27: $\sqrt{24a^7}$
28: $\sqrt{45b^9}$ 29: $\sqrt[3]{8a^6}$ 30: $\sqrt[3]{125a^9}$ 31: $\sqrt[3]{16x^6y^4}$
32: $\sqrt[3]{135a^7}$ 33: $\sqrt[4]{48a^4b^6}$ 34: $\sqrt[4]{162b^4c^5}$
35: $\sqrt[4]{625x^5y^9}$ 36: $\sqrt[4]{243a^0b^7}$ 37: $\sqrt[5]{64a^7b^8}$
38: $\sqrt[5]{486x^7y^{11}}$ 39: $\sqrt[6]{64x^9y^{13}}$ 40: $\sqrt[7]{3^8a^{10}b^{15}}$
41: $\sqrt{\dfrac{2a}{9b^2}}$ 42: $\sqrt{\dfrac{3x^3}{4y^4}}$ 43: $\sqrt{\dfrac{5a^5}{16b^6}}$ 44: $\sqrt{\dfrac{7a^7}{121c^8}}$
45: $\sqrt[3]{\dfrac{6x^3}{8y^9}}$ 46: $\sqrt[4]{\dfrac{3a}{16y^8}}$ 47: $\sqrt[4]{\dfrac{2x^3}{81a^{12}}}$ 48: $\sqrt[3]{\dfrac{2b^2}{125x^9}}$
49: $\sqrt{\dfrac{64x^3}{9y}}$ 50: $\sqrt{\dfrac{16x^3}{9y^5}}$ 51: $\sqrt{\dfrac{8a^5}{3b^7}}$ 52: $\sqrt{\dfrac{18a^5}{16c^3}}$
53: $\sqrt[3]{\dfrac{24a^6b^7}{54c^8}}$ 54: $\sqrt[3]{\dfrac{250x^4}{192y^6z^7}}$ 55: $\sqrt[5]{\dfrac{486x^6y^9}{32a^7}}$ 56: $\sqrt[4]{\dfrac{625a^{12}}{32b^5c^7}}$
57: $\sqrt{(x+y)(x^2-y^2)}$ 58: $\sqrt{(x-2y)(x^2-4y^2)}$
59: $\sqrt{(x^2+x-2)(2x^2-x-1)}$ 60: $\sqrt{(x^2+4x+3)(3x^2+2x-1)}$
61: $\sqrt{a^{2n}b^{5n}}$ 62: $\sqrt[5]{a^{2n}b^{5n}}$
63: $\sqrt[n]{a^{2n}b^{5n}}$ 64: $\sqrt[3]{a^{3n}b^{4n}}$

En los problemas 65 a 80 redúzcase el orden de los radicales y elimínense luego dél signo radical todos los factores posibles.

65: $\sqrt[6]{4}$ 66: $\sqrt[6]{8}$ 67: $\sqrt[4]{9}$ 68: $\sqrt[9]{64}$
69: $\sqrt[4]{4x^8}$ 70: $\sqrt[6]{125x^6}$ 71: $\sqrt[9]{512a^3}$ 72: $\sqrt[10]{32x^5}$
73: $\sqrt[4]{64x^6y^{12}}$ 74: $\sqrt[6]{64x^6y^9}$ 75: $\sqrt[9]{64x^6y^9}$
76: $\sqrt[8]{25x^{12}y^6}$ 77: $\sqrt[4]{(x-1)^2\,16}$ 78: $\sqrt[6]{8(3x-2)^9}$
79: $\sqrt[4]{64(3x-1)^6}$ 80: $\sqrt[10]{243(2x+5)^5}$

Escríbanse cada una de las expresiones siguientes con un solo radical del menor orden posible.

81: $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}$ 82: $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}}$ 83: $\sqrt[3]{\sqrt{x^4}}$ 84: $\sqrt[5]{\sqrt{a^5}}$
85: $\sqrt[15]{\sqrt{64a^6}}$ 86: $\sqrt[10]{\sqrt{81x^8}}$ 87: $\sqrt[3]{\sqrt[6]{512b^9}}$ 88: $\sqrt{\sqrt[6]{625c^8}}$

7.9 MULTIPLICACION DE RADICALES DEL MISMO ORDEN.

Si se lee de derecha a izquierda la ley (7.15), se obtiene el producto de dos o más radicales del mismo orden.

EJEMPLO 1 Encontrar el producto de $\sqrt{3}$ por $\sqrt{7}$.

Solución

$$\sqrt{3}\sqrt{7} = \sqrt{(3)(7)} = \sqrt{21}$$

EJEMPLO 2 Encontrar el producto de $\sqrt[5]{2ab}$ por $\sqrt[5]{5a^2b^3}$.

Solución

$$\sqrt[5]{2ab}\sqrt[5]{5a^2b^3} = \sqrt[5]{(2ab)(5a^2b^3)} = \sqrt[5]{10a^3b^4}$$

Frecuentemente el radicando obtenido como producto de dos radicales de orden n, tiene factores que son enésimas potencias. En tales casos se deben eliminar del radical todos los factores racionales posibles.

EJEMPLO 3 Encontrar el producto de $\sqrt{5ab^2}$ por $\sqrt{15ab^3}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt{5ab^2}\sqrt{15ab^3} &= \sqrt{(5ab^2)(15ab^3)}\\ &= \sqrt{75a^2b^5}\\ &= \sqrt{(25a^2b^4)3b}\\ &= 5ab^2\sqrt{3b}\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Calcular el producto de $\sqrt[3]{6x^4y^5}$ por $\sqrt[3]{4xy^2}$, y por $\sqrt[3]{9x^2y^3}$.

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{6x^4y^5}\sqrt[3]{4xy^2}\sqrt[3]{9x^2y^3} &= \sqrt[3]{(6x^4y^5)(4xy^2)(9x^2y^3)}\\ &= \sqrt[3]{216x^7y^{10}}\\ &= \sqrt[3]{(6x^2y^3)^3(xy)}\\ &= 6x^2y^3\sqrt[3]{xy}\end{aligned}$$

7.10 DIVISION DE RADICALES DEL MISMO ORDEN.

Si se lee de derecha a izquierda la ley (7.16) se puede obtener el cociente de dos radicales de orden n. El procedimiento se ilustra mediante los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1 Encontrar el cociente de $\sqrt{24a^3b^4c^5}$ entre $\sqrt{3ab^2c^2}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{24a^3b^4c^5}}{\sqrt{3ab^2c^2}} &= \sqrt{\frac{24a^3b^4c^5}{3ab^2c^2}} \quad \textit{según ec. } (7.16)\\ &= \sqrt{8a^2b^2c^3}\\ &= \sqrt{(2^2a^2b^2c^2)2c}\\ &= 2abc\sqrt{2c}\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Calcular el cociente $\sqrt[5]{384a^7b^2c^{11}}$ entre $\sqrt[5]{9a^2b^9c^5}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[5]{384a^7b^2c^{11}}}{\sqrt[5]{9a^2b^9c^5}} &= \sqrt[5]{\frac{384a^7b^2c^{11}}{9a^2b^9c^5}} \quad \textit{según ec. } (7.16)\\ &= \sqrt[5]{\frac{128a^5c^6}{3b^7}}\\ &= \sqrt[5]{\frac{(2^5a^5c^5)(4c)}{b^5(3b^2)}}\\ &= \frac{2ac}{b}\sqrt[5]{\frac{4c}{3b^2}}\end{aligned}$$

7.11 RACIONALIZACION DE DENOMINADORES.

Una fracción que contiene un radical en el denominador se puede expresar siempre por medio de otra fracción equivalente que no contenga ningún radical en el denominador. Este proceso se llama *racionalización de denominadores*. Muchas operaciones que comprenden radicales se facilitan si al principio se racionalizan todos los denominadores.

Si el radicando es una fracción cuyo denominador es un monomio, o si el denominador de una fracción tiene un radical como factor, el radical se elimina del denominador según el método que se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 Racionalizar el denominador de $2/\sqrt{3}$.

Solución: Para racionalizar el denominador en $2/\sqrt{3}$ se multiplica cada miembro de la fracción por $\sqrt{3}$, y se obtiene

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Una ventaja que la expresión racionalizada tiene sobre la original se presenta al escribir la fracción en forma decimal. Como $\sqrt{3} = 1.732$, la expresión decimal $2/\sqrt{3} = 2/1.732$ requiere una división laboriosa. En la forma racionalizada $2\sqrt{3}/3 = 2(1.732)/3$, la computación requiere sólo dos pasos tan simples, que se puede efectuar mentalmente.

EJEMPLO 2 Racionalizar el denominador de $\sqrt[3]{3a/2b^2c}$.

Solución: Para racionalizar el denominador de $\sqrt[3]{3a/2b^2c}$ se convierte la fracción en otra equivalente en la que el denominador es un cubo perfecto. La operación se efectúa multiplicando el radical por $\sqrt[3]{4bc^2/4bc^2} = 1$. Se tiene así

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{3a}{2b^2c}} &= \sqrt[3]{\frac{3a}{2b^2c}}\,\sqrt[3]{\frac{4bc^2}{4bc^2}}\\ &= \sqrt[3]{\frac{12abc^2}{8b^3c^3}} \qquad \textit{según ec. (7.16)}\\ &= \frac{\sqrt[3]{12abc^2}}{2bc}\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Racionalizar el denominador de $(x^2 - y^2)/2x\sqrt{x+y}$.

Solución: El denominador de $(x^2 - y^2)/(2x\sqrt{x+y})$ se racionaliza multiplicando cada miembro de la fracción por $\sqrt{x+y}$, y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{x^2-y^2}{2x\sqrt{x+y}} &= \frac{(x^2-y^2)\sqrt{x+y}}{2x\sqrt{x+y}\sqrt{x+y}}\\ &= \frac{(x^2-y^2)\sqrt{x+y}}{2x\sqrt{(x+y)^2}}\\ &= \frac{(x+y)(x-y)\sqrt{x+y}}{2x(x+y)}\\ &= \frac{(x-y)\sqrt{x+y}}{2x}\end{aligned}$$

7.12 SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES RADICALES.

Para simplificar una expresión radical se efectúan los pasos siguientes:

1. Se efectúan todas las operaciones posibles con las leyes de los Pr. (7.9) a (7.11).
2. Se eliminan de los radicales todos los factores racionales posibles.
3. Se racionalizan los denominadores.
4. Si el resultado final contiene un radical, éste se reduce al menor orden posible.

EJEMPLO 1 Simplificar

$$\frac{\sqrt{3x^3y}\sqrt{15xy^5}}{\sqrt{80x^7y}}$$

Solución

$$\frac{\sqrt{3x^3y}\sqrt{15xy^5}}{\sqrt{80x^7y}} = \sqrt{\frac{(3x^3y)(15xy^5)}{80x^7y}} \qquad \textit{según (7.15) y (7.16)}$$

$$= \sqrt{\frac{45x^4y^6}{80x^7y}} \qquad \textit{se han efectuado las operaciones indicadas}$$

$$= \sqrt{\frac{9y^5}{16x^3}} \qquad \textit{se ha reducido el radicando al menor término}$$

$$= \frac{3y^2}{4x}\sqrt{\frac{y}{x}} \qquad \textit{se ha eliminado un factor racional}$$

$$= \frac{3y^2}{4x}\sqrt{\frac{xy}{x^2}} \qquad \textit{— se ha racionalizado el denominador}$$

$$= \frac{3y^2\sqrt{xy}}{4x^2}$$

NOTA: Se puede simplificar algo la operación anterior si en el tercer paso el denominador se convierte en un cuadrado perfecto, multiplicando cada miembro de la fracción por x. Se obtiene así

$$\sqrt{\frac{9y^5}{16x^3}} = \sqrt{\frac{9xy^5}{16x^4}} = \frac{3y^2\sqrt{xy}}{4x^2}$$

EJEMPLO 2 Simplificar

$$\frac{\sqrt[4]{24a^3b^2c^2}}{\sqrt[4]{8a^5b^6c^3}\sqrt[4]{48a^2b^2c^9}}$$

Solución

$$\frac{\sqrt[4]{24a^3b^2c^2}}{\sqrt[4]{8a^5b^6c^3}\sqrt[4]{48a^2b^2c^9}} = \sqrt[4]{\frac{24a^3b^2c^2}{(8a^5b^6c^3)(48a^2b^2c^9)}} \qquad \textit{según (7.15) y (7.16)}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{24a^3b^2c^2}{384a^7b^8c^{12}}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{16a^4b^6c^{10}}} \qquad \textit{se ha reducido el radicando al menor término}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{(16a^4b^4c^8)(b^2c^2)}} \qquad \textit{se han sacado las potencias cuartas}$$

$$= \frac{1}{2abc^2}\sqrt[4]{\frac{1}{b^2c^2}} \qquad \textit{se ha eliminado un factor racional}$$

$$\frac{\sqrt[4]{24a^3b^2c^2}}{\sqrt[4]{8a^5b^6c^3}\sqrt[4]{48a^2b^2c^9}} = \frac{1}{2abc^2}\sqrt[4]{\frac{b^2c^2}{b^4c^4}} \qquad \textit{se ha reducido el orden del radical}$$
$$= \frac{1}{(2abc^2)(bc)}\sqrt[4]{b^2c^2}$$
$$= \frac{1}{2ab^2c^3}\sqrt{bc} \qquad \textit{se ha racionalizado el denominador}$$

Después de cierta práctica es posible combinar algunos de los pasos anteriores efectuando mentalmente las operaciones.

EJEMPLO 3 Simplificar

$$\frac{(\sqrt{6x^3yz})^2(\sqrt{2xy^5z^3})^3}{\sqrt{8x^7y^3z^5}}$$

eliminando los factores que sea posible del radicando.

Solución

$$\frac{(\sqrt{6x^3yz})^2(\sqrt{2xy^5z^3})^3}{\sqrt{8x^7y^3z^5}} = \sqrt{\frac{(6x^3yz)^2(2xy^5z^3)^3}{8x^7y^3z^5}} \qquad \textit{según (7.15) y (7.16)}$$
$$= 6x^3yz\sqrt{\frac{(2xy^5z^3)^3}{8x^7y^3z^5}} \qquad \textit{eliminando un factor racional}$$
$$= 6x^3yz\sqrt{\frac{8x^3y^{15}z^9}{8x^7y^3z^5}} \qquad \textit{según (7.4)}$$
$$= 6x^3yz\sqrt{\frac{y^{12}z^4}{x^4}} \qquad \textit{simplificando el radicando a su mínima expresión}$$
$$= (6x^3yz)\left(\frac{y^6z^2}{x^2}\right) \qquad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$
$$= \frac{6x^3y^7z^3}{x^2} \qquad \textit{efectuando las operaciones indicadas}$$
$$= 6xy^7z^3$$

EJERCICIO 29: SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES RADICALES

En cada uno de los problemas que siguen simplifíquese la expresión en un solo radical, racionalícese el denominador, elimínense del radicando todos los factores posibles, y cuando sea factible, redúzcase el orden del radical.

1: $\sqrt{2}\sqrt{18}$	2: $\sqrt{5}\sqrt{20}$	3: $\sqrt{3}\sqrt{27}$	4: $\sqrt{6}\sqrt{24}$
5: $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}$	6: $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{32}$	7: $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}$	8: $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{24}$
9: $\sqrt{\frac{3}{2}}$	10: $\sqrt{\frac{4}{5}}$	11: $\sqrt{\frac{7}{6}}$	12: $\sqrt{\frac{3}{8}}$
13: $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$	14: $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$	15: $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$	16: $\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{6}}$

17: $\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{27}{8}}$ 18: $\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\sqrt[4]{\frac{125}{27}}$ 19: $\sqrt[4]{\frac{2}{49}}\sqrt[4]{\frac{25}{8}}$

20: $\sqrt[6]{\frac{3}{16}}\sqrt[6]{\frac{18}{125}}$ 21: $\sqrt{8xy^2}\sqrt{2xy}$ 22: $\sqrt{3ab^3}\sqrt{6ab}$

23: $\sqrt{6x^2y}\sqrt{2xy^5}$ 24: $\sqrt{15ab^3}\sqrt{5ab^0}$ 25: $\sqrt{14h^3k^2}\sqrt{7hk}$

26: $\sqrt{8a^3b^0}\sqrt{2a^5b}$ 27: $\sqrt{3a^2t^5}\sqrt{27at}$ 28: $\sqrt{10p^7q^2}\sqrt{40pq^3}$

29: $\sqrt[3]{16u^3v}\sqrt[3]{4uv^4}$ 30: $\sqrt[3]{6dt^5}\sqrt[3]{12d^2t^2}$ 31: $\sqrt[4]{3p^2q}\sqrt[4]{12p^0q}$

32: $\sqrt[6]{2s^5a}\sqrt[6]{4s^4a^2}$ 33: $\sqrt{\frac{2a}{3b}}\sqrt{\frac{6a^2}{25b^4}}$ 34: $\sqrt{\frac{4x^3}{5y}}\sqrt{\frac{2x}{9y^2}}$

35: $\sqrt{\frac{7x}{4y^3}}\sqrt{\frac{14x}{3y^2}}$ 36: $\sqrt{\frac{6x}{5y}}\sqrt{\frac{9y^4}{10x^2}}$ 37: $\frac{\sqrt{3x^3y}}{\sqrt{18xy^2}}$

$38: \dfrac{\sqrt{7xy^5}}{\sqrt{8x^3y}}$ $39: \dfrac{\sqrt{27a^6b^3}}{\sqrt{18a^3b^5}}$ $40: \dfrac{\sqrt{343h^7k^2}}{\sqrt{35h^3k^5}}$

$41: \dfrac{\sqrt[3]{243a^2b^4}}{\sqrt[3]{36ab^2}}$ $42: \dfrac{\sqrt[4]{12xb^3}}{\sqrt[4]{75x^3b}}$ $43: \dfrac{\sqrt[6]{162a^5h^4}}{\sqrt[6]{6a^2h}}$

$44: \dfrac{\sqrt[3]{375bh^2}}{\sqrt[3]{36b^2h^4}}$ $45: \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{72}}{\sqrt{6}}$ $46: \dfrac{\sqrt{35}\sqrt{21}}{\sqrt{15}}$

$47: \dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt{12}\sqrt{30}}$ $48: \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{30}\sqrt{84}}$ $49: \dfrac{\sqrt{7x^2z}\sqrt{3yz^2}}{\sqrt{42xz^2}}$

$50: \dfrac{\sqrt{30x^3y^5}}{\sqrt{245xz^4}\sqrt{24yz^3}}$ $51: \dfrac{\sqrt[3]{6k^2t^4}}{\sqrt[3]{3h^2k}\sqrt[3]{4h^2t}}$ $52: \dfrac{\sqrt[3]{14x^3a^2}\sqrt[3]{98at^2}}{\sqrt[3]{2xt}}$

$53: \dfrac{\sqrt{50a^{-4}y^5}}{\sqrt{3ay^{-2}}}$ $54: \dfrac{\sqrt{21b^{-2}u^{-1}}}{\sqrt{24bu^3}}$

$55: \dfrac{\sqrt{21h^{-1}k^{-3}}}{\sqrt{10hk^2}}$ $56: \dfrac{\sqrt{5b^{-2}c}}{\sqrt{8b^{-1}c^{-1}}}$

$57: \dfrac{(x+y)\sqrt{x+y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$ $58: \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{(x-y)\sqrt{x+y}}$

$59: \dfrac{(x+y)\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$ $60: \dfrac{(x-y)\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$

$61: \dfrac{\sqrt[3]{a+b}}{\sqrt[3]{(a^2-b^2)(a-b)}}$ $62: \dfrac{\sqrt[3]{(b^2-c^2)(b-c)}}{\sqrt[3]{(b+c)^2}}$

$63: \dfrac{\sqrt[3]{c^2-d^2}}{\sqrt[3]{(c+d)(c-d)^2}}$ $64: \dfrac{\sqrt[3]{(c-d)^2}}{\sqrt[3]{(c^2-d^2)(c+d)}}$

7.13 ADICION DE RADICALES.

Para encontrar la suma de dos o más radicales del mismo orden y de igual radicando se suman los coeficientes de los radicales y el resultado se multiplica por el radical.

EJEMPLO 1 Sumar los radicales $2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 3\sqrt{a}$.

Solución

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 3\sqrt{a} &= (2+5-3)\sqrt{a} \\ &= 4\sqrt{a} \end{aligned}$$

Dos radicales de diferente orden o con diferentes radicandos no pueden sumarse. Por ejemplo, ni $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ni $\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}$ se pueden expresar como un solo término.

Si los radicales por sumarse no están en su forma más simple, se simplifican según los métodos del Pr. (7.12) y luego se efectúa la suma de aquellos que tengan el mismo índice o el mismo radicando.

EJEMPLO 2 Simplificar y sumar los radicales $\sqrt{108} + \sqrt{48} - \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{108} + \sqrt{48} - \sqrt{3} &= \sqrt{(36)3} + \sqrt{(16)3} - \sqrt{3} && \textit{factorizando} \\ &= 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} && \textit{eliminando factores radicales} \\ &= (6+4-1)\sqrt{3} && \textit{sumando los radicales} \\ &= 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Simplificar la expresión y súmense los radicales posibles.

$$\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt{\frac{2}{ab}} - \sqrt[3]{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2}.$$

Solución: La forma de resolver este problema es: (1), tratar de convertir los radicales al mismo orden o, por lo menos, agrupar los radicales del mismo orden, y (2), tratar de dejar bajo radical los mismos radicandos. En la práctica ambos procesos se combinan.

$$\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt{\frac{2}{ab}} - \sqrt[3]{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2}$$

$$= \sqrt{(4a^2b^2)2ab} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt{\frac{2ab}{a^2b^2}} - \sqrt[3]{(2ab)^3ab} - \sqrt[4]{(2ab)^2} \quad (1)$$

$$= 2ab\sqrt{2ab} + \sqrt[3]{ab} - \frac{\sqrt{2ab}}{ab} - 2ab\sqrt[3]{ab} - \sqrt{2ab} \quad (2)$$

$$= \left(2ab - \frac{1}{ab} - 1\right)\sqrt{2ab} + (1 - 2ab)\sqrt[3]{ab} \quad (3)$$

Nótese en (1) y (2) que el radicando de los radicales de segundo orden puede convertirse en 2 ab y que el de los radicales de tercer orden puede serlo en ab; por tanto, puede ser simplificado.

EJERCICIO 30: ADICION Y SUSTRACCION DE EXPRESIONES RADICALES

Elimínense del radicando todos los factores posibles y racionalícese cada denominador; efectúense entonces las operaciones de adición y sustracción que sean propias. Cuando sea posible redúzcase el orden de cada radical.

1: $\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{50}$

2: $\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{48}$

3: $\sqrt{5} - \sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80}$

4: $\sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{150} + \sqrt{216}$

5: $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{250}$

6: $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{192}$

7: $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{625}$

8: $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{686}$

9: $\sqrt{27} + \sqrt[3]{24} - \sqrt{108} + \sqrt[3]{375}$

10: $\sqrt{20} + \sqrt[3]{250} + \sqrt{180} - \sqrt[3]{432}$

11: $\sqrt{32} + \sqrt{12} - \sqrt{98} + \sqrt{75}$

12: $\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{200}$

13: $2\sqrt{x^4y} - x\sqrt{9x^2y} + x^2\sqrt{16y}$

14: $\sqrt{4pq^3} - \sqrt{9p^3q} + \sqrt{16p^3q^3}$

15: $\sqrt{2a^3b^5} + \sqrt{8a^5b} - \sqrt{50a^7b^3}$

16: $\sqrt{a^5t} - \sqrt{4a^3t^3} + \sqrt{at^5}$

17: $\dfrac{\sqrt{9x}}{x} + \sqrt{\dfrac{4}{x}} - \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

18: $\dfrac{\sqrt{16a}}{a} + \dfrac{\sqrt{9a^3}}{a^2} - \dfrac{6}{\sqrt{a}}$

19: $\dfrac{x\sqrt{8x}}{y} - \dfrac{\sqrt{18x^3}}{y} + \dfrac{10x^2}{y\sqrt{2x}}$

20: $\dfrac{\sqrt{6a^3}}{b} - \sqrt{\dfrac{9a}{6b^2}} + \dfrac{4a}{b\sqrt{6a}}$

21: $\sqrt{9u^2v} - \sqrt{4uv^2} - \sqrt{u^2v} + \sqrt{25uv^2}$

22: $\sqrt{3s^3a} - \sqrt{s^2a^3} + \sqrt{12sa^5} + \sqrt{s^0a^7}$

23: $\sqrt[3]{p^2q^4} - \sqrt[3]{p^4q^5} + \sqrt[3]{8p^5q} - \sqrt[3]{8p^7q^2}$

24: $\sqrt[3]{2x^2t^4} - \sqrt[3]{xt^5} - \sqrt[3]{16x^5t} + \sqrt[3]{8x^4t^2}$

25: $\sqrt{\dfrac{ab^2}{2}} - \sqrt{\dfrac{a^4b}{3}} + \sqrt{\dfrac{a^3}{8}} + \sqrt{\dfrac{3b}{a^2}}$

26: $\sqrt{\dfrac{32h}{9k}} + \dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{k}{h}} + \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{50h}{k}} + \sqrt{\dfrac{4k}{25h}}$

27: $\sqrt{\dfrac{2a^3}{b^3}} + a^2\sqrt{\dfrac{18}{ab^3}} + \dfrac{b}{5}\sqrt{\dfrac{50a}{b^5}} - \dfrac{b^2}{a}\sqrt{\dfrac{32a^5}{b^7}}$

28: $\sqrt{\dfrac{2s^3}{3t}}+3\sqrt{\dfrac{8t^3}{3s}}-\dfrac{1}{s}\sqrt{\dfrac{3s}{2t}}+\dfrac{1}{2t}\sqrt{\dfrac{2t}{3s}}$

29: $\sqrt{3xy}+\sqrt[4]{9x^2y^2}+\sqrt[6]{27x^3y^3}$

30: $\sqrt[3]{27ab^4}-2b\sqrt[6]{a^2b^2}-b\sqrt[9]{a^3b^3}$

31: $\sqrt[4]{\dfrac{144a^2}{b^2}}+\sqrt{\dfrac{27a}{b}}+\sqrt[8]{\dfrac{81a^4}{b^4}}$

32: $\sqrt[6]{\dfrac{c^2}{64a^2b^2}}-\sqrt[9]{\dfrac{c^3}{512a^3b^3}}+\sqrt[12]{\dfrac{c^4}{a^4b^4}}$

33: $\sqrt{\dfrac{2x-y}{2x+y}}-\sqrt{\dfrac{2x+y}{2x-y}}$

34: $\sqrt{\dfrac{x-3y}{x+3y}}+\sqrt{\dfrac{x+3y}{x-3y}}$

35: $a\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+b\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-\dfrac{a^2+2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

36: $\sqrt{\dfrac{2a-b}{a-2b}}-\sqrt{\dfrac{a-2b}{2a-b}}+\dfrac{a-b}{\sqrt{2a^2-5ab+2b^2}}$

37: $\dfrac{p+3}{2\sqrt{p+3}}-\sqrt{p+3}$

38: $\dfrac{q}{\sqrt{q-2}}+3\sqrt{q-2}$

39: $\dfrac{x-7}{2\sqrt{x+5}}+3\sqrt{x+5}$

40: $\dfrac{y-4}{3\sqrt{y+2}}+2\sqrt{y+2}$

7.14 OTRAS OPERACIONES CON RADICALES.

Multiplicación de multinomios cuyos términos contienen radicales. Para obtener el producto de dos polinomios cuyos términos contienen radicales, se emplean los métodos de los párrafos (1.7) y (7.9).

EJEMPLO 1 Encontrar el producto de $\sqrt{x}-2\sqrt{xy}+2\sqrt{y}$ y $\sqrt{x}+2\sqrt{xy}-\sqrt{y}$.

Solución

$$\begin{array}{lllll}
\sqrt{x}-2\sqrt{xy}+2\sqrt{y} & & & & \\
\sqrt{x}+2\sqrt{xy}-\sqrt{y} & & & & \\
\hline
x-2x\sqrt{y}+2\sqrt{xy} & & & & \textit{multiplicando } \sqrt{x}-2\sqrt{xy}+2\sqrt{y} \textit{ por } \sqrt{x} \\
\quad 2x\sqrt{y} & -4xy & +4y\sqrt{x} & & \textit{multiplicando } \sqrt{x}-2\sqrt{xy}+2\sqrt{y} \textit{ por } 2\sqrt{xy} \\
\quad -\sqrt{xy} & & +2y\sqrt{x} & -2y & \textit{multiplicando } \sqrt{x}-2\sqrt{xy}+2\sqrt{y} \textit{ por } -\sqrt{y} \\
\hline
x+\sqrt{xy} & -4xy & +6y\sqrt{x} & -2y &
\end{array}$$

Por tanto, el producto es $x+\sqrt{xy}-4xy+6y\sqrt{x}-2y$.

Introducción de un factor bajo el signo radical. En una expresión del tipo $a\sqrt[n]{b}$ se puede colocar el factor a debajo del signo radical si se eleva a la potencia n, esto es, $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

EJEMPLO 2 Colocar el factor $a^2 b$ dentro del radical en $a^2b\sqrt[3]{ab}$

Solución

$$\begin{aligned} a^2b\sqrt[3]{ab} &= \sqrt[3]{(a^2)^3b^3(ab)} \\ &= \sqrt[3]{a^7b^4} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Colocar el factor $2x^3y^2$ bajo el signo radical en $2x^3y^2\sqrt[4]{3xy^3}$

Solución

$$\begin{aligned} 2x^3y^2\sqrt[4]{3xy^3} &= \sqrt[4]{(2x^3y^2)^4 3xy^3} \\ &= \sqrt[4]{48x^{13}y^{11}} \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Poner el factor externo bajo del signo radical en cada una de las siguientes expresiones radicales, y arreglar luego los radicales en orden de magnitudes: $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, $4\sqrt{2}$.

Solución

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3} &= \sqrt{(9)(3)} = \sqrt{27} \\ 2\sqrt{6} &= \sqrt{(4)(6)} = \sqrt{24} \\ 4\sqrt{2} &= \sqrt{(16)(2)} = \sqrt{32} \end{aligned}$$

Luego, puesto que $24 < 27 < 32$, la ordenación deseada es $2\sqrt{6}$, $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$.

Conversión de dos o más radicales a radicales del mismo orden. Dos o más radicales se pueden expresar en el mismo orden si, primero, se expresa cada uno en la forma exponencial; segundo, se reducen los exponente fraccionarios a un común denominador; tercero, se escribe el resultado nuevamente en forma radical.

EJEMPLO 5 Convertir $\sqrt{2xy^3}$, $\sqrt[3]{3x^2y}$, $\sqrt[4]{x^3y^2}$ a radicales del mismo orden.

Solución

$$\sqrt{2xy^3} = 2^{1/2}x^{1/2}y^{3/2} \qquad \sqrt[3]{3x^2y} = 3^{1/3}x^{2/3}y^{1/3} \qquad \sqrt[4]{x^3y^2} = x^{3/4}y^{2/4}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores 2, 3 y 4 es 12. Por tanto, si cada exponente fraccionario se reduce a una fracción que tiene 12 por denominador, se tiene

$$2^{6/12}x^{6/12}y^{18/12} \qquad 3^{4/12}x^{8/12}y^{4/12} \qquad x^{9/12}y^{6/12}$$

Las expresiones anteriores en forma radical son

$$\sqrt[12]{2^6x^6y^{18}} \qquad \sqrt[12]{3^4x^8y^4} \qquad \sqrt[12]{x^9y^6}$$

EJEMPLO 6 Encontrar el producto de $\sqrt{2a^3b}$ por $\sqrt[3]{4ab^4}$, reduciendo primero los radicales a un mismo orden y efectuando luego la multiplicación.

Solución

$$\begin{aligned} (\sqrt{2a^3b})(\sqrt[3]{4ab^4}) &= (2^{1/2}a^{3/2}b^{1/2})(4^{1/3}a^{1/3}b^{4/3}) \\ &= (2^{3/6}a^{9/6}b^{3/6})(4^{2/6}a^{2/6}b^{8/6}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt[6]{2^3a^9b^3}\sqrt[6]{4^2a^2b^8} \\
&= \sqrt[6]{(2^3)(4^2)a^{11}b^{11}} \\
&= \sqrt[6]{2^7a^{11}b^{11}} \qquad \textit{puesto que } 4^2 = 2^4 \\
&= \sqrt[6]{(2ab)^6 2a^5b^5} \\
&= 2ab\sqrt[6]{2a^5b^5}
\end{aligned}
$$

Se pueden reducir al mismo orden dos o más radicales, sin cambiar previamente a exponentes fraccionarios, empleando el método siguiente.

1. Se encuentra el M.C.M. de los índices de los radicales. Este será el índice de los radicales que se obtengan.

2. Se multiplica el exponente de cada factor del radicando, por el cociente obtenido al dividir el anterior M.C.M. entre el índice del radical.

EJEMPLO 7 Reducir al mismo orden las expresiones $\sqrt[3]{2a^2b}$, $\sqrt{3ab}$, and $\sqrt[4]{4a^3b^2}$

Solución: Se observa que el M.C.M. de los índices es 12. Por tanto, se multiplican los exponentes del primer radicando por 4, los del segundo por 6 y los del tercero por 3. Se obtiene así

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{2a^2b} &= \sqrt[12]{2^4a^8b^4} = \sqrt[12]{16a^8b^4} \\
\sqrt{3ab} &= \sqrt[12]{3^6a^6b^6} = \sqrt[12]{729a^6b^6} \\
\sqrt[4]{4a^3b^2} &= \sqrt[12]{4^3a^9b^6} = \sqrt[12]{64a^9b^6}
\end{aligned}
$$

Racionalización de denominadores que son binomios. Si el denominador de una fracción es la suma o la diferencia de dos términos de los cuales por lo menos uno contiene un radical de segundo orden, se racionaliza el denominador según el método que se muestra a continuación.

EJEMPLO 8 Racionalizar el denominador de $4/(\sqrt{5} - 1)$.

Solución: Puesto que el producto de la suma por la diferencia de dos números es igual a la diferencia de los cuadrados de los números, se multiplica por $\sqrt{5} + 1$ cada miembro de la fracción anterior, y se obtiene

$$
\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{4(\sqrt{5}+1)}{4}
$$

$$
= \sqrt{5} + 1
$$

EJEMPLO 9 Racionalizar el denominador de la fracción $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{(a+b+2\sqrt{ab})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} \\
&= \frac{a\sqrt{a} - a\sqrt{b} + b\sqrt{a} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{b} - 2b\sqrt{a}}{a-b} \\
&= \frac{\sqrt{a}(a+b-2b) + \sqrt{b}(-a-b+2a)}{a-b} \\
&= \frac{\sqrt{a}(a-b) + \sqrt{b}(a-b)}{a-b} \\
&= \frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

En los ejemplos 8 y 9 se obtuvo la racionalización deseada multiplicando los dos miembros de la fracción por un binomio que contiene los mismos términos que el denominador, pero cambiando el signo entre ellos. Si se aplica este procedimiento a cualquier fracción cuyo denominador sea un binomio que contenga un radical de segundo orden, se obtiene una fracción equivalente cuyo denominador es la diferencia de los cuadrados de los términos del binomio original. Por tanto, no contiene radicales.

EJERCICIO 31: OPERACIONES CON EXPRESIONES RADICALES

Determínense los productos indicados en los problemas 1 a 16.

1: $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$
2: $(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$
3: $(2\sqrt{5} - \sqrt{6})(2\sqrt{5} + \sqrt{6})$
4: $(\sqrt{11} + \sqrt{7})(\sqrt{11} - \sqrt{7})$
5: $(\sqrt{5} - 2\sqrt{3})(2\sqrt{5} - \sqrt{3})$
6: $(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$
7: $(2\sqrt{7} - 3\sqrt{2})(3\sqrt{7} - 2\sqrt{2})$
8: $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$
9: $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$
10: $(\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v})$
11: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)$
12: $(\sqrt{u} + \sqrt{v})(u - \sqrt{uv} + v)$
13: $(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{ab})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{ab})$
14: $(\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{xy})(\sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{xy})$
15: $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})$
16: $(a - \sqrt{a} + \sqrt{2a})(a + \sqrt{a} - \sqrt{2a})$

En los problemas 17 a 28 sustituya el coeficiente del radical por un factor del radicando y ordene los radicales por orden de magnitud.

17: $3\sqrt{2}, 2\sqrt{6}, 2\sqrt{5}$
18: $3\sqrt{5}, 3\sqrt{6}, 4\sqrt{3}$
19: $2\sqrt{30}, 5\sqrt{5}, 3\sqrt{13}$
20: $3\sqrt{19}, 6\sqrt{5}, 5\sqrt{7}$
21: $3\sqrt[3]{2}, 4\sqrt[3]{1}, 2\sqrt[3]{7}$
22: $4\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[3]{8}, 2\sqrt[3]{26}$
23: $5\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{9}, 2\sqrt[3]{31}$
24: $4\sqrt[3]{5}, 3\sqrt[3]{12}, 2\sqrt[3]{41}$
25: $a\sqrt{2}, a\sqrt{2a}, a^2\sqrt{2a}, 0<a<1$
26: $2ab\sqrt{6b}, 3a\sqrt{3b^3}, 2b\sqrt{7a^2b}$
27: $3a\sqrt{7ab^3}, 2b\sqrt{16a^3b}, ab\sqrt{65ab}$
28: $b\sqrt{\frac{3}{b}}, b^3\sqrt{\frac{3}{b^3}}, b^5\sqrt{\frac{3}{b^5}}, b > 1$

Redúzcanse a un mismo orden las expresiones de los problemas 29 a 36.

29: $\sqrt{2y}, \sqrt[3]{3y^2}$
30: $\sqrt{5w}, \sqrt[3]{9w^2}$
31: $\sqrt[3]{5x^2}, \sqrt[4]{8x}$
32: $\sqrt[3]{2y}, \sqrt[5]{3y}$
33: $\sqrt{3x}, \sqrt[4]{9x^2}, \sqrt[3]{2x}$
34: $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[5]{a}$
35: $\sqrt[3]{x^2y}, \sqrt[6]{2x^5y^2}, \sqrt[9]{3x^7y^3}$
36: $\sqrt{2xy}, \sqrt[4]{5x^2y^3}, \sqrt[6]{9x^3y^5}$

Redúzcanse a un mismo orden las expresiones de los problemas 37 a 44 y luego efectúense las operaciones indicadas.

37: $\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}$
38: $\sqrt[3]{4}\,\sqrt[4]{2}$
39: $\sqrt[3]{9x^2}\,\sqrt{27x^3}$
40: $\sqrt{2x^3}\,\sqrt[4]{8x^2}$
41: $\dfrac{\sqrt{3a}\,\sqrt[3]{3a^2}}{\sqrt[4]{3a^3}}$
42: $\dfrac{\sqrt{3ab}\,\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[3]{ab^2}}$

43: $\dfrac{\sqrt[3]{3x^2y}\,\sqrt[6]{9x^5y^3}}{\sqrt{3xy}}$ 44: $\dfrac{\sqrt[3]{4x^2y}\,\sqrt[4]{8x^3y^2}}{\sqrt{2xy}}$

Racionalícense los denominadores de los problemas 45 a 64.

45: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ 46: $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ 47: $\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$ 48: $\dfrac{5}{\sqrt{7}-2}$

49: $\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ 50: $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ 51: $\dfrac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ 52: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

53: $\dfrac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 54: $\dfrac{\sqrt{15}-3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 55: $\dfrac{\sqrt{21}-11}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 56: $\dfrac{1-2\sqrt{14}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

57: $\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 58: $\dfrac{a-\sqrt{ab}-2b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 59: $\dfrac{a^2-3a\sqrt{b}+2b}{a-2\sqrt{b}}$

60: $\dfrac{2a^2-5a\sqrt{b}+2b}{2a-\sqrt{b}}$ 61:* $\dfrac{2+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ 62: $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

63: $\dfrac{9-2\sqrt{35}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 64: $\dfrac{13-10\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Racionalícense los numeradores de los problemas 65 a 72.

65: $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ 66: $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ 67: $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$ 68: $\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{5}$

69: $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{14}}$ 70: $\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{-1+\sqrt{15}}$ 71: $\dfrac{3\sqrt{7}+\sqrt{2}}{19-2\sqrt{14}}$ 72: $\dfrac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{1+\sqrt{55}}$

* Como primer paso multiplíquese numerador y denominador por $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

8 ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

EN CAPÍTULOS ANTERIORES se ha estudiado que la respuesta de un problema práctico, frecuentemente puede encontrarse estableciendo y resolviendo una ecuación de primer grado (capítulo IV) o bien un conjunto de ecuaciones de primer grado (capítulo VI). Sin embargo, al intentar resolver ciertos problemas resulta que la ecuación correspondiente contiene alguna potencia de la incógnita superior a la primera potencia. El propósito de este capítulo es estudiar el caso en que la mencionada ecuación contiene como potencia más alta de la incógnita la segunda potencia. Una ecuación de este tipo se llama *de segundo grado* o *cuadrática,* palabra que proviene de la voz latina que significa cuadrado.*

Conviene notar que lo que caracteriza a una ecuación de segundo grado es que la potencia máxima de la incógnita sea la segunda, independientemente del número de incógnitas. En el presente capítulo se discutirán principalmente las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, mientras que en el capítulo IX se tratarán las ecuaciones de seguno grado con dos incógnitas.

8.1 DEFINICION DE ECUACION DE SEGUNDO GRADO

ecuación de segundo grado

Una ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, en la cual a, b y c son constantes arbitrarias y $a \neq 0$, se llama ecuación de *segundo grado*. Las ecuaciones de segundo grado en las que aparecen la primera y la segunda potencias de la incógnita se llaman *ecuaciones completas de segundo grado,* mientras que las que sólo contienen la segunda potencia de la incógnita se llaman *ecuaciones simples de segundo grado.*

* Por razones análogas las ecuaciones en la que la máxima potencia de la incógnita es la tercera o la cuarta potencia, se llaman ecuaciones de tercer grado o ecuaciones *cúbicas* y ecuaciones de cuarto grado o ecuaciones *cuárticas,* respectivamente.

ecuaciones simples y ecuaciones completas

Por ejemplo, $2x^2 - 3x + 2 = 0$ es una ecuación completa de segundo grado, mientras que $3x^2 - 27 = 0$ es una ecuación simple de segundo grado.

Para obtener las raíces de la ecuación simple de segundo grado $3x^2 - 27 = 0$, primeramente se despeja x^2, obteniéndose $x^2 = 9$. Por tanto, resulta que x es igual a 3 y a -3 o abreviadamente ± 3, ya que $(\pm 3)^2 = 9$.

EJEMPLO Resolver la euación $4x^2 + 16 = 0$

Solución

$$\begin{aligned} 4x^2 + 16 &= 0 & \\ 4x^2 &= -16 & \textit{transponiendo} \\ x^2 &= -4 & \textit{dividiendo por 4} \\ x &= \pm 2\sqrt{-1} & \textit{extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros.} \end{aligned}$$

En donde los valores de x, $\pm 2\sqrt{-1}$ son números imaginarios de acuerdo con la definición del Pr. 7.4.

NOTA. En matemáticas se emplea la letra i para denotar $\sqrt{-1}$. Por tanto, $i^2 = -1$. De acuerdo con esta notación las soluciones del ejemplo 2 son $x = \pm 2i$.

En el Pr. 8.4 se discutirá este tipo de solución de una ecuación de segundo grado, estableciéndose un método para encontrarla.

En los tres parágrafos siguientes se tratarán métodos para resolver ecuaciones de segundo grado que no son necesariamente del tipo simple.

8.2 SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR FACTORIZACION.

un factor igual a cero

El empleo de la factorización para resolver ecuaciones de segundo grado depende del principio siguiente:

El producto de dos o más factores es cero, si cualquiera de los factores es cero.

Así, la ecuación $(x - 2)(x + 1) = 0$ se satisface, ya sea para $x - 2 = 0$ ya sea para $x + 1 = 0$. Por consiguiente, las raíces de la ecuación son $x = 2$ y $x = -1$.

El principio anterior da lugar a un método altamente eficaz para la resolución de ecuaciones de segundo grado o de grado superior. Sin embargo, no puede emplearse a menos que la ecuación sea equivalente a otra en la cual el miembro de la izquierda sea el producto de dos o más factores y *el de la derecha sea cero.*

pasos para factorizar una ecuación de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado se resuelven por el método de factorización, efectuando los pasos siguientes:

1. Se trasladan todos los términos de la ecuación al miembro de la izquierda, con lo que el miembro de la derecha queda igual a cero.
2. Se factoriza el miembro de la izquierda en factores de primer grado.

3. Se iguala cada factor con cero y se revuelven las dos ecuaciones de primer grado así formadas.

Evidentemente, no se puede llevar a efecto el procedimiento si después de haber dado el paso 1 resulta que el miembro de la izquierda no es factorizable.

EJEMPLO 1 Resolver por factorización la ecuación $2x^2 = x + 6$.

Solución: A continuación se muestra la aplicación de los pasos 1, 2 y 3 a este problema.

$$\begin{aligned} 2x^2 &= x + 6 && \textit{ecuación propuesta} \\ 2x^2 - x - 6 &= 0 && \textit{se ha transpuesto } x + 6 \\ (2x + 3)(x - 2) &= 0 && \textit{se ha factorizado } 2x^2 - x - 6 \\ 2x + 3 &= 0 && \textit{se ha igualado con cero el primer factor} \\ 2x &= -3 && \\ x &= -\tfrac{3}{2} && \\ x - 2 &= 0 && \textit{se ha igualado con} \\ x &= 2 && \textit{cero el segundo factor y se ha resuelto} \end{aligned}$$

Por tanto, las dos soluciones son $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 2$

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación $5y^2 = 6y$

Solución: Obsérvese que en esta ecuación el término constante es igual a 0.

$$\begin{aligned} 5y^2 - 6y &= 0 && \textit{se ha transpuesto } 6y \\ y(5y - 6) &= 0 && \textit{se ha factorizado el miembro izquierdo} \\ y &= 0 && \textit{se ha igualado a 0 el cada factor} \\ 5y - 6 &= 0 && \\ y &= \tfrac{6}{5} && \end{aligned}$$

En consecuencia las dos raíces son $y = 0$ y $y = \frac{6}{5}$.

NOTA: Se desea destacar nuevamente la condición de que este método se aplica *sólo cuando el miembro de la derecha es cero,* Si uno de los factores del miembro de la izquierda es cero, su producto es cero; no importa cuál sea el valor del otro factor. Sin embargo, si el miembro de la derecha no es cero, como en $(x - 1)\ (x - 2) = 6$, no se puede arbitrariamente fijar el valor de uno de los factores, ya que con ello se fija automáticamente el valor del otro. Por ejemplo, si en la ecuación anterior se hace $x - 1 = 2$, se implica que $x - 2 = 3$, puesto que el producto de ambos es 6. Evidentemente, las dos condiciones propuestas no se pueden satisfacer para un mismo valor de x.

EJERCICIO 32: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Resuélvanse las ecuaciones simples de segundo grado de los problemas 1—20.

1: $4x^2 - 49 = 0$	2: $9x^2 - 25 = 0$
3: $16x^2 - 81 = 0$	4: $64x^2 - 1 = 0$
5: $5x^2 - 45 = 0$	6: $6x^2 - 24 = 0$
7: $3x^2 - 48 = 0$	8: $2x^2 - 8 = 0$

9: $3x^2 - 25 = 0$	10: $5x^2 - 4 = 0$
11: $4x^2 - 8 = 0$	12: $6x^2 - 27 = 0$
13: $x^2 + 9 = 0$	14: $3x^2 + 12 = 0$
15: $2x^2 + 8 = 0$	16: $5x^2 + 20 = 0$
17: $9x^2 + 16 = 0$	18: $6x^2 + 32 = 0$
19: $x^2 + 3 = 0$	20: $5x^2 + 15 = 0$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones por el método de factorización.

21: $x^2 - 2x - 3 = 0$	22: $x^2 + x - 6 = 0$
23: $x^2 + 4x = 5$	24: $x^2 - 2x = 8$
25: $x^2 + 3x - 10 = 0$	26: $x^2 + 6 = 5x$
27: $x^2 + 4x = 0$	28: $x^2 + 8x + 15 = 0$
29: $2x^2 + 3x = 9$	30: $3x^2 - 2 = 5x$
31: $2x^2 + 3x = 0$	32: $4x^2 - 9x + 2 = 0$
33: $3x^2 + 10x - 8 = 0$	34: $4x^2 + 3x = 0$
35: $4x^2 - 9 = 9x$	36: $5x^2 + 16x - 16 = 0$
37: $6x^2 = 12 + x$	38: $6x^2 + 4x = 0$
39: $4x^2 + 4x - 15 = 0$	40: $8x^2 - 15 = 2x$
41: $12x^2 + 12 = 25x$	42: $10x^2 + 21x + 9 = 0$
43: $12x^2 + 6 = 17x$	44: $12x^2 - 6x = 0$
45: $15x^2 = 8 + 2x$	46: $14x^2 + 9x = 18$
47: $10x^2 - 2x = 0$	48: $12x^2 = 15 + 11x$
49: $30x^2 - x - 20 = 0$	50: $24x^2 - 2x = 15$
51: $25x^2 - 30x = 0$	52: $35x^2 + 2x = 24$
53: $48x^2 + 58x + 15 = 0$	54: $36x^2 + 35 = 72x$
55: $32x^2 + 18x = 0$	56: $60x^2 + x = 10$
57: $94x - 48 = 45x^2$	58: $35 = 54x + 72x^2$
59: $35 - 69x = 54x^2$	60: $56x^2 - 63 = 62x$
61: $x^2 - cx - 6c^2 = 0$	62: $6x^2 + 5bx = 6b^2$
63: $2p^2x^2 + pqx - 15q^2 = 0$	64: $4a^2x + abx - 3b^2 = 0$
65: $2x^2 + mx - 2nx - mn = 0$	66: $fgx^2 - g^2x + f^2x - fg = 0$
67: $2c^2x^2 + x - 2c^2d^2x - d^2 = 0$	68: $2jx^2 - 2kx + jkx - k^2 = 0$

8.3 SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETANDO UN CUADRADO PERFECTO.

En el Pr. 2.1 se encontró que el cuadrado del binomio $x + y$ *es* $x^2 + 2xy + y^2$. Si y se reemplaza por la constante a, se obtiene $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, la cual es una forma importante del trinomio cuadrático general. En el trinomio mencionado observamos que el primer término es x, que el segundo término contiene la primera potencia de x y que el último término es positivo e igual al cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Dado un trinomio como éste, puede factorizársele fácilmente. Por ejemplo, el trinomio $x^2 - 6x + 9$ es un cuadrado perfecto, ya que el primer término es x^2, el segundo término contiene sólo la primera potencia de x y el tercer término, 9, es igual al cuadrado de la mitad del coeficiente de x, o sea $\frac{6}{2} = 3$. Además, resulta que la raíz cuadrada de este trinomio es $x - 3$. Otro ejemplo lo constituye el trinomio $x^2 + 5x + \frac{25}{4}$, pues el último término es igual a $(\frac{1}{2}$ de $5)^2$, siendo, por tanto, $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = (x + \frac{5}{2})^2$.

bases de la resolución completando un cuadrado

Con esto se ha establecido la base para manipular trinomios cuadráticos que son cuadrados perfectos. Es posible extender la utilidad de este tipo de expresiones aprendiendo a formar ecuaciones de segundo grado cuyos miembros sean cuadrados perfectos. Para lograr esto, usaremos el principio básico que dice que las raíces de una ecuación no se alteran si se añade el mismo número a cada uno de sus miembros. Esto permite resolver una ecuación de segundo grado completando el cuadrado, que es un método que puede aplicarse para la resolución de cualquier ecuación de segundo grado. Si no se tiene éxito en la aplicación del método de factorización en los primeros dos o tres intentos, entonces es aconsejable utilizar el método de completar el cuadrado. A continuación se ilustra el desarrollo del método con tres ejemplos.

EJEMPLO 1 Resolver: $x + 3 = 2x^2$

Solución

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2x^2 && \textit{la ecuación dada} && (1) \\ -2x^2 + x + 3 &= 0 && \textit{trasponiendo} && (2) \\ 2x^2 - x - 3 &= 0 && \textit{multiplicando por } -1 && (3) \\ (x+1)(2x-3) &= 0 && \textit{factorizando} && \\ x &= -1, \tfrac{3}{2} && \textit{igualando } (x+1) \text{ y } (2x-3) \textit{ separadamente a cero.} && \end{aligned}$$

Supongamos ahora que el miembro izquierdo de (2) no sea fácilmente factorizable, tratemos de resolver el problema en forma que el miembro a la izquierda sea cuadrado de un binomio. En lugar de (2) tendremos:

$$x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} = 0 \quad \textit{dividiendo ambos miembros por el coeficiente de } x \qquad (4)$$

Se suma a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, esto es y se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 - \tfrac{1}{2}x &= \tfrac{3}{2} && \textit{transponiendo el término constante} && (5) \\ x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16} &= \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{16} && \textit{sumando a ambos términos la constante necesaria} && (6) \end{aligned}$$

Se escribe ahora el miembro de la izquierda de (6) como el cuadrado del binomio $x - \frac{1}{4}$ y se simplifica el miembro de la derecha. Se tiene así

$$(x - \tfrac{1}{4})^2 = \frac{24 + 1}{16} = \frac{25}{16} \qquad (7)$$

Luego, puesto que las raíces cuadradas de números iguales son iguales y siendo $\frac{5}{4}$ y $-\frac{5}{4}$ las raíces de $\frac{25}{16}$, se tiene

$$x - \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4} \qquad (8)$$

$$x - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{5}{4} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4} \qquad \textit{de ec. (8)} \\ &= \tfrac{6}{4} \\ &= \tfrac{3}{2} \\ x &= \tfrac{1}{4} - \tfrac{5}{4} \qquad \textit{y de ec. (9)} \\ &= -\tfrac{4}{4} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones de (1) son $x = \frac{3}{2}$, $x = -1$.

NOTA 1. Generalmente las ecuaciones (8) y (9) se combinan en la forma

$$x - \tfrac{1}{4} = \pm\tfrac{5}{4} \tag{10}$$

y la solución establecida así es

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{5}{4} \\ &= \tfrac{6}{4} \quad \text{y} \quad -\tfrac{4}{4} \\ &= \tfrac{3}{2} \quad \text{y} \quad -1 \end{aligned}$$

NOTA 2. Es frecuente que se haga la pregunta de por qué no se usa tambien el signo $\pm$ en el miembro de la izquierda. La respuesta es que con ello no se obtiene otra solución. Si se emplea el doble signo en el miembro de la izquierda de (10) se tiene

$$\pm(x - \tfrac{1}{4}) = \pm\tfrac{5}{4}$$

Cuando se usa el signo más en el miembro de la izquierda se llega a raíces anteriormente obtenidas, y cuando se usa el signo menos, se obtiene

$$-(x - \tfrac{1}{4}) = \pm\tfrac{5}{4}$$

Luego, si se divide entre -1, se tiene

$$x - \tfrac{1}{4} = \mp\tfrac{5}{4}$$

que conduce a las mismas raíces cuando se resuelve.

El proceso de resolver una ecuación de segundo grado completando un cuadrado consiste de cinco pasos que se enlistan a continuación.

pasos de la resolución completando un cuadrado

1. Se trasladan y se ordenan los términos de la ecuación, de tal modo que en el miembro de la izquierda queden los que contienen x^2 y x como primero y segundo, respectivamente, y en el miembro de la derecha el término constante.
2. Se dividen los dos miembros entre el coeficiente de x^2.
3. Se suma a los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.
4. Se igualan las raíces cuadradas de los dos miembros de la ecuación obtenida en el paso 3, anteponiendo el signo $\pm$ a la raíz cuadrada del término constante. Este paso produce dos ecuaciones de primer grado.
5. Se resuelven para x las dos ecuaciones de primer grado obtenidas en el paso anterior.

EJEMPLO 2 Resolver, completando el cuadrado, la ecuación $4x^2 = 4x + 11$.

Solución: Los números a la izquierda en las siguientes expresiones, indican los pasos que se van efectuando.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x &= 11 && \textit{se ha transpuesto } 4x \\ x^2 - x &= \tfrac{11}{4} && \textit{se han dividido ambos miembros entre } 4 \\ x^2 - x + (-\tfrac{1}{2})^2 &= \tfrac{11}{4} + (-\tfrac{1}{2})^2 && \textit{se ha sumado } (\tfrac{1}{2} \textit{de } -1)^2 \textit{ en ambos miembros} \\ &= \tfrac{11}{4} + \tfrac{1}{4} \\ &= \tfrac{12}{4} \end{aligned}$$

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 = 3$$

$$x - \tfrac{1}{2} = \pm\sqrt{3}$$ *extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros*

$$x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{3}$$ *se ha resuelto para x*

Puesto que $\sqrt{3}$ es un número irracional, la solución no tiene mayor simplificación.

Comprobación. Se puede comprobar la solución si se sustituye x por $\frac{1}{2}$ $\sqrt{3}$ en cada miembro de la ecuación propuesta. Se obtiene así

$$4(\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{3})^2 = 4[\tfrac{1}{4} \pm 2(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2] = 4(\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{3} + 3)$$
$$= 13 \pm 4\sqrt{3}$$

para el miembro de la izquierda y

$$4(\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{3}) + 11 = 2 \pm 4\sqrt{3} + 11 = 13 \pm 4\sqrt{3}$$

para el miembro de la derecha. Puesto que los dos valores son iguales, la solución está correcta.

Si se desea un valor numérico aproximado de x, se obtiene $\sqrt{3}$ con tantas cifras decimales como se desee. Con tres cifras decimales $\sqrt{3} = 1.732$. Entonces $x = \frac{1}{2} \pm 1.732 = 0.5 \pm 1.732$, que conduce a 2.232 y $-$ 1.232.

EJEMPLO 3 Resolver, completando el cuadrado, la ecuación $x^2 + 8 = 4x$.

Solución

$$x^2 + 8 = 4x$$ *ecuación propuesta*

$$x^2 - 4x = -8$$ *se han transpuesto y ordenado los términos nótese que el paso 2 es innecesario*

$$x^2 - 4x + (-2)^2 = -8 + (-2)^2$$ *se ha sumado $(\frac{1}{2}de - 4)^2$ a ambos miembros simplificando*

$$(x - 2)^2 = -4$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{-4}$$ *se ha extraído la raíz cuadrada*

$$= \pm\sqrt{4(-1)}$$
$$= \pm 2\sqrt{-1}$$
$$x = 2 \pm 2\sqrt{-1}$$

Comprobación. Para comprobación se sustituye $2 \pm 2\sqrt{-1}$ en cada miembro de la ecuación dada. Para el miembro de la izquierda se obtiene

$$(2 \pm 2\sqrt{-1})^2 + 8 = 4 \pm 8\sqrt{-1} + (2\sqrt{-1})^2 + 8$$
$$= 4 \pm 8\sqrt{-1} + (-4) + 8$$
$$= 4 \pm 8\sqrt{-1} - 4 + 8$$
$$= 8 \pm 8\sqrt{-1}$$

y para el miembro de la derecha, se tiene

$$4(2 \pm 2\sqrt{-1}) = 8 \pm 8\sqrt{-1}$$

Por tanto, la solución concuerda.

8.4 NUMEROS COMPLEJOS

En la solución del ejemplo del Pr. 8.1 aparece el término $\pm 2\sqrt{-1}$ y en la solución del ejemplo 3 del Pr. 8.3 se encontró la expresión

$2 \pm 2\sqrt{-1}$. En el presente parágrafo se discutirá la forma de manejar tales soluciones.

Por definición, (Pr. 7.4) el término $2\sqrt{-1}$ es un número imaginario. Tal como se mencionó en el Pr. 7.4 fue necesaria una extensión del sistema numérico para incluir tales números. Existe la costumbre general de representar el símbolo $\sqrt{-1}$ con la letra i o, en particular en electricidad y electrónica, con la letra j.* Por definición, se tiene $i = \sqrt{-1}$.

potencias de i

Por tanto, $i^2 = -1$.

Y además, $i^3 = i^2\, i = -1\, i = -i$, $i^4 = i^2\, i^2 = (-1)\,(-1) = 1$, $i^5 = i^4\, i = i$, $i^6 = i^4\, i^2 = -1$, $i^7 = i^6\, i = -i$, e $i^8 = i^4\, i^4 = 1$.

En consecuencia, las potencias sucesivas de i, son los valores i, -1, $-i$, y $+1$, los cuales se repiten precisamente en este orden. Puede hacerse uso de i para escribir $2\sqrt{-1}$ resultando $2i$. De hecho, si N es cualquier número positivo entonces $\sqrt[n]{-N} = \sqrt[n]{-1}\,\sqrt[n]{N}$. Esto permite encontrar raíces de cualquier orden de un número negativo. Por ejemplo, $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\,\sqrt{-1} = \pm 4i$

número complejo

Con respecto a la solución del ejemplo 3 del Pr 8.3, en donde se encontró $x = 2 \pm 2i$, se establece ahora la siguiente definición: Un número del tipo $a + bi$, en donde a y b son reales e $i = \sqrt{-1}$, se llama *número complejo*. Si a y b son ambos diferentes de 0, entonces $a + bi$ se llama *número imaginario*. Si a es igual a 0 y b es diferente de 0, entonces $a + bi$ se llama *número imaginario puro*.

Si a es diferente de 0 y b es igual a 0, entonces $a + bi$ corresponde a un *número real* (Pr. 1.1). Por tanto, el campo de los números complejos contienen al conjunto de todos los números reales.

Son ejemplos de números complejos los números imaginarios $2 + 3i$, $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$, el número imaginario puro $2i$ y el número real 3.

EJERCICIO 33: SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETANDO EL CUADRADO

Resuélvanse, completando el cuadrado, las ecuaciones de los problemas 1-60.

1: $x^2 - 2x - 15 = 0$	**2:** $x^2 - 5x - 24 = 0$
3: $x^2 + 7x = 18$	**4:** $x^2 - 36 = 9x$
5: $2x^2 - x - 3 = 0$	**6:** $3x^2 + x - 4 = 0$
7: $2x^2 - 3x - 14 = 0$	**8:** $3x^2 - 15 = 4x$
9: $6x^2 - x = 15$	**10:** $16x^2 + 10x - 9 = 0$
11: $7x + 12 = 10x^2$	**12:** $8x^2 + 2x - 15 = 0$
13: $x^2 - 6x = 18$	**14:** $x^2 - 4x = 3$
15: $x^2 - 8x = 8$	**16:** $x^2 - 10x + 5 = 0$
17: $x^2 + 5 = 5x$	**18:** $x^2 - 3x + 1 = 0$
19: $x^2 + 7x + 9 = 0$	**20:** $x^2 - 3 = -x$
21: $4x^2 + 8x = 1$	**22:** $9x^2 - 2 = 18x$
23: $4x^2 + 4x = 5$	**24:** $9x^2 + 9x = 1$
25: $3x^2 - 2 = 2x$	**26:** $6x + 3 = 2x^2$

* Esto se debe a que i se usa frecuentemente en estos temas para la representación de corrientes.

27: $3x^2 = 8x - 2$

28: $1 + 12x - 4x^2 = 0$

29: $5x^2 + 9x + 3 = 0$

30: $3x^2 + 1 = 5x$

31: $4x^2 + 7x + 2 = 0$

32: $5x^2 = 11x - 5$

33: $x^2 - 4x + 5 = 0$

34: $x^2 + 10 = 6x$

35: $x^2 = 2x - 5$

36: $10x - 29 = x^2$

37: $2x^2 + 10x + 13 = 0$

38: $9x^2 + 12x = -5$

39: $9x^2 + 5 = -6x$

40: $2x^2 + 6x + 5 = 0$

41: $2x^2 + 6x = -7$

42: $3x^2 = 9x - 7$

43: $2x^2 + 15 = 10x$

44: $3x^2 = 6x - 5$

45: $3x^2 + 3 = 5x$

46: $x - 1 = 5x^2$

47: $4x^2 + 1 = 3x$

48: $3 + 6x^2 - 7x = 0$

49: $x^2 - ab - a^2 = bx$

50: $x^2 + ab - 2b^2 = (a - b)x$

51: $x^2 = 2a^2b^2 + abx$

52: $x^2 + 2a^2 = (2b + 3a)x - 2ab$

53: $ax^2 = a + b - bx$

54: $ab^2x^2 - b - a = b^2x$

55: $a^2x^2 + (ab - a)x = 2 + 2b$

56: $ax^2 + b^2 - 2ab^2 = (b - ab)x$

57: $(a - b)x^2 = 2bx + 4a$

58: $6x^2 + (b - 2a)x = b^2 + ab$

59: $a^2x^2 - b^2 = 2ab + 2a^2x$

60: $(a^2 - b^2)x^2 - 4abx + b^2 = a^2$

Mediante el uso de la Tabla III (Apéndice) calcúlense en fracciones con tres decimales las raíces de las siguientes ecuaciones.

61: $x^2 = 8 + 4x$

62: $x^2 - 7 = 2x$

63: $x^2 - 8x - 16 = 0$

64: $10x - 1 = x^2$

65: $2x^2 - 6x - 1 = 0$

66: $3x^2 - 6x = 1$

67: $3x^2 + 5 = 9x$

68: $1 + 3x = 2x^2$

69: $3x^2 + 4x - 2 = 0$

70: $2x^2 = - 7x - 4$

71: $5x^2 + 8x + 2 = 0$

72: $7x^2 + 8x - 1 = 0$

8.5 LA FORMULA DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

Trasladando y ordenado términos se puede escribir en la siguiente forma cualquier ecuación de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0 \tag{8.1}$$

Si se resuelve (8.1) completando un cuadrado, se obtiene una fórmula útil y eficaz para la resolución de cualquier ecuación de segundo grado. En seguida se deducirá la fórmula resolviendo (8.1) y después se explicará el uso de la misma.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textit{ecuación propuesta}$$

$$ax^2 + bx = -c \qquad \textit{se ha transpuesto } c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a} \qquad \textit{se han dividido los dos miembros entre } a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad \textit{se ha sumado } \left(\tfrac{1}{2} \text{ de } \frac{b}{a}\right)^2 \textit{ a cada miembro}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \textit{se ha simplificado}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textit{se han igualado las raíces cuadradas de los dos miembros}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textit{se ha resuelto para } x$$

Luego, puesto que las dos fracciones del miembro de la derecha de la última ecuación tienen igual denominador, se tiene

fórmula de la ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.2}$$

Las fórmulas (8.2) se conocen con el nombre de *fórmula de la ecuación de segundo grado* y su uso se muestra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $6x^2 = 12 + x$.

Solución: Para resolver la ecuación $6x^2 = 12 + x$ mediante el uso de (8.2), se trasladan los términos y se ordenan de tal modo que el primero sea el que contiene x^2, que el tercero sea el término constante y que el miembro de la derecha sea cero. De esa manera se tiene $6x^2 - x - 12 = 0$. Si se comparan ahora los coeficientes de esta ecuación con los de (8.1) se observa que $a = 6$, $b = -1$, y $c = -12$. Entonces, si estos valores se sustituyen en (8.2), se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-12)}}{2(6)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 288}}{12} \\ &= \frac{1 \pm 17}{12} \\ &= \tfrac{18}{12} \quad \text{y} \quad -\tfrac{16}{12} \\ &= \tfrac{3}{2} \quad \text{y} \quad -\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Resolver $8x - 13 = 4x^2$, mediante el uso de la fórmula de la ecuación de segundo grado.

Solución: Si se trasladan y ordenan terminos, se tiene $-4x^2 + 8x - 13 = 0$. Por tanto, comparando con (8.1) se tiene $a = -4$, $b = 8$ y $c = -13$. Sustituyendo en (8.2) estos valores

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-4)(-13)}}{2(-4)} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 208}}{-8} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{-144}}{-8} \\ &= \frac{-8 \pm 12\sqrt{-1}}{-8} \\ &= \frac{-8 \pm 12i}{-8} \\ &= \frac{2 - 3i}{2} \quad \text{y} \quad \frac{2 + 3i}{2} \end{aligned}$$

EJERCICIO 34: EMPLEO DE LA FORMULA DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

Resuélvanse las ecuaciones de los problemas 1-60 mediante el uso de la fórmula de la ecuación de segundo grado.

1: $x^2 + x = 12$ **2:** $x^2 + x - 42 = 0$
3: $x^2 = 2x + 35$ **4:** $x^2 + 3x - 54 = 0$

5: $2x^2 - 42 = 5x$

6: $3x^2 + 8x = 35$

7: $5x^2 = 18 + x$

8: $7x^2 + 4x - 20 = 0$

9: $42x^2 - x - 30 = 0$

10: $48x^2 + 32x = 35$

11: $36x^2 = 13x + 30$

12: $63 + 62x = 56x^2$

13: $x^2 - 10x + 5 = 0$

14: $x^2 - 2 = 8x$

15: $x^2 = 12x - 4$

16: $x^2 - 6x = 11$

17: $x^2 + 7x + 1 = 0$

18: $x^2 + 11x + 29 = 0$

19: $x^2 + 9 = 9x$

20: $x^2 = 15x - 45$

21: $4x^2 - 5x - 1 = 0$

22: $9x^2 = 17 - 6x$

23: $4x^2 + 12x = 9$

24: $9x^2 - 18x - 23 = 0$

25: $5x^2 = 11x - 5$

26: $7x^2 - 12x + 4 = 0$

27: $8x^2 - 9 = 12x$

28: $6x^2 - 12x + 5 = 0$

29: $11x^2 = 1 - 8x$

30: $12x + 4 = 15x^2$

31: $14x^2 - 16x = 7$

32: $13x^2 - 14x - 2 = 0$

33: $x^2 + 13 = 6x$

34: $x^2 - 12x + 45 = 0$

35: $x^2 = 8x - 20$

36: $x^2 - 14x + 50 = 0$

37: $2x^2 + 14x + 25 = 0$

38: $2x^2 = 2x - 1$

39: $9x^2 + 5 = 6x$

40: $2x^2 + 6x + 5 = 0$

41: $4x^2 = 6x - 3$

42: $5x^2 + 4x + 2 = 0$

43: $8x - 6 = 3x^2$

44: $3x^2 + 9 = 10x$

45: $7x^2 - 6x = -2$

46: $11x^2 + 8x + 2 = 0$

47: $12x^2 + 14x = -5$

48: $13x^2 = 12x - 3$

49: $x^2 + ab - a^2 = -bx$

50: $x^2 - (a - b)x = ab$

51: $x^2 + 2ax - 2ab = bx$

52: $x^2 + a^2 - b^2 = 2ax$

53: $mx^2 - nx = m + n$

54: $p^2x^2 - px = q^2 + q$

55: $cx^2 + dx = c + d$

56: $2fgx^2 - (4f^2 - g^2)x = 2fg$

57: $(u^2 - 1)x^2 + 2u^2x + 4 = 0$

58: $r^2x^2 - 2r^2x + r^2 = 9$

59: $w^2x^2 - 2wx + 4v = 4v^2$

60: $a^2bx^2 = 2ax + 4b + 4$

Usese la fórmula de la ecuación de segundo grado para efectuar las operaciones que se requieren en los problemas 61-68.

61: Resolver $y^2 - x^2 + 5x + y - 6 = 0$ para y en términos de x.

62: Resolver $y^2 + 2y - x^2 - 4x - 3 = 0$ para y en términos de x.

63: Resolver $x^2 - 7y - y^2 - 3x - 10 = 0$ para x en términos de y.

64: Resolver $x^2 - 4y^2 - 2x - 12y - 8 = 0$ para x en términos de y.

65: Resolver $2y^2 + 9x - y - 2x^2 - 10 = 0$ para y en términos de x.

66: Resolver $3x^2 - 2y + 10x + 8 - 3y^2 = 0$ para y en términos de x.

67: Resolver $5y^2 - 5x^2 + 8y - 2x + 3 = 0$ para x en términos de y.

68: Resolver $12y^2 + 16y - 3x^2 + 2x + 5 = 0$ para x en términos de y.

Resuélvanse las ecuaciones de los problemas 69 y 80 empleando la fórmula de la ecuación de segundo grado y encuéntrense las raíces con tres cifras decimales con ayuda de la tabla III del apéndice.

69: $2x^2 - 4x + 1 = 0$

70: $3x^2 - 4x = 1$

71: $3x^2 = 5 + 6x$

72: $3x^2 + 3 = 8x$

73: $5x^2 - 4x - 4 = 0$

74: $6x - 1 = 7x^2$

75: $7x^2 - 10x - 1 = 0$

76: $8x^2 - 6x = 3$

77: $13x^2 = 4x + 4$

78: $6x + 1 = 14x^2$

79: $8x = 15x^2 - 1$

80: $11x^2 + 2 = 10x$

8.6 ECUACIONES DE FORMA CUADRATICA

Una ecuación del tipo,

$$a[f(x)]^2 + b[f(x)] + c = 0 \tag{8.3}$$

se dice que es de forma cuadrática. El símbolo $f(x)$ denota una expresión en x y debe observarse que dicha expresión aparece en los dos corchetes. Por ejemplo, la ecuación

$$4(x^2 - x)^2 - 11\,(x^2 - x) + 6 = 0 \tag{8.4}$$

es de la forma cuadrática, puesto que $x^2 - x$ aparece en los dos paréntesis.

Cuando la expresión $f(x)$ en (8.4) es de grado uno o dos, se puede resolver por los métodos dados en este capítulo. El procedimiento se ilustrará mediante el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 1 Resolver para x la ecuación (8.4)

Solución: Para encontrar el valor de x en la ec. (8.4) se hace primero $z = x^2 - x$.* Entonces (8.4) se convierte en $4z^2 - 11z + 6 - 0$, la que es una ecuación de segundo grado en z y que se resuelve para z por el método de factorización.

$$\begin{aligned} (4z - 3)(z - 2) &= 0 & \\ z - 2 &= 0 & \\ z &= 2 & (1) \\ 4z - 3 &= 0 & \\ z &= \tfrac{3}{4} & (2) \end{aligned}$$

Después se remplaza $x^2 - x$ por z en cada una de las ecuaciones (1) y (2) y se resuelven para x así, se obtiene

$x^2 - x = 2$	*de ec. (1)*
$x^2 - x - 2 = 0$	*se ha transpuesto*
$(x - 2)(x + 1) = 0$	*se ha factorizado*
$x - 2 = 0$	*se ha igualado el primer factor a cero*
$x = 2$	*se ha resuelto para* x
$x + 1 = 0$	*haciendo el segundo factor cero*
$x = -1$	*resolviendo para* x

Análogamente, de (2) se tiene

$$x^2 - x = \tfrac{3}{4}$$

cuyas soluciones son $x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$. Por tanto, las soluciones de (8.4) son $x = 2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$, y -1.

EJEMPLO 2 Resolver $3x^4 = 2x^2 + 1$.

Solución: Para resolver $3x^4 = 2x^2 + 1$, se hace $z = x^2$ y se tiene

$$3z^2 = 2z + 1$$

Las soluciones de esta ecuación, obtenidas por cualquiera de los tres métodos dados, son $z = 1$ y $z = -\frac{1}{3}$. Luego, puesto que $z = -x^2$, se tiene

* La sustitución empleada es un ejemplo de un mecanismo algebraico muy usual, cuyo propósito es facilitar la solución del problema. Por tanto, el verdadero primer paso en tales problemas consiste en *percibir la utilidad de una determinada sustitución.*

$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$
$$x^2 = -\tfrac{1}{3}$$
$$x = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{3}}$$
$$= \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\, i$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación original son: $x = 1,\ -1,\ (1/\sqrt{3})i$ y $-(1\sqrt{3})i$.

EJERCICIO 35: REDUCCION DE ECUACIONES A LA FORMA CUADRATICA

Redúzcanse a la forma cuadrática las siguientes ecuaciones y resuélvanse para x.

1: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$
2: $x^4 + 144 = 40x^2$
3: $9x^4 = 37x^2 - 4$
4: $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$
5: $x^4 + 12 = 7x^2$
6: $12x^2 - 27 = x^4$
7: $10x^2 = x^4 + 24$
8: $4x^4 - 17x^2 = -18$
9: $x^4 = x^2 + 20$
10: $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$
11: $x^4 + 2x^2 = 8$
12: $x^4 = 2x^2 + 24$
13: $8x^4 + 14x^2 = 9$
14: $6x^4 = 12 - x^2$
15: $2x^4 = 30 - 4x^2$
16: $9x^2 + 10 = 9x^4$
17: $2x^{-2} = x^{-1} + 3$
18: $3x^{-2} = 4x^{-1} + 4$
19: $6x^{-2} = 6 - 5x^{-1}$
20: $15x^{-2} = 12 + 11x^{-1}$
21: $27x^6 + 8 = 35x^3$
22: $x^6 - 9x^3 = -8$
23: $8x^6 = 19x^3 + 27$
24: $x^6 + 216 = 35x^3$
25: $(x^2 + 6)^2 - 17(x^2 + 6) + 70 = 0$
26: $(2x^2 - 5)^2 = 39 + 10(2x^2 - 5)$
27: $(3x^2 - 8)^2 + 76 = 23(3x^2 - 8)$
28: $(4x^2 + 3)^2 = 11(4x^2 + 3) - 28$
29: $(x^2 + x)^2 + 72 = 18(x^2 + x)$
30: $(x^2 + 3x)^2 = 14(x^2 + 3x) - 40$
31: $(2x^2 + 3x)^2 - 9 = 8(2x^2 + 3x)$
32: $(3x^2 + 5x)^2 - 10(3x^2 + 5x) = 24$
33: $(x^2 + 3x)^2 - 3(x^2 + 3x) = 4$
34: $(x^2 - x)^2 = 3(x^2 - x) - 2$
35: $(2x^2 - 5x)^2 - 3 = 2(2x^2 - 5x)$
36: $(2x^2 - 3x)^2 = 3(2x^2 - 3x) - 2$
37: $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + 4 = 5\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$
38: $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 - 5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) + 6 = 0$
39: $\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right)^2 = 4\left(\dfrac{2x-1}{x+2}\right) - 3$
40: $\left(\dfrac{x+3}{1-2x}\right)^2 + \left(\dfrac{x+3}{1-2x}\right) = 2$
41: $\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right) + 2\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right) = 3$

SUGERENCIA: Sea $z = \dfrac{x+1}{2x-1}$, entonces $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

42: $2\left(\dfrac{x-2}{3-x}\right) + \left(\dfrac{3-x}{x-2}\right) - 3 = 0$
43: $3\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right) + 2\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right) = 5$

44: $2\left(\frac{x-1}{2x+3}\right) = 1 + 3\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$

45: $2x + 1 - 5\sqrt{2x+1} + 6 = 0$

46: $2x + 6 = 4\sqrt{2x+3}$

SUGERENCIA: (Problema 46). Añádase -3 a cada miembro de la ecuación y luego hágase $z = \sqrt{2x+3}$.

47: $6x - 1 = 5\sqrt{3x-2}$

48: $3\left(\frac{x-2}{1-x}\right) - 4\sqrt{\frac{x-2}{1-x}} + 1 = 0$

8.7 ECUACIONES QUE COMPRENDEN RADICALES DE SEGUNDO ORDEN.

Ya que los cuadrados de dos cantidades iguales son iguales entre sí se obtiene el principio siguiente: *Cualquier raíz de una ecuación dada puede ser también raíz de otra ecuación que se obtenga al igualar los cuadrados de los dos miembros de la ecuación propuesta.*

La proposición recíproca no es válida. Por ejemplo, si se igualan los cuadrados de los dos miembros de

$$\sqrt{2x^2 - 1} = x \tag{8.5}$$

se tiene

$$2x^2 - 1 = x^2 \tag{8.6}$$

Por tanto,

$$2x^2 - x^2 = 1 \qquad \textit{transponiendo}$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1 \tag{8.7}$$

El valor de $x = 1$, de (8.7) satisface la *ec.* (8.5). Sin embargo, cuando $x = -1$, el miembro de la izquierda de (8.5) es $\sqrt{2(-1)^2 - 1} = \sqrt{1} = 1$, mientras que el miembro de la derecha es -1. En consecuencia -1 es una raíz de (8.6), pero no de (8.5). El valor $x = -1$ se llama *raíz extraña.*

Para resolver una ecuación que comprende radicales de segundo orden, se efectúan los pasos siguientes:

pasos para la resolución de ecuaciones que implican radicales de segundo orden

1. Se deja en uno de los miembros un solo radical, trasladando al otro miembro los demás términos.

2. Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación obtenida y se igualan entre sí.

3. Si la ecuación que se obtenga no contiene radicales se resuelve para x. Si por el contrario contiene uno o más radicales se repiten los pasos 1 y 2 hasta obtener una ecuación sin radicales. Luego se resuelve esta última ecuación para x.

4. Se sustituyen en la ecuación original los valores obtenidos para x

en el paso anterior y se determinan los valores de x que son raíces y los que no lo son.

El proceso de aplicar los pasos 1 y 2, hasta liberar la ecuación de radicales se conoce con el nombre de *racionalización de la ecuación.*

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} - 2x + 3 = 0$.

Solución: Para resolver la ecuación

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 1} - 2x + 3 = 0$$

se deja el radical en un miembro trasladando $-2x + 3$, y se tiene

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = 2x - 3$$

ahora se igualan los cuadrados de los dos miembros

$$2x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 12x + 9$$

como esta ecuación no comprende radicales se resuelve para x.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 4x^2 - 2x + 12x + 1 - 9 &= 0 && \textit{transponiendo términos para aislar el radical}\\
-2x^2 + 10x - 8 &= 0 && \textit{sumando términos;}\\
x^2 - 5x + 4 &= 0 && \textit{dividiendo por 2}\\
(x - 4)(x - 1) &= 0 && \textit{igualando los cuadrados de los dos miembros}\\
x - 4 &= 0 && \textit{transponiendo y sumando}\\
& && \textit{resolviendo por la fórmula}\\
x &= 4 && \textit{de la ecuación de segundo grado}\\
x - 1 &= 0\\
x &= 1
\end{aligned}$$

Por tanto, las raíces de la ecuación racionalizada son: $x = 4$ y $x = 1$.
Se sustituye $x = 4$, en el miembro de la izquierda de (1), y se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{2(4)^2 - 2(4) + 1} - 2(4) + 3 &= \sqrt{32 - 8 + 1} - 8 + 3\\
&= \sqrt{25} - 8 + 3\\
&= 5 - 8 + 3\\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, $x = 4$ es solución de (1).

Sin embargo, cuando se sustituye $x = 1$ en el miembro de la izquierda de (1), se obtiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{2(1)^2 - 2(1) + 1} - 2(1) + 3 &= \sqrt{2 - 2 + 1} - 2 + 3\\
&= 1 - 2 + 3\\
&= 2
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $x = 1$ no es solución de (1), ya que el miembro de la derecha es cero. Por tanto, la única solución de (1), es $x = 4$.

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación

$$\sqrt{11x - 6} = \sqrt{4x + 5} - \sqrt{x - 1}$$

Solución: Puesto que se tiene un solo radical en el miembro de la izquierda, se comienza por el paso 2.

$$11x - 6 = 4x + 5 - 2\sqrt{(4x + 5)(x - 1)} + x - 1$$

igualar los cuadrados de los dos miembros de (1)

$$2\sqrt{(4x+5)(x-1)} = -11x + 4x + x + 6 + 5 - 1$$

se han transpuesto y ordenado términos

$$2\sqrt{4x^2 + x - 5} = -6x + 10$$ *se han sumado los términos*

$$\sqrt{4x^2 + x - 5} = -3x + 5$$ *se ha dividido entre -2*

$$4x^2 + x - 5 = 9x^2 - 30x + 25$$ *se ha factorizado el miembro de la izquierda*

$$-5x^2 + 31x - 30 = 0$$ *se ha igualado cada factor con cero*

$$x = \frac{-31 \pm \sqrt{(31)^2 - 4(-5)(-30)}}{2(-5)}$$

$$= \frac{-31 \pm \sqrt{961 - 600}}{-10}$$

$$= \frac{-31 \pm \sqrt{361}}{-10}$$

$$= \frac{-31 \pm 19}{-10}$$

$$= \tfrac{6}{5} \text{ y } 5$$

Se sustituye $x = \frac{5}{6}$ en los dos miembros de (1). Para el miembro de la izquierda, se tiene

$$\sqrt{11(\tfrac{6}{5}) - 6} = \sqrt{\frac{66}{5} - 6} = \sqrt{\frac{66-30}{5}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

y para el miembro de la derecha

$$\sqrt{4(\tfrac{6}{5}) + 5} - \sqrt{\frac{6}{5} - 1} = \sqrt{\frac{49}{5}} - \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Por tanto, $x = \frac{6}{5}$ es solución de (4). Si se sustituye $x = 5$, en (4), se obtiene

$$\sqrt{11(5) - 6} = \sqrt{55 - 6} = \sqrt{49} = 7$$

para el miembro de la izquierda, y

$$\sqrt{4(5) + 5} - \sqrt{5 - 1} = \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3$$

para el miembro de la derecha. Por tanto, $x = 5$ no es solución.

EJERCICIO 36: SOLUCION DE ECUACIONES QUE COMPRENDEN RADICALES

Resuélvanse las ecuaciones siguientes:

1: $\sqrt{x+6} = \sqrt{4x-3}$
2: $\sqrt{4x+1} = \sqrt{6x-3}$
3: $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x-6}$
4: $\sqrt{x+3} = \sqrt{3x-2}$
5: $\sqrt{x+11} - \sqrt{2x-3} = 0$
6: $\sqrt{3x+6} = \sqrt{4x-4}$
7: $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+2} = 0$
8: $\sqrt{2x+7} = \sqrt{3x-2}$
9: $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = \sqrt{2x-1}$
10: $\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x+4} = 0$
11: $\sqrt{x^2 + 4x - 8} = \sqrt{3x+12}$
12: $\sqrt{x^2 + 3x - 3} - \sqrt{6x+7} = 0$
13: $2x = \sqrt{2x+5} + 1$
14: $3x = \sqrt{10-2x} + 7$
15: $2x - \sqrt{7x+1} = 4$
16: $\sqrt{9x+1} - x = 1$
17: $\sqrt{4x^2 + 2x + 7} + 4x = 5$
18: $\sqrt{2x^2 + 5x + 4} - 1 = 2x$
19: $4 - 3x = \sqrt{6x^2 + 5x - 2}$
20: $\sqrt{3x^2 + 8x + 1} - 3x = 1$

21: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$ 22: $\sqrt{3x+1} = 2 + \sqrt{x-1}$

23: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+6} = 3$ 24: $\sqrt{3x+1} - 2 = \sqrt{2x-7}$

25: $\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x-5} = \sqrt{x+1}$

26: $\sqrt{3x+4} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{x+10}$

27: $\sqrt{6x-5} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{2x-6}$

28: $\sqrt{x-6} + \sqrt{2x+2} = \sqrt{3x+4}$

29: $\sqrt{7x+8} = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1}$

30: $\sqrt{10x-4} - \sqrt{3x-3} = \sqrt{2x+1}$

31: $\sqrt{9x+7} - \sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2}$

32: $\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{3x-2}$

33: $\sqrt{x^2-x+3} - \sqrt{x^2-3x+4} = 1$

34: $\sqrt{x^2+x-5} - \sqrt{x^2-3x-1} = 2$

35: $\sqrt{x^2-5x+2} - \sqrt{x^2-6x+2} = 1$

36: $\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2-4x-9} = 2$

37: $\dfrac{\sqrt{2x-3}-2}{\sqrt{3x-2}-3} = 1$ 38: $\dfrac{\sqrt{3x+1}+3}{\sqrt{x+1}+1} = 2$

39: $\dfrac{\sqrt{4x+5}+4}{\sqrt{3x+1}-1} = 3$ 40: $\dfrac{\sqrt{3x+3}+2}{\sqrt{2x+3}-1} = 2$

41: $\sqrt{ax+2a^2} = \sqrt{3ax+3a^2} - a$ 42: $\sqrt{2bx+3b^2} = \sqrt{bx+b^2} + b$

43: $\sqrt{4c^2-5cx} = 2c + \sqrt{2c^2+cx}$ 44: $\sqrt{3px+p^2} - \sqrt{px-p^2} = 2p$

8.8 PROBLEMAS QUE IMPLICAN ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

El planteo de muchos problemas, especialmente de aquellos que tratan acerca del producto o el cociente de la incógnita, implican el uso de ecuaciones de segundo grado. El método para obtener la ecuación necesaria para resolver esos problemas es el mismo que el expuesto en el Pr. 4.5 y el lector debe revisar el párrafo al llegar a este punto. Es conveniente hacer notar que frecuentemente, al resolver un problema mediante el uso de una ecuación de segundo grado, el problema tiene sólo una solución en tanto que la ecuación tiene dos soluciones. En tales casos se descarta la raíz que no satisface las condiciones del problema.

EJEMPLO 1 Un edificio rectangular cuyo fondo es doble de su frente, se divide en dos partes mediante una pared situada a 30 metros del frente y paralela a éste. Si la parte trasera del edificio comprende 3 500 metros cuadrados, encontrar las dimensiones del edificio.

Solución: En problemas de este tipo es aconsejable trazar un diagrama como el en la figura 8.1.

$$x = \text{longitud del frente en metros}$$

Entonces

$$2x = \text{longitud del fondo}$$

también

$$2x - 30 = \text{largo de la parte trasera}$$

y

$$x = \text{ancho de la parte trasera}$$

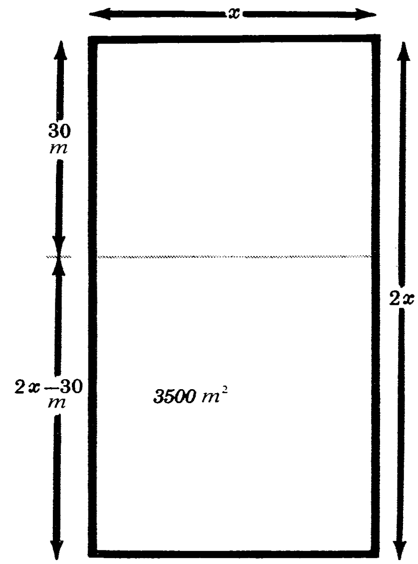


Figura 8.1

Por tanto,

$$x(2x - 30) = \text{area de la parte trasera}$$

En consecuencia,

$$x(2x - 30) = 3500$$

Efectuando la multiplicación indicada y trasladando 3500, $2x^2 - 30x - 3500 = 0$

$(x - 50)(2x + 70) = 0$ *factorizando*

Por tanto, $x = 50$ y $x = -35$. Sin embargo, puesto que las dimensiones no pueden ser negativas, se tiene

$x = 50$ metros *frente*

$2x = 100$ metros *fondo*

EJEMPLO 2 Los tiempos empleados por dos pintores para pintar cada uno un metro cuadrado difieren entre sí en un minuto. Trabajando conjuntamente emplean 1 hora en pintar 27 metros cuadrados. ¿En cuánto tiempo pinta cada uno un metro cuadrado?

Solución: Sea.

x = número de minutos que necesita el pintor más rápido para pintar un metro cuadrado.

Entonces

$$x + 1 = \text{número de minutos empleados por el otro.}$$

De donde

$$\frac{1}{x} = \text{fracción de metro cuadrado que pinta el primero en un minuto}$$

y

$$\frac{1}{x+1} = \text{fracción de metro cuadrado que pinta el otro en un minuto.}$$

Por tanto

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \text{fracción de metro cuadrado que pintan entre los dos en un minuto.}$$

Sin embargo, puesto que trabajando juntos pintan 27 metros cuadrados en 60 minutos, en un minuto hacen $\frac{27}{60} = \frac{9}{20}$ metros cuadrados

Por tanto

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{9}{20} \text{ metros cuadrados}$$

Simplificando y transponiendo términos, obtenemos la ecuación de 2° grado.

$$9x^2 - 31x - 20 = 0$$

cuyas raíces son:

$$x = -\frac{5}{9} \text{ y } 4$$

El valor $-\frac{5}{9}$ se descarta en virtud de que un tiempo negativo no tiene significado en este problema. Por tanto

$$x = 4$$

y

$$x + 1 = 5$$

De este modo, los pintores emplean 4 y 5 minutos, respectivamente para pintar un metro cuadrado.

EJERCICIO 37: PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1: Encuéntrense dos enteros consecutivos cuyo producto exceda a su suma en 41 unidades.
2: La diferencia entre el cuadrado de un número positivo y el séxtuplo de dicho número es 16 unidades. Encuéntrese el número.
3: El dígito de las decenas de cierto número es dos unidades mayor que el dígito de las unidades y además la suma de cuadrados de ambos dígitos es 52. Encuéntrese el número.
4: Encuéntrese un número negativo tal que la suma de su cuadrado con el quíntuplo del mismo número sea igual a 6.
5: Encuéntrense dos números cuya diferencia sea 9 y cuyo producto sea 190.
6: Encuéntrense dos números cuya diferencia sea 4 y cuyo producto sea 480.
7: Sepárese el número 27 en dos partes cuyo producto sea 162.
8: Sepárese el número 42 en dos partes cuyo producto sea 341.
9: Si el radio de un círculo se incrementa en 4 unidades, entonces el área resulta multiplicada por 9. Encuéntrese el radio original.
10: El producto de un entero positivo par con el recíproco del siguiente entero positivo par es igual al recíproco del primer entero mencionado. Encuéntrese dicho entero.
11: La suma de un número con su recíproco es $\frac{25}{12}$. Encuéntrese el número.
12: La diferencia de dos números es 6, y la suma de sus recíprocos es $\frac{5}{8}$. Encuéntrense los números.
13: El área de un triángulo es 42 metros cuadrados. Encuéntrense la base y la altura si la última excede a la primera en 5 metros.
14: Encuéntrense las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 64 metros y cuya área es 252 metros cuadrados.
15: Una persona construye una banqueta recta de concreto con un perímetro de 15 metros de longitud y con un volumen total de un metro cúbico, formando una losa de 10 centímetros de espesor. ¿Cuáles son las dimensiones de la banqueta?
16: Una sala rectangular cuya longitud excede a su ancho en 3 metros requiere

42 metros cuadrados de alfombrado de pared a pared. ¿Cuáles son las dimensiones del cuarto?

17: Un granjero inspecciona la cerca de su granja rectangular dando una vuelta alrededor de ella en su jeep, calculando, por medio del velocímetro, qué el perímetro es de 3.5 millas. Si el área de la granja es de 480 acres, calcúlense las dimensiones del rectángulo. Nota. 1 milla cuadrada es igual a 640 acres.

18: Una oficina cuadrada contiene 25 escritorios y además un pasillo, de 3 metros de ancho, a lo largo de uno de sus lados. Si el espacio destinado a cada ocupante es de 5.2 metros cuadrados, calcúlese el tamaño de la oficina.

19: Un cuadrado de linóleo requiere 5 metros más de longitud para cubrir un piso rectangular cuya área es de 84 metros cuadrados. Calcúlense las dimensiones de la pieza adicional del linóleo que debe comprarse.

20: Se instala un tendedero de 2.5 metros de longitud a lo largo de la diagonal de un patio de servicio rectangular. Sabiendo que se requieren 3.5 metros de barda para cubrir dos de los lados adyacentes del patio calcúlense las dimensiones del patio.

21: Un hacendado recorre 100 millas en automóvil hasta una ciudad para recoger un automóvil nuevo y luego regresa en él a su casa. Si la velocidad en el primer automóvil fue 10 millas/hr. mayor que en el segundo, y si el recorrido a la ciudad le tomó veinte minutos menos que el regreso a su casa, ¿cuál fue la velocidad media de cada automóvil?

22: Un ex alumno recorre 420 millas en su automóvil para asistir a una reunión en su universidad y luego regresa a su casa la noche de la clausura. El tiempo total empleado en el recorrido fue de dieciséis horas veinte minutos y su velocidad durante el recorrido nocturno fue 15 millas/hr. menor que la velocidad del recorrido diurno. Calcúlense las velocidades empleadas en ambas direcciones.

23: Un aeroplano vuela 1,260 millas contra el viento y luego regresa en un total de dieciséis horas. Encuéntrese la velocidad del aeroplano en aire tranquilo si la velocidad del viento es de 20 millas/hr.

24: Un estudiante universitario se encontraba a 11 millas del edificio donde le correspondía su siguiente clase una hora más tarde. Primeramente caminó una milla y luego tomó un autobús cuya velocidad media fue 12 millas/hr. mayor que su velocidad a pie. Encuéntrense la velocidad con que caminó y la velocidad del autobús sabiendo que llegó a su clase a tiempo.

25: Dos hermanos lavaron las paredes de su cuarto en tres horas. Calcúlese el tiempo que requeriría cada uno de ellos para lavar solo las paredes de un cuarto similar si el más joven necesita dos horas y media más que su hermano para hacer el trabajo.

26: María puede hacer las cortinas para su cuarto del dormitorio en $4\frac{2}{3}$ horas menos que Elena, mientras que trabajando las dos juntas pueden hacerlas en ocho horas. ¿Cuánto tiempo requeriría cada joven para hacer las cortinas sola?

27: Una persona compró dos edificios de apartamientos en $480 000 cada uno. Los edificios comprenden en total 14 apartamientos y en uno de ellos cada apartamiento costó $20 000 más que en el otro. Calcúlese el valor por apartamiento para cada edificio.

28: Una persona calcula que el costo diario del transporte en su automóvil para ir al trabajo es de $12.00, el cual ha dividido en partes iguales entre sus pasajeros y él mismo. Algún tiempo después se unen al grupo dos pasajeros más, lo cual permite reducir $1.00 el costo del transporte por persona. Calcúlese el número de personas que forman el nuevo grupo.

29: El costo de la fiesta anual de un club se divide entre los miembros que asisten. En dos años consecutivos el costo total fue de $500.00 y $570.00, respectivamente, pero el costo por miembro fue $0.50 menor el segundo año. Calcúlese el número

de miembros que asistieron a cada fiesta si la asistencia en el segundo año fue de 10 miembros más que en el primero.

30: Un grupo de empleadas que comparte una casa compró un refrigerador en \$2 500.00, dividiéndose el costo en partes iguales. Algunos meses más tarde una de ellas contrajo matrimonio y vendió a las otras su participación por un total de \$400.00. Cuando este costo adicional fue repartido entre las empleadas restantes resultó que la contribución extra de cada una fue \$400.00 menor que la aportada originalmente. Calcúlese el número original de empleadas en el grupo.

31: La capacidad de una alberca es de 300 metros cúbicos y puede drenarse con una rapidez de 1/2 metro cúbico por minuto mayor que la rapidez con que puede llenarse. Calcúlese la rapidez de drenado si se necesitan veinte minutos más para llenarla que para drenarla.

32: Varios muchachos planearon un viaje corto de vacaciones, contribuyendo con \$600.00 cada uno, pero luego calcularon que con un grupo un poco más grande podrían reducir sus gastos en \$30.00 diarios por persona y alargar el viaje en un día más con la misma contribución de \$600.00. Calcúlese el costo diario por persona que habían planeado para el grupo original.

8.9 NATURALEZA DE LAS RAICES DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO.

La fórmula (8.2), permite obtener cierta información importante acerca de las raíces de una ecuación de segundo grado sin resolver la ecuación. Si r representa el miembro de la derecha de (8.2), cuando se usa el signo más antepuesto al radical, y s representa ese mismo valor cuando se antepone el signo menos, entonces las dos soluciones de

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.8}$$

son

$$r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.9}$$

y

$$s = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{8.10}$$

La expresión colocada debajo del signo radical en (8.9) y en (8.10) se llama *discriminante* y generalmente se representa por la letra D.

discriminante

Se considerará primero que los coeficientes a, b y c en (8.8) son racionales. Conforme a esta consideración se tienen las posibilidades siguientes:

1. Si $D = 0$, entonces $r = s = -b/2a$. Por consiguiente, las raíces de (8.8) son racionales e iguales.

2. Si $D < 0$, (esto es, si D es negativa), entonces $\sqrt{D}$ es un imaginario puro y consecuentemente r y s son imaginarios.

3. Si $D > 0$, pueden presentarse dos casos. Primero, si D es un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{D}$ es un número racional y en consecuencia r y s son racionales. Segundo, si D no es un cuadrado perfecto, $\sqrt{D}$ es un número irracional, y, por tanto, r y s son irracionales. En cualquiera de esos casos, r y s son desiguales, puesto que

$$r = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{y} \qquad s = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

La información anterior se puede resumir en la Tabla siguiente:

Discriminante	*Raíces*
$D = 0$	Racionales e iguales
$D > 0$ cuadrado perfecto	Racionales y desiguales
$D > 0$ sin ser cuadrado perfecto	Irracionales y desiguales
$D < 0$	Imaginarios

EJEMPLO 1 $9x^2 - 24x + 16 = 0$ $\quad D = (-24)^2 - (4)(9)(16) = 576 - 576 = 0$ *racionales e iguales*

EJEMPLO 2 $2x^2 + 3x - 20 = 0$ $\quad D = 3^2 - (4)(2)(-20) = 9 + 160 = 169 = 13^2$ *racionales y desiguales*

EJEMPLO 3 $3x^2 - 2x - 7 = 0$ $\quad D = (-2)^2 - (4)(3)(-7) = 4 + 84 = 88$ *irracionales y desiguales*

EJEMPLO 4 $5x^2 - 6x + 8 = 0$ $\quad D = (-6)^2 - (4)(5)(8) = 36 - 160 = -124$ *imaginarias*

Si se considera que *a, b* y *c* son reales, pero no necesariamente racionales, la información que se obtiene acerca de *r* y *s* es menos explícita. Si

$D = 0$, las raíces son reales e iguales (ya que $r = s = -b/2a$, y se sabe sólo que a y b son reales).
$D > 0$, las raíces son reales y desiguales.
$D < 0$, las raíces son imaginarias.

EJEMPLO 5 $2x^2 - 2\sqrt{10}x + 5 = 0$ $\quad D = (-2\sqrt{10})^2 - (4)(2)(5) = 40 - 40 = 0$ *reales e iguales*

EJEMPLO 6 $\sqrt{3}x^2 - 5x + \sqrt{12} = 0$ $\quad D = (-5)^2 - (4)(\sqrt{3})(\sqrt{12}) = 25 - 24 = 1$ *reales y desiguales**

EJEMPLO 7 $\sqrt{5}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$ $\quad D = (-\sqrt{3})^2 - (4)(\sqrt{5})(\sqrt{2}) = 3 - 4\sqrt{10} < 0$ *imaginarias*

* En este caso, D es un cuadrado perfecto. Sin embargo, $r = (5 + 1)/2\sqrt{3} = 6/2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ y $s = (5 - 1)/2\sqrt{3} = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3$, y por tanto no son racionales.

8.10 SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAICES DE UNA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

Mediante el uso de (8.9) y (8.10), del párrafo anterior, se puede ob-

servar que la suma y el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado son simplemente combinaciones de los coeficientes de la ecuación. Por ejemplo, la suma de las raíces es

$$\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

Por tanto,

suma de dos raíces

$$r+s=-\frac{b}{a} \tag{8.11}$$

Además el producto es

$$\begin{aligned}\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)&=\left(\frac{-b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\\&=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\&=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}\\&=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\end{aligned}$$

En consecuencia,

producto de dos raíces

$$rs=\frac{c}{a} \tag{8.12}$$

Luego, puesto que r y s son las raíces de $ax^2+bx+c=0$, se observa que *la suma de las dos raíces de una ecuación de segundo grado es igual al cociente de los coeficientes de x y x^2 con signo opuesto y que el producto de las dos raíces es el cociente del término constante entre el coeficiente de x^2.*

regla para determinar la suma y el producto de dos raíces

Los dos fórmulas (8.11) y (8.12), son útiles para comprobar rápidamente las raíces de una ecuación de segundo grado. En el ejemplo 1, Pr. (8.5) se encontró que las raíces de $6x^2-x-12=0$, eran $\frac{3}{2}$ y $-\frac{4}{3}$. Mediante (8.11) y (8.12) se observa que la suma y el producto de las dos raíces debe ser $\frac{1}{6}$ y $-\frac{12}{6}=-2$, respectivamente.

Para comprobar la solución, se suman primero las dos raíces y luego se multiplican. Para la suma se obtiene $\frac{3}{2}+(-\frac{4}{3})=\frac{9}{6}-\frac{8}{6}=\frac{1}{6}$ y para el producto $(\frac{3}{2})(-\frac{4}{3})=-\frac{12}{6}=-2$. Por tanto la solución es la correcta.

A continuación se presentarán algunos ejemplos que muestran cómo usar los principios expuestos en este y en los anteriores párrafos, para obtener información acerca de los coeficientes en ecuaciones cuyas raíces deben satisfacer ciertas condiciones predeterminadas.

EJEMPLO 1 En la ecuación $2x^2+(k-3)x+3k-5=0$, determinar k de tal modo que la suma y el producto de las raíces sean iguales.

Solución: En este problema $a = 2$, $b = k - 3$ y $c = 3k - 5$. Por tanto, de (8.11) la suma de las raíces es

$$-\frac{b}{a} = -\frac{k-3}{2}$$

y de (8.12) el producto es

$$\frac{c}{a} = \frac{3k-5}{2}$$

Como la suma debe ser igual al producto, se tiene

$$-\frac{k-3}{2} = \frac{3k-5}{2}$$

Resolviendo esta ecuación para k, se tiene

$$\begin{aligned} -k + 3 &= 3k - 5 \\ 4k &= 8 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. (a) Demostrar que si una raíz es igual a la otra, pero con signo opuesto, entonces $b = 0$; (b) Demostrar que si una raíz es cero, entonces $c = 0$.

Solución: (a) Si una raíz es igual a la otra con signo opuesto, entonces

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} -b + \sqrt{b^2 - 4ac} &= b + \sqrt{b^2 - 4ac} \\ -b - b &= \sqrt{b^2 - 4ac} - \sqrt{b^2 - 4ac} \\ -2b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

(b) Si una raíz es cero, entonces

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

en donde el doble signo $\pm$ significa que alternativamente puede ser más o menos, pero no las dos cosas a la vez. Si se multiplican los dos miembros de la ecuación anterior por 2a, se tiene

$$\begin{aligned} -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} &= 0 \\ -b &= \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\ b^2 &= b^2 - 4ac \qquad \textit{se han elevado al cuadrado los dos miembros} \\ 4ac &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, puesto que a $\neq 0$, entonces $c = 0$.

8.11 FACTORES DE UN TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO CON UNA VARIABLE

Se demostrará que si r y s son raíces, de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.13}$$

entonces $x - r$ y $x - s$ son factores de

$$ax^2 + bx + c \tag{8.14}$$

según (8.11) y (8.12)

$$-\frac{b}{a} = r + s \tag{8.15}$$

y

$$\frac{c}{a} = rs \tag{8.16}$$

Por tanto, $b = -a\ (r + s)$ y $c = ars$. Así, sustituyendo estos valores en (8.14), se tiene

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(r + s)x + ars \\ &= a[x^2 - (r + s)x + rs] \\ &= a(x - r)(x - s) \end{aligned} \tag{8.17}$$

Si a, b y c son racionales y si además $b^2 - 4ac$ es un cuadrado perfecto, entonces los factores anteriores son racionales. Por consiguiente, *el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son racionales, se puede expresar como el producto de dos factores racionales de primer grado, siempre que $b^2 - 4ac$ sea un cuadrado perfecto.*

Si un trinomio de segundo grado satisface las condiciones anteriores, sus factores se pueden obtener según el método del Pr. 15. Sin embargo, si los coeficientes son números grandes, se requiere gran habilidad para encontrar la combinación adecuada. En tales casos resulta más fácil emplear el método que se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Factorizar la expresión: $72x^2 + 95x - 1000$.

Solución: Para factorizar

$$72x^2 + 95x - 1000 \tag{1}$$

se iguala (1) con cero y se resuelve la ecuación obtenida, esto es

$$\begin{aligned} x &= \frac{-95 \pm \sqrt{9025 + 288{,}000}}{144} = \frac{-95 \pm \sqrt{297{,}025}}{144} \\ &= \frac{-95 \pm 545}{144} \\ &= \tfrac{450}{144} \text{ and } -\tfrac{640}{144} \\ &= \tfrac{25}{8} \text{ and } -\tfrac{40}{9} \end{aligned}$$

Por tanto, $ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$

$$\begin{aligned} 72x^2 + 95x - 1000 &= 72(x - \tfrac{25}{8})(x + \tfrac{40}{9}) && \textit{según (8.17), puesto que } a = 72 \\ &= 8(x - \tfrac{25}{8})9(x + \tfrac{40}{9}) && \textit{puesto que } 72 = 8 \times 9 \\ &= (8x - 25)(9x + 40) \end{aligned}$$

Evidentemente, la ecuación

$$a(x - r)(x - s) = 0 \tag{8.18}$$

en la cual a es diferente de cero, es una ecuación cuyas raíces son r y s.

Si r y s son enteros, generalmente se hace $a = 1$. Sin embargo, si r y s

son racionales y uno de ellos o ambos son fracciones, se escribe como el denominador o como el producto de los denominadores. De ese modo la ecuación resultante tiene coeficiente enteros. En los ejemplos siguientes se desean obtener varias ecuaciones cuyas raíces son (*a*) 3 y —2; (*b*) —4 y $\frac{2}{3}$; (*c*) $-\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ En cada caso se indicarán los pasos efectuados al simplificar la ecuación.

(*a*) Raíces: 3, -2

Ecuación: $(x-3)(x+2)=0$ *según (8.18) con a = 1*

$x^2-x-6=0$ *se ha efectuado la multiplicación indicada*

(*b*) Raíces: -4, $\frac{2}{3}$

Ecuación: $3(x+4)(x-\frac{2}{3})=0$ *según (8.18) con a = 3*

$(x+4)(3x-2)=0$ *se ha multiplicado el segundo factor por 3*

$3x^2+10x-8=0$ *se ha efectuado la multiplicación indicada*

(*c*) Raíces: $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$

Ecuación: $24(x+\frac{3}{4})(x-\frac{5}{6})=0$ *según (8.18), con*

$4(x+\frac{3}{4})6(x-\frac{5}{6})=0$ *a = 4 × 6 = 24*

$(4x+3)(6x-5)=0$

$24x^2-2x-15=0$

EJERCICIO 38: USO DEL DISCRIMINANTE

Mediante el uso del discriminante determínese la naturaleza de las raíces de las ecuaciones de los problemas 1 a 20.

1: $2x^2+3x+1=0$
2: $3x^2-5x+3=0$
3: $3x^2-6x+3=0$
4: $4x^2-3x-1=0$
5: $5x^2+7x-3=0$
6: $16x^2-8x+1=0$
7: $7x^2+6x-2=0$
8: $6x^2-5x-3=0$
9: $3x^2=4x+4$
10: $4x^2=28x-49$
11: $6x^2=7x+5$
12: $9x^2=3x+2$
13: $\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$
14: $x^2-2\sqrt{3}x+3=0$
15: $\sqrt{2}x^2+3x-\sqrt{8}=0$
16: $2x^2-3x+\sqrt{7}=0$
17: $(1-\sqrt{5})x^2+4x-1-\sqrt{5}=0$
18: $(\sqrt{2}+1)x^2+6x+\sqrt{2}+1=0$
19: $(\sqrt{7}-\sqrt{5})x^2+\sqrt{3}x+\sqrt{7}+\sqrt{5}=0$
20: $(\sqrt{3}-\sqrt{5})x^2-2\sqrt{3}x+(\sqrt{3}+\sqrt{5})=0$

Sin resolver las ecuaciones de los problemas 21 a 32, encuéntrese la suma y el producto de las raíces.

21: $3x^2+4x+2=0$
22: $2x^2-5x+7=0$
23: $5x^2-2x-3=0$
24: $4x^2+7x-1=0$
25: $x^2=-3x-2$
26: $2x^2+3=7x$
27: $5x+9=3x^2$
28: $3=2x^2+x$
29: $\sqrt{3}x^2-\sqrt{6}x+3=0$
30: $\sqrt{5}x^2+10x+\sqrt{10}=0$

31: $(2 + \sqrt{3})x^2 - x + 5 + 3\sqrt{3} = 0$
32: $(\sqrt{2} + 1)x^2 + x + \sqrt{2} - 1 = 0$

Determínese k de tal modo que las dos raíces de las ecuaciones de los problemas 33 a 36 sean iguales.

33: $x^2 + kx + 2k = 0$ 34: $x^2 + 2(k - 2)x - 8k = 0$
35: $(3k + 6)x^2 + 6x + k = 0$ 36: $(k - 5)x^2 + 2(k - 1)x - 2 = 0$

Encuéntrese el valor de k para que la suma de las raíces sea igual al producto de las mismas en las ecuaciones de los problemas 37 a 40.

37: $3x^2 + (k + 2)x + 2k + 1 = 0$ 38: $x^2 + (3k - 2)x - k = 0$
39: $2x^2 + (3k - 1)x - k - 3 = 0$ 40: $3x^2 - (2k - 3)x + k - 5 = 0$

Encuéntrese el valor de k para que una de las raíces de las ecuaciones de los problemas 41 a 44 sea igual a cero.

41: $3x^2 - 2x + k - 3 = 0$ 42: $2x^2 - 7kx + 5k - 1 = 0$
43: $3x^2 + 5x + k^2 - 5k + 6 = 0$ 44: $4x^2 - 3x + 2k^2 + k - 6 = 0$

Fórmense las ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean las parejas de números dadas en los problemas 45 a 56.

45: $3, -5$ 46: $4, 3$ 47: $-1, -3$
48: $-5, 2$ 49: $\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$ 50: $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$
51: $-\frac{5}{6}, -\frac{5}{3}$ 52: $-\frac{2}{5}, -\frac{7}{3}$ 53: $5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3}$
54: $-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}$ 55: $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$
56: $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}i}{4}, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}i}{4}$

Encuéntrense los factores de las funciones de segundo grado de los problemas 57 a 64.

57: $40x^2 - 34x - 27$ 58: $48x^2 + 53x - 45$
59: $56x^2 - 58x - 75$ 60: $54x^2 - 3x - 92$
61: $76x^2 + 47x - 60$ 62: $42x^2 - 2x - 26$
63: $36x^2 - 19x - 106$ 64: $45x^2 - 62x - 56$

8.12 GRAFICA DE UNA FUNCION DE SEGUNDO GRADO.

El miembro de la izquierda, $ax^2 + bx + c$, de la ec. (8.8), es una función de segundo grado de x. En el Pr. 5.4 se discutieron los métodos para construir las gráficas de las funciones de esa clase,
en las Figs. (5.2) y (5.3) se representaron las correspondientes a $x^2 - 2x - 2$ y a $9x^2 - 1$, respectivamente.

En los ejemplos siguientes se empleará el mismo método para construir las gráficas de las funciones.

$$\tfrac{1}{2}x^2 - 2x - 3;\quad -x^2 - 6x - 5;\quad x^2 - 6x + 9.$$

Como en el Pr. (5.4), se hará cada función igual a y y se asignarán luego valores a x a partir de los cuales se calcularán los correspondientes de y. De este modo se obtienen las Tablas de valores de los ejemplos que

aparecen al final de esta página y la siguiente.

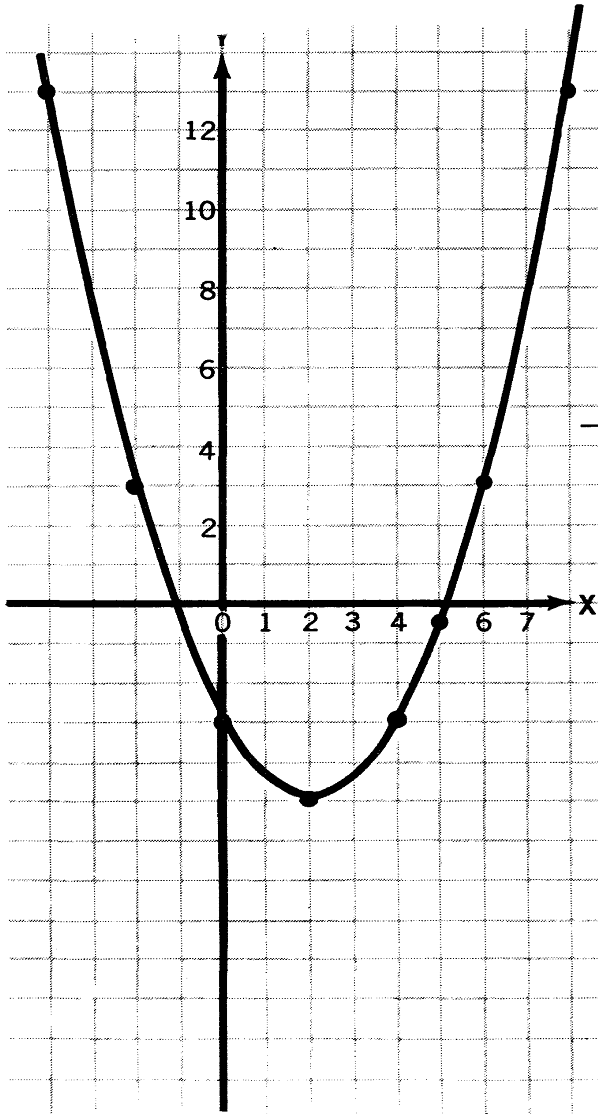


Figura 8.2

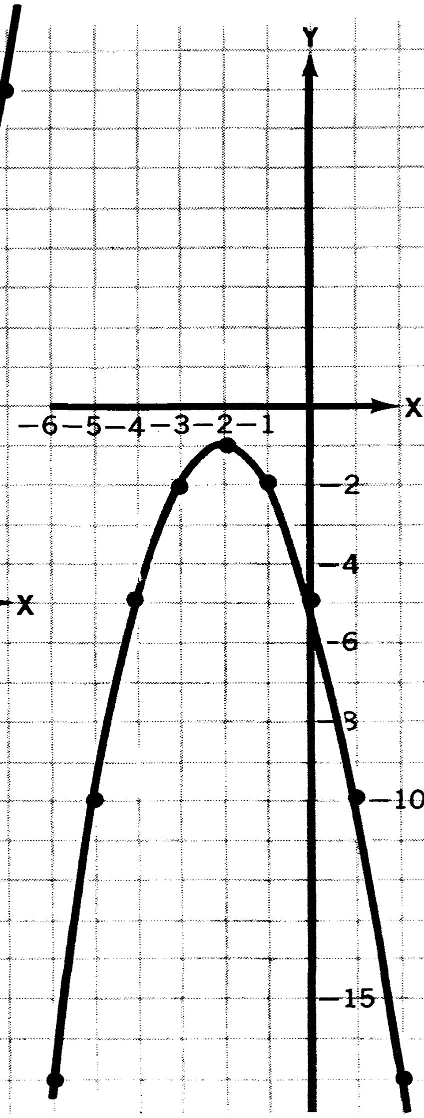


Figura 8.3

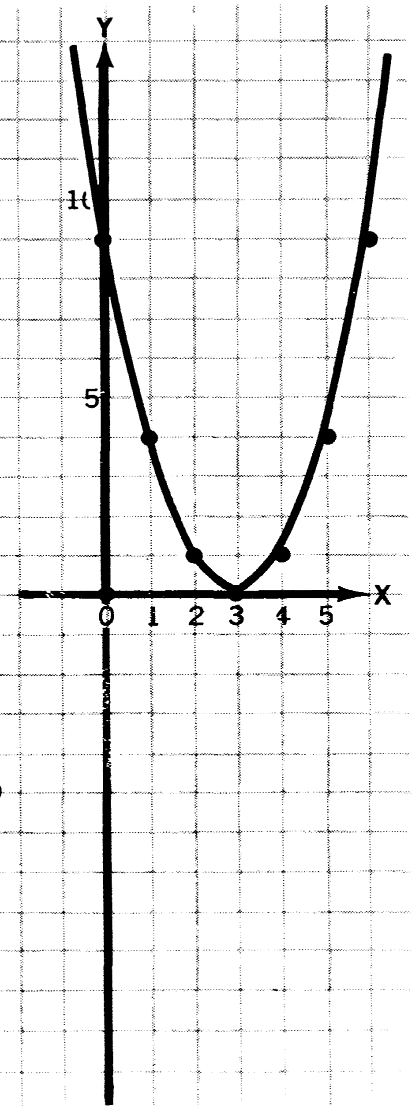


Figura 8.4

Una curva como la representada en las figuras 8.2 a 8.4 se conoce con el nombre de *parábola*. En Geometría Analítica se demuestra que la gráfica de la función de segundo grado $ax^2 + bx + c$ es siempre una *parábola* y que la curva tiene sus ramas abiertas hacia arriba si a es positivo y hacia abajo si a es negativo. El *vértice* de la parábola es el punto más bajo de la curva cuando ésta se abre hacia arriba, y es un punto más alto cuando se abre hacia abajo. En el siguiente párrafo se explicará cómo obtener las coordenadas del vértice.

Los ceros de una función de segundo grado son las abscisas de los puntos en donde la gráfica cruza el eje de las X. En los ejemplos anteriores los ceros de la primera función son, respectivamente, uno un poco mayor que 5 y otro un poco menor que —1. La segunda función no tiene ceros y la tercera solamente tiene uno, $x = 3$. Esta información puede obtenerse tabulando las funciones.

(a) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ (Fig. 8.2)

x	-4	-2	0	2	4	6	8
y	13	3	-3	-5	-3	3	13

(*b*) $y = -x^2 - 4x - 5$ (**Fig. 8.3**)

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-17	-10	-5	-2	-1	-2	-5	-10	-17

(*c*) $y = x^2 - 6x + 9$ (**Fig. 8.4**)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9	4	1	0	1	4	9

8.13 VALORES MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION DE SEGUNDO GRADO.

En el párrafo anterior se indicó que el vértice de una parábola es el punto más bajo o el más alto de la curva. La abscisa del vértice es el valor de la x, para el cual la función tiene el valor máximo o el valor mínimo. Se puede obtener tal valor de x mediante el método de completar un cuadrado explicado en el Pr. (8.3), y los ejemplos siguientes sirven para ilustrarlo.

EJEMPLO 1 Encontrar los valores de y máximo y mínimo en la función $y = 2x^2 - 4x + 10$.

Solución: En la función $y = 2x^2 - 4x + 10$ el coeficiente de x^2 es positivo. Por tanto, la curva abre sus ramas hacia arriba y por ello existe un valor mínimo, pero no un valor máximo para y. El valor de x para el cual y es mínimo se puede obtener por el método que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 4x + 10 \\ &= 2[(x^2 - 2x) + 5] \\ &= 2[(x^2 - 2x + 1) + 5 - 1] \end{aligned}$$

se ha completado el cuadrado en la expresión dentro del paréntesis, sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

$$= 2[(x - 1)^2 + 4]$$

Si la primera expresión dentro de los corchetes no es cero, entonces es positiva, puesto que es un cuadrado. Por tanto, el valor de y se incrementa según el valor numérico de $x - 1$ y el valor de y es mínimo cuando esta expresión se anula, esto es, cuando $x = 1$. Por tanto, el valor mínimo de y es $y = 2\ (1 - 1)^2 + 4 = 8$.

EJEMPLO 2 Encontrar los valores de y máximo y mínimo en: $-3x^2 - 12x + 4$.

Solución: Si se aplica el método anterior a la función $y = -3x^2 - 12x + 4$ se tiene

$$\begin{aligned} y &= -3[(x^2 + 4x) - \tfrac{4}{3}] \\ &= -3[(x^2 + 4x + 4) - \tfrac{4}{3} - 4] \\ &= -3[(x + 2)^2 - \tfrac{16}{3}] \\ &= -3(x + 2)^2 + 16 \end{aligned}$$

La expresión $(x + 2)^2$ es positiva, excepto para el caso $x = -2$, y su valor aumenta tanto cuando x aumenta como cuando x disminuye a partir de -2. Por tanto, el máximo valor de y se obtiene cuando $x - 2$, y este es $y = -3\ (-2 + 2)^2 + 16 = 16$.

El método anterior es útil para resolver tipos de problemas prácticos, ejemplo de los cuales es el siguiente:

EJEMPLO 3 Un agricultor desea construir un establo a lo largo del granero. Si sólo tiene 80 metros de cerca, encontrar las dimensiones de los lados de tal modo que la superficie sea máxima.

Solución: Sea $x =$ ancho del establo
$z =$ largo del mismo
$y =$ área

Puesto que no se requiere cerca a lo largo del granero, la longitud total de la cerca es $2x + z$. Por tanto

$$2x + z = 80$$
$$z = 80 - 2x \qquad \textit{resolviendo para 2}$$

además,

$$\begin{aligned} y &= \text{largo} \times \text{ancho} \\ &= (80 - 2x)(x) \\ &= -2x^2 + 80x \\ &= -2(x^2 - 40x) \\ &= -2(x^2 - 40x + 400) + 800 \\ &= -2(x - 20)^2 + 800 \end{aligned}$$

Por tanto el valor de y es máximo para $x = 20$, y para este valor, $z = 80 - 2(20) = 40$. Por tanto, las dimensiones más útiles serán, largo 40 mts. y ancho 20 mts.

EJERCICIO 39: GRAFICAS DE FUNCIONES DE SEGUNDO GRADO

Constrúyanse las gráficas de las funciones de los problemas 1 a 12 y estímense los valores de sus ceros con aproximación de una cifra decimal.

1: $y(x) = x^2 + 2x - 2$
2: $y(x) = x^2 + x - 1$
3: $y(x) = x^2 + x + 1$
4: $y(x) = x^2 - x - 6$
5: $y(x) = x^2 - 3x + 3$
6: $y(x) = x^2 - 6x + 7$
7: $y(x) = x^2 + 3x - 3$
8: $y(x) = x^2 + 5x + 7$
9: $y(x) = -2x^2 - 2x + 3$
10: $y(x) = -2x^2 + 5x - 1$
11: $y(x) = -3x^2 + 9x - 8$
12: $y(x) = -3x^2 + 6x - 2$

Sin construir las gráficas, encuéntrense los valores máximos o mínimos de $y(x)$ en los problemas 13 a 20 y determínese el número de puntos en que la gráfica hace contacto con el eje de las X.

13: $y(x) = -x^2 + 4x - 4$
14: $y(x) = -x^2 + 2x - 1$
15: $y(x) = x^2 + 6x + 7$
16: $y(x) = x^2 + 5x + 3$
17: $y(x) = 4x^2 + 6x - 1$
18: $y(x) = -3x^2 + 5x - 2$
19: $y(x) = -5x^2 + 8x - 3$
20: $y(x) = 6x^2 + 10x + 5$

21. Encuéntrense las dimensiones del grabado rectangular de mayor área que pue-

de enmarcarse con 1.5 metros de moldura.

22. ¿Qué número excede a su cuadrado en la mayor cantidad posible?

23. Divídase el número 120 en dos partes de tal modo que el producto de ellas sea el mayor posible.

24. Un terreno rectangular se cercó y se dividió en dos partes iguales con una cerca paralela a uno de sus lados. Si se emplearon 6 000 metros de cerca, sabiendo que con ellos se obtenía la mayor superficie posible, encuéntrense las dimensionés del terreno.

9 ECUACIONES SIMULTANEAS DE SEGUNDO GRADO

EN EL PRESENTE CAPÍTULO se continuará con el estudio de las ecuaciones de segundo grado, considerando sistemas de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas. Además, se estudiarán sistemas de ecuaciones en los que por lo menos una de las ecuaciones es de segundo grado. Se verá que es posible resolver sistemas de ecuaciones de segundo grado utilizando algunos de los métodos discutidos en el capítulo 6. Finalmente, se examinarán algunos de los tipos de problemas cuyo planteo requiere un sistema de ecuaciones de segundo grado.

9.1 ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

La ecuación más general de segundo grado con dos variables es la ecuación del tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{9.1}$$

en la cual por lo menos una de las letras, A, B o C es diferente de cero. En este capítulo se discuutirán las gráficas de algunos casos especiales de la ec. (9.1) y se presentarán además los métodos para resolver simultáneamente pares de esas ecuaciones.

9.2 GRAFICAS DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

En Geometría Analítica se demuestra que la gráfica, si existe, de una ecuación de segundo grado con dos variables, puede ser un círculo, una elipse, una hipérbola o una parábola. (Véase la figura 9.1). En casos especiales la gráfica puede degenerar en un punto o en un par de líneas rectas.

Se discutirán las gráficas de los siguientes casos especiales de la ecuación general de segundo grado:

$x^2 + y^2 = r^2$

$ax^2 + by^2 = c$ $\quad$ *a, b y c positivas*

$ax^2 - by^2 = c$ $\quad$ *a y b positivas*

$y = ax^2 + bx + c$ $\quad$ $a \neq 0$

$x = ay^2 + by + c$ $\quad$ $a \neq 0$

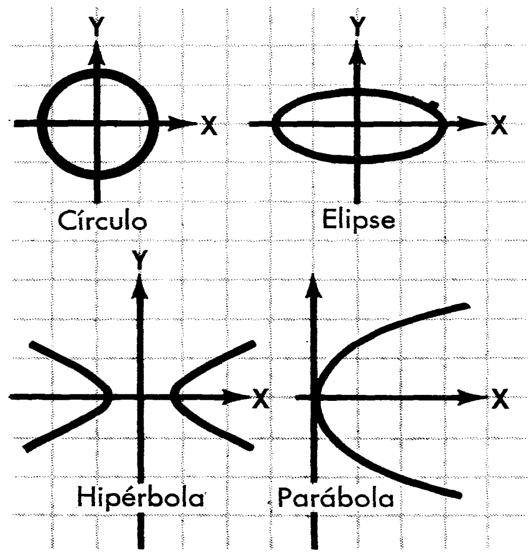


Figura 9.1

Como en el Pr. 5.4, los pasos para construir la gráfica son:

gráfica de una ecuación de segundo orden

1. Se resuelve la ecuación para y en términos de x.(*)
2. Se asignan diversos valores a x y se calculan los correspondientes valores de y. Los pares de valores así asociados se ordenan en forma tabular.
3. Se localizan los puntos determinados por los anteriores pares de valores y se unen mediante una línea curva.

Gráficas de ecuaciones del tipo $x^2 + y^2 = r^2$.

Como primer ejemplo se considerará la ecuación

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{9.2}$$

Si se efectúan las operaciones indicadas en los pasos anteriores se tiene

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Se asignan a x los enteros comprendidos de —5 a 5, ambos inclusive, y se calculan los valores correspondientes de y. Por ejemplo, si $x = -5$; entonces

$$y = \pm\sqrt{25 - (-5)^2} = \pm\sqrt{25 - 25} = 0$$

Análogamente si $x = 2$

$$y = \pm\sqrt{25 - (2)^2} = \pm\sqrt{25 - 4} = \pm\sqrt{21} = \pm 4.6$$

Cuando se efectúan las operaciones similares para los otros valores asignados a x, y los resultados se ordenan en forma tabular, se tiene

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	± 3	± 4	± 4.6	± 4.9	± 5	± 4.9	± 4.6	± 4	± 3	0

* Si resulta más fácil resolver x en términos de y, debe hacerse así. Por tanto, en los pasos que se explican se puede intercambiar x por y.

Obsérvese que la Tabla anterior se tienen dos valores de y para cada valor de x excepto en los casos cuando $x = -5$, y $x = 5$. El par de valores $x = 3$, $y = \pm 4$ determina los dos puntos (3. 4) y (3, —4).

Si tomando en cuenta la advertencia anterior se localizan los puntos indicados en la tabla y se unen éstos mediante una línea curva, se obtiene la gráfica de la figura (9.2)

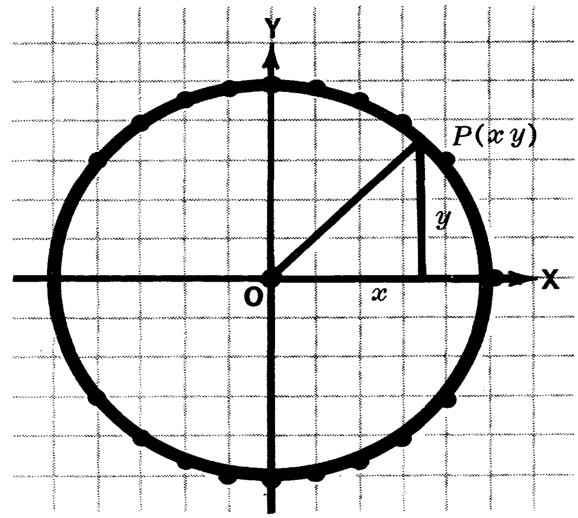


Figura 9.2

Se puede observar fácilmente que la curva es un círculo, puesto que las coordenadas (x, y) de cualquier punto P en ella satisfacen la ecuación (9.2) esto es, la suma de sus cuadrados es 25. Además, observando la figura, se ve que el cuadrado de la distancia OP, tomada de P al centro, es $x^2 + y^2$. Por tanto, cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan (9.2) está situado a una distancia 5 del origen.

De modo más general y mediante un razonamiento análogo se concluye que la gráfica de $x^2 + y^2 = r^2$ es un círculo de radio r y que la gráfica de $ax^2 + ay^2 = c$ es un círculo de radio $\sqrt{c/a}$.

Ecuaciones del tipo $ax^2 + by^2 = c$.

Como ejemplo del anterior de ecuaciones se construirá la gráfica de

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \tag{9.3}$$

Solución:

Resolviendo para y, se tiene

$$y = \pm\sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}} = \pm\sqrt{\frac{4(9 - x^2)}{9}}$$
$$= \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \qquad \textit{quitando el factor } \frac{2}{3}$$

Debe notarse que si $x^2 > 9$, el radicando es negativo y, por ello, y es imaginario. Por tanto, la gráfica existe solamente para valores de x desde —3 hasta 3, ambos inclusive. En consecuencia, se asignan a x los valores enteros 0, ± 1, ± 2, ± 3 y se calculan los correspondientes valores de y, ordenando los resultados en una tabla,

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	± 1.5	± 1.9	± 2	± 1.9	± 1.5	0

Cuando se construye la gráfica determinada por estos valores se obtiene la curva de la figura (9.3).

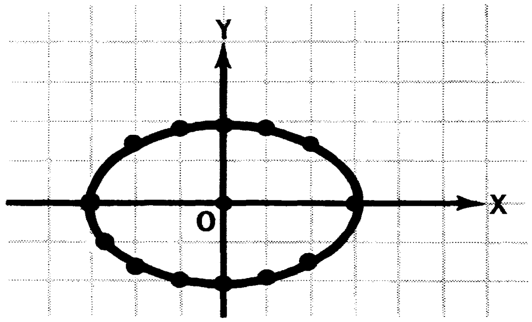


Figura 9.3

De acuerdo con el modelo de la figura 9.1 esta curva es una elipse La demostración de que la ecuación $ax^2 + by^2 = c$, en la cual a, b y c son positivos, define siempre una elipse, está más allá de los propósitos ~~de~~ este libro. Sin embargo, dicha proposición es verdadera y conviene recordar el dato cuando se trabaje con tal ecuación.

Ecuaciones del tipo $ax^2 — by^2 = c$. Se discutirá ahora la gráfica de la ecuación

$$3x^2 - 4y^2 = 12 \tag{9.4}$$

Procediendo como hasta este momento se ha hecho, se tiene

$$y = \pm\sqrt{\frac{3x^2 - 12}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3(x^2 - 4)}{4}}$$
$$= \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{3(x^2 - 4)} \qquad \textit{quitando el factor } \tfrac{1}{2}$$

En este caso debe notarse que si $x^2 < 4$, el radicando es negativo y, por tanto, y es imaginario. En consecuencia, la gráfica no es representable entre $x = — 2$ y $x — 2$. Sin embargo, si x es 2 ó — 2, entonces y es cero. Por tanto, la curva debe extenderse a la derecha de (2.0) y a la izquierda de (—2.0). De ese modo, asignando a x los valores ±2, ±3, ±4, ±5, ±7, ±9, y procediendo como en los ejemplos anteriores, se tiene la siguiente tabla:

x	-9	-7	-5	-4	-3	-2	2	3	4	5	7	9
y	±7.6	±5.8	±4	±3	±2	0	0	±2	±3	±4	±5.8	±7.6

Cuando se localizan los puntos anteriores y se dibuja la curva, se obtiene la de la figura (9.4)

Nuevamente, según el modelo de la figura 9.1, esta curva es una hipérbola. Según este ejemplo, una ecuación del tipo $ax^2 — by^2 = c$, define una hipérbola. Si c es positiva la curva asume una posición semejante a la de la figura 9.4. En cambio, si c es negativo, las dos ramas de la curva cruzan el eje de la Y en vez del eje de las X, y sus ramas se abren hacia arriba y hacia abajo.

Ecuaciones del tipo $y = ax^2 + bx + c$ o $x = ay^2 + by + c$.

Resolviendo para y la ecuación,

$$x^2 - 4x - 4y - 4 = 0 \tag{9.5}$$

se tiene

$$y = \tfrac{1}{4}x^2 - x - 1 \tag{9.6}$$

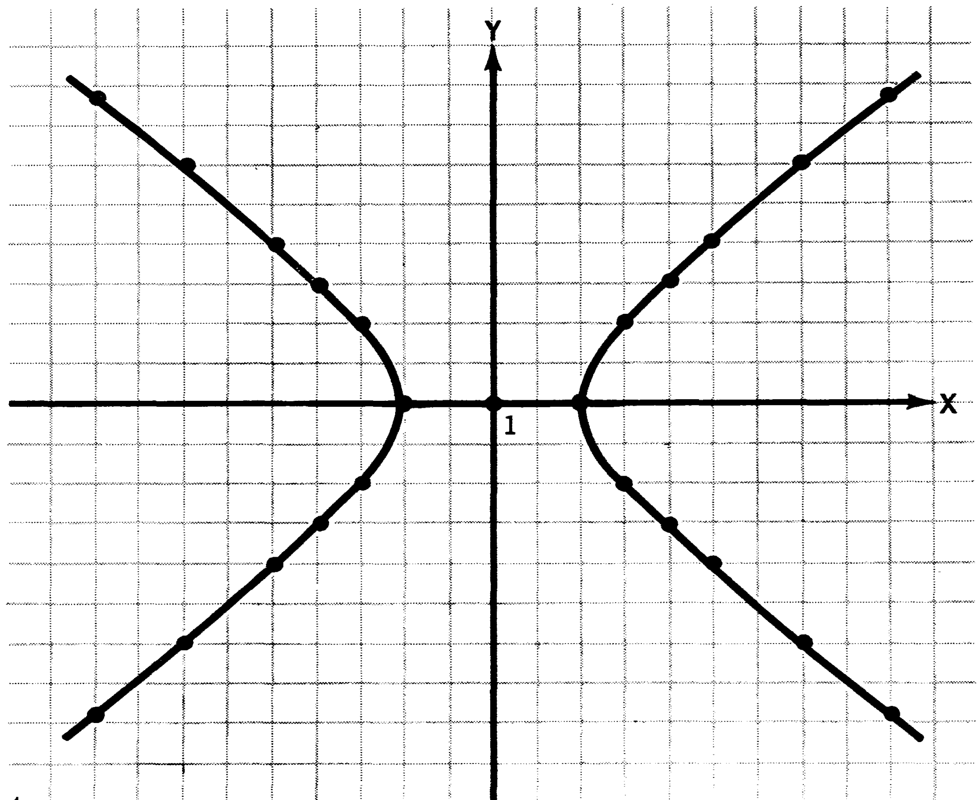


Figura 9.4

que corresponde al primer tipo de los arriba mencionados. Para evitar el uso de fracciones se sustituyen para x únicamente valores pares. Si se usan para x los valores —4, —2, 0, 2, 4, 6, 8 y se procede como se ha dicho con anterioridad, se obtiene la siguiente tabla para los valores de x y de y:

x	-4	-2	0	2	4	6	8
y	7	2	-1	-2	-1	2	7

La figura 9.5 muestra la gráfica que se obtiene a partir de esos puntos.

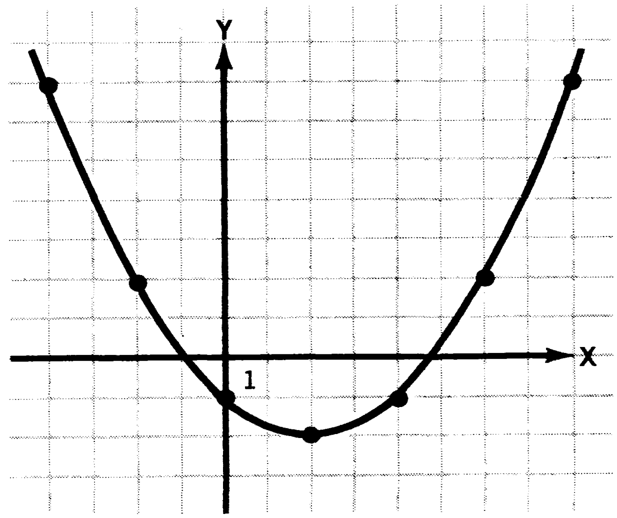


Figura 9.5

Como ejemplo final, se construirá la gráfica de

$$2y^2 + 1 = x + 4y \tag{9.7}$$

Puesto que esta ecuación contiene sólo un término con x, el cálculo es más fácil si se resuelve la ecuación para x en términos de y. De ese modo se obtiene

$$x = 2y^2 - 4y + 1 \tag{9.8}$$

Se asignan a y diversos valores y se calculan los correspondientes de x. La tabla siguiente se obtuvo empleando para y los valores —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4.

x	17	7	1	−1	1	7	17
y	−2	−1	0	1	2	3	4

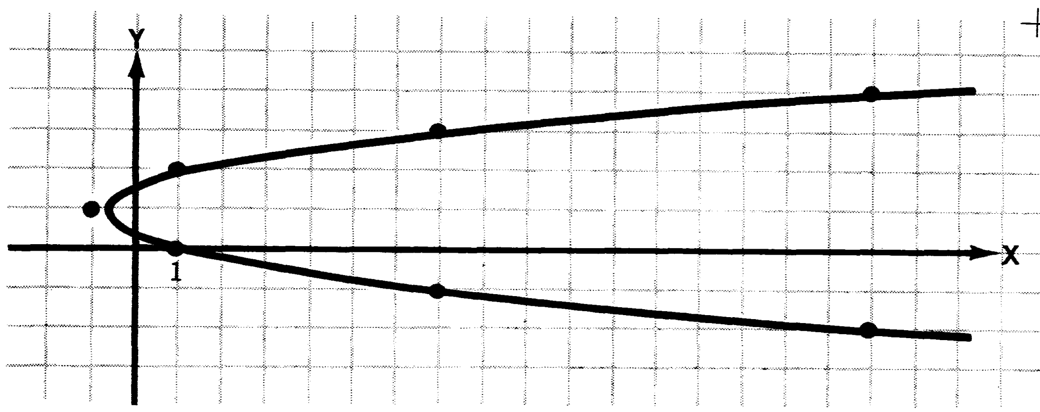


Figura 9.6

Construyendo la gráfica se obtiene la curva representada en la figura 9.6

Las curvas de las figuras 9.5 y 9. 6, son parábolas. En Geometría analítica se demuestra que una ecuación del tipo

$$x = ay^2 + by + c$$

define una parábola y que esta abre sus ramas hacia arriba si a es positivo, y hacia abajo, si a es negativo. Además, una ecuación del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

define una parábola que abre sus ramas hacia la derecha si a es positivo, y hacia la izquierda, si a es negativo.

EJERCICIO 40: SOLUCION GRAFICA DE PARES DE ECUACIONES

Constrúyanse las gráficas de las ecuaciones de los problemas 1 a 32.

1: $2x - y = 3$	2: $3x + y = 7$	3: $x + 4y = 6$
4: $3x + 2y = 7$	5: $x^2 + y^2 = 9$	6: $x^2 + y^2 = 16$
7: $x^2 + y^2 = 25$	8: $x^2 + y^2 = 64$	9: $x^2 + 4y^2 = 4$
10: $x^2 + 9y^2 = 9$	11: $4x^2 + 9y^2 = 36$	12: $16x^2 + 25y^2 = 400$

13: $16x^2 + y^2 = 16$ 14: $25x^2 + y^2 = 25$ 15: $25x^2 + 4y^2 = 100$
16: $16x^2 + 9y^2 = 144$ 17: $x^2 - 4y^2 = 4$ 18: $x^2 - 9y^2 = 9$
19: $4x^2 - 9y^2 = 36$ 20: $16x^2 - 25y^2 = 400$ 21: $16x^2 - y^2 = 16$
22: $25x^2 - y^2 = 25$ 23: $25x^2 - 4y^2 = 100$ 24: $16x^2 - 9y^2 = 144$
25: $y^2 = 4x$ 26: $y^2 = -8x$ 27: $y^2 - 2y - 4x = 3$
28: $y^2 + 4y + 4x = 0$ 29: $x^2 = y$ 30: $x^2 = -4y$
31: $x^2 - 6x - 9y = 0$ 32: $x^2 + 8x + 4y + 8 = 0$

Constrúyanse las gráficas de cada uno de los pares de ecuaciones de los problemas 33 a 48, utilizando en cada caso el mismo sistema de coordenadas, y estímense las coordenadas de los puntos de intersección.

33: $x^2 + y^2 = 9$, $y - 2x = 2$
34: $y^2 = 4x$, $y = 3x$
35: $4x^2 + 9y^2 = 36$, $y = 2x + 1$
36: $4x^2 - y^2 = 4$, $2y = x + 1$
37: $x^2 + y^2 = 11$, $y^2 = -4x$
38: $y^2 = 8x$, $x^2 = 4y$
39: $x^2 = -2y$, $x^2 + 3y^2 = 3$
40: $x^2 = 6y$, $y^2 - 2x^2 = 4$
41: $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 5$
42: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 = 4y$
43: $x^2 + y^2 = 1$, $4x^2 + y^2 = 4$
44: $x^2 + y^2 = 7$, $4x^2 - y^2 = 3$
45: $4x^2 + 9y^2 = 36$, $x^2 + y^2 = 3$
46: $x^2 + 4y^2 = 4$, $y^2 = 4x - 4$
47: $4x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + 4y^2 = 4$
48: $9x^2 + y^2 = 9$, $y^2 - 4x^2 = 4$

9.3 SOLUCION DE PARES DE ECUACIONES QUE COMPRENDEN ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS VARIABLES

En el resto de este capítulo se considerarán pares de ecuaciones con dos variables que tengan una ecuación de primer grado y una de segundo grado o dos ecuaciones de segundo grado. La solución de estas ecuaciones se obtiene eliminando primero una de las variables y resolviendo la ecuación que resulte para la incógnita que queda. Se sustituye entonces este valor en una de las ecuaciones originales y se resuelve para la otra variable. Si las dos ecuaciones son de segundo grado, la eliminación de la primera variable conduce generalmente a una ecuación de cuarto grado, cuya solución se explicará en el capítulo 12. Sin embargo, se presentará desde ahora el método para resolver algunos tipos de pares de ecuaciones de acuerdo con los conocimientos hasta aquí adquiridos, y esto será suficiente mientras el lector no llegue a temas más avanzados.

9.4 PARES DE ECUACIONES CON DOS VARIABLES CONSTITUIDOS POR UNA ECUACION DE PRIMER GRADO Y UNA DE SEGUNDO.

Puesto que siempre es fácil resolver una ecuación de primer grado, expresando una variable en función de otra, el método más lógico, en el caso presente, consiste en los siguientes pasos:

pasos para resolver un par de ecuaciones

1. Se resuelve la ecuación de primer grado para una variable en términos de la otra.
2. Se sustituye la solución en la ecuación de segundo grado. Se obtiene así una ecuación de segundo grado con una variable.
3. Se resuelve esta ecuación para la variable que contiene.
4. Se sustituye cada valor obtenido en el paso anterior en la ecuación obtenida en el paso 1. Se obtiene así el correspondiente valor de la segunda variable.
5. Se escriben las soluciones en pares del modo siguiente*,

$x = \quad , \qquad y =$

$x = \quad , \qquad y =$

EJEMPLO 1 Como primer ejemplo se resolverán simultáneamente

$$x^2 + 4y^2 = 25 \qquad (1)$$
$$x - 2y = -1 \qquad (2)$$

Solución:

$x = 2y - 1$	*se ha resuelto* (2) *para x en términos de y*
$(2y - 1)^2 + 4y^2 = 25$	*se ha sustituido x por 2y—1* en (1)
$4y^2 - 4y + 1 + 4y^2 = 25$	*se ha elevado al cuadrado 2y* — 1
$8y^2 - 4y - 24 = 0$	*se ha transpuesto y se ha sumado*
$2y^2 - y - 6 = 0$	*se ha dividido entre 4*
$(y - 2)(2y + 3) = 0$	*factorizando*

Por tanto, $y = 2, y = -1\frac{1}{2}$.

Como paso 4, sustituyendo cada uno de estos valores en la ecuación obtenida en el paso 1, se tiene: si $y = 2$, entonces $x = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$; y cuando $y = -1\frac{1}{2}$,

$$x = 2\left(-1\tfrac{1}{2}\right) - 1 = -3 - 1 = -4.$$

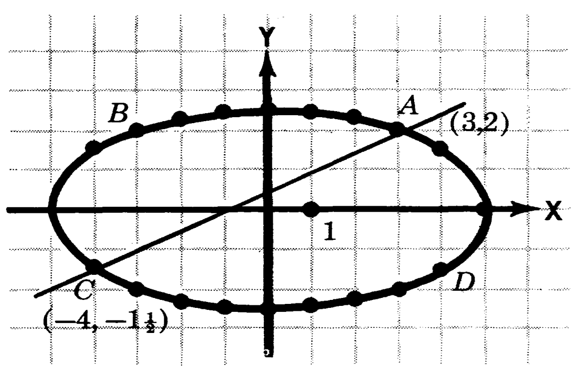


Figura 9.7

Por tanto, las ecuaciones son
$x = 3, y = 2$
$x = -4, y = -1\frac{1}{2}$
Estas soluciones se pueden comprobar sustituyéndolas en la ec. (1) En la figura 9.7 aparecen las gráficas de las dos ecuaciones las cuales se cortan en puntos cuyas coordenadas son $(-4, -1\frac{1}{2})$ y (3,2). Podría esperarse este resultado, ya que hemos obtenido algebraicamente dos soluciones reales para ambas ecuaciones.

* Las gráficas de una ecuación de segundo grado y de una de primer grado con dos variables son, respectivamente, alguna de las curvas de la figura 9.1 y una línea recta. Puesto que dos curvas de esta clase se cortan cuando más en dos puntos se pueden esperar, en general, dos soluciones algebraicas para cada par de ecuaciones.

La construcción de las gráficas ofrece una explicación para el procedimiento indicado en el paso 4 de la solución algebraica. Después de haber encontrado los valores de una de las variables en el paso 3, se pudieron haber encontrado los valores de la otra sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones dadas. Sin embargo, observando la figura 9.7, se nota que hay dos puntos, A y B, en la elipse cuyas ordenadas son 2. De manera análoga hay dos puntos, C y D, cuyas ordenadas son $-1\frac{1}{2}$. Por tanto, si se hubiera sustituido en (1), se hubieran obtenido cuatro soluciones, dos de las cuales no serían aceptables por no determinar puntos en la línea recta. Esta dificultad se evitó al sustituir en la ecuación de primer grado y no en la de segundo los valores obtenidos en el paso 3. Si en la sustitución se emplea la forma explícita de la ecuación de primer grado, obtenida en el paso 1, se ahorra algo de trabajo.

EJEMPLO 2 Como segundo ejemplo de la solución simultánea de un par de ecuaciones una de primero y otra de segundo grado, se resolverán las siguientes

$$x^2 - 2x + y - 1 = 0 \qquad (1)$$
$$2x - 3y = -5 \qquad (2)$$

Solución: Como en el ejemplo anterior

$$y = \frac{2x+5}{3} \qquad \textit{paso 1 se ha resuelto (2) para y}$$

$$x^2 - 2x + \frac{2x+5}{3} - 1 = 0 \qquad \textit{paso 2 se ha sustituido en (1)}$$

$$3x^2 - 6x + 2x + 5 - 3 = 0 \qquad \textit{se ha multiplicado por 2}$$

$$3x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} \qquad \textit{paso 3 se han sumado términos según la fórmula}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16-24}}{6}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

$$= \frac{4 \pm 2i\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{3}$$

Por tanto, $x = \dfrac{2 + i\sqrt{2}}{3}$ y $x = \dfrac{2 - i\sqrt{2}}{3}$

Como paso 4, sustituyendo en vez de x, en la ecuación del paso 1, cada uno de estos valores, se tiene $x = \dfrac{2 + i\sqrt{2}}{3}$,

$$y = \frac{2\left(\frac{2+i\sqrt{2}}{3}\right) + 5}{3}$$

$$= \frac{4 + 2i\sqrt{2} + 15}{9}$$

$$= \frac{19 + 2i\sqrt{2}}{9}$$

Análogamente, cuando

$$x = \frac{2 - i\sqrt{2}}{3}$$

se tiene

$$y = \frac{2\left(\frac{2 - i\sqrt{2}}{3}\right) + 5}{3}$$

$$= \frac{4 - 2i\sqrt{2} + 15}{9}$$

$$= \frac{19 - 2i\sqrt{2}}{9}$$

Por tanto, las soluciones son:

$$x = \frac{2 + i\sqrt{2}}{3}, \ y = \frac{19 + 2i\sqrt{2}}{9}$$

$$x = \frac{2 - i\sqrt{2}}{3}, \ y = \frac{19 - 2i\sqrt{2}}{9}$$

Estas soluciones se pueden comprobar sustituyendo en (1).

Si se aplica el método usual para obtener las gráficas de estas ecuaciones, se obtiene la parábola de la figura 9.8 para la ec. (1) y la línea recta para la ec. (2). Debe notarse que las dos gráficas no se cortan, lo que era de esperarse, puesto que las soluciones algebraicas de las dos ecuaciones son imaginarias.

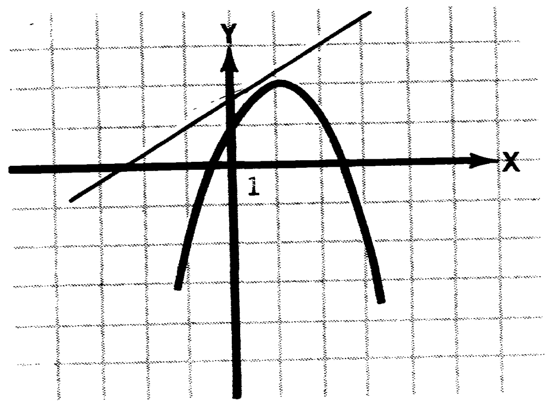


Figura 9.8

EJERCICIO 41: SOLUCION ALGEBRAICA DE ECUACIONES

Resuélvase, para x y para y, los siguientes pares de ecuaciones simultáneas.

1: $y^2 = 4x$, $x + y = 3$
2: $x^2 = 9y$, $x - y = 2$
3: $y^2 = 2x$, $y = x$
4: $y^2 = x$, $y + 2x = 1$
5: $x^2 + y^2 = 5$, $y = x - 1$
6: $x^2 + y^2 = 13$, $2x + y = 1$
7: $4x^2 + 4y^2 = 5$, $2x = 2y + 1$
8: $9x^2 + 9y^2 = 10$, $6x + y = 1$
9: $x^2 + 4y^2 = 4$, $y = x - 2$
10: $9x^2 + y^2 = 9$, $y = 2x + 3$
11: $4x^2 + 9y^2 = 2$, $2x + 3y = 2$
12: $9x^2 + 16y^2 = 2$, $3x = -4y$
13: $5x^2 - y^2 = 1$, $y = x + 1$
14: $x^2 - y^2 = 3$, $y = x - 3$
15: $4x^2 - 9y^2 = -3$, $3y = 2x + 1$
16: $25y^2 - 9x^2 = 8$, $5y = 3x + 2$
17: $y^2 = 2 - 2x$, $x + y = 2$
18: $x^2 = -3 - 2y$, $x + y = 1$
19: $x^2 + y^2 = 6$, $x + y = 4$
20: $y^2 - x^2 = 10$, $3y - 2x = 5$
21: $x^2 + y^2 = 4$, $x + y = 0$
22: $2x^2 + y^2 = 15$, $x + y = 3$
23: $2y^2 - 3x^2 = 1$, $x - y = -1$
24: $x^2 - 2y^2 = 3$, $x - y = 1$

25: $x^2 - 2x + y = 3$
$2x + y = 2$

26: $x^2 + y^2 + 4 = 4x$
$x + y = 2$

27: $y^2 - x^2 - 2y + 6x = 11$
$x - 2y = 1$

28: $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -1$
$x + y = 3$

29: $x^2 - xy - 2y^2 = 4$
$x - y = 2$

30: $2x^2 + xy - y^2 = 9$
$-x + 3y = 1$

31: $2x^2 - xy - y^2 = 20$
$2x + y = 4$

32: $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 5$
$2x - y = 1$

33: $x^2 - y^2 = 2ab - b^2$
$x - y = b$

34: $y^2 - 4x^2 = 4ab + b^2$
$y - 2x = b$

35: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2 + b^2$
$bx + ay = a + b$

36: $a^2x^2 - b^2y^2 = 4ab$
$ax - by = 2b$

9.5 ELIMINACION POR ADICION O SUSTRACCION.

Si una de las incognitas aparece únicamente en un término de cada miembro de un par de ecuaciones de segundo grado, y si estos dos términos son del mismo tipo, se puede eliminar por adición o por sustracción.

Este método se puede aplicar siempre a dos ecuaciones del tipo $ax^2 + by^2 = c$. Como se indicó en el *Pr.* 9.2, la gráfica de una ecuación del tipo $ax^2 + by^2 = c$ puede ser un círculo, una elipse o una hipérbola y en cada caso el centro está en el origen*. Excepto para el caso en que haya puntos de tangencia, dos curvas de este tipo ya sean de igual o diferente clase se intersectan en cuatro puntos o no lo hacen en ninguno. Si dos de esas curvas son tangentes una a otra en un punto, entonces también lo son en otro punto. Por tanto, se deben esperar cuatro soluciones cuando se resuelven simultáneamente dos de dichas ecuaciones. Las cuatro soluciones pueden ser todas reales o todas imaginarias. Cuando hay puntos de tangencia se obtienen dos pares de soluciones iguales. Se ilustra cada caso por medio de un ejemplo.

EJEMPLO 1 Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$x^2 + 4y^2 = 36 \qquad (1)$$
$$2x^2 - y^2 = 8 \qquad (2)$$

Solución: Se pueden resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) eliminando primero x^2 o y^2, sea por adición, sea por sustracción. Se escogerá para eliminarse y^2 y la solución completa se indica en lo que sigue

$$\begin{array}{llr}
x^2 + 4y^2 = 36 & & (1) \\
\underline{8x^2 - 4y^2 = 32} & \textit{ec (2)} \times \textit{(4)} & (3) \\
9x^2 \qquad = 68 & \textit{ec (1) + ec (3)} & (4) \\
x^2 = \frac{68}{9} & \textit{se ha resuelto (4) para } x^2 & \\
x = \pm\sqrt{\frac{68}{9}} & & (5) \\
= \pm\frac{2}{3}\sqrt{17} & &
\end{array}$$

* El centro de una elipse es la intersección de la mayor y de la menor de las cuerdas que puedan trazarse en ella. El centro de una hipérbola es el punto medio de la línea más corta que pueda trazarse de una rama a otra.

Por tanto, $x = \frac{2}{3}\sqrt{17}$ y $x = -\frac{2}{3}\sqrt{17}$. El cuadrado de cada uno de estos valores es $\frac{68}{9}$. Así, cuando se sustituye cualquiera de ellos en (1), se obtiene

$$\tfrac{68}{9} + 4y^2 = 36 \tag{6}$$

Resolviendo (6) para y, se tiene

$$\begin{aligned}
68 + 36y^2 &= 324 && \textit{se han eliminado las fracciones.}\\
36y^2 &= 324 - 68\\
36y^2 &= 256\\
y^2 &= \tfrac{256}{36}\\
&= \tfrac{64}{9}\\
y &= \pm\tfrac{8}{3} && \textit{resolviendo para } y
\end{aligned}$$

De este modo si x es igual a $\frac{2}{3}\sqrt{17}$ o a $-\frac{2}{3}\sqrt{17}$, y es igual a $\frac{8}{3}$ y $-\frac{8}{3}$. En consecuencia, las soluciones de las ecuaciones propuestas son

$$\begin{aligned}
x &= \tfrac{2}{3}\sqrt{17},\ y = \tfrac{8}{3}\\
x &= \tfrac{2}{3}\sqrt{17},\ y = -\tfrac{8}{3}\\
x &= -\tfrac{2}{3}\sqrt{17},\ y = \tfrac{8}{3}\\
x &= -\tfrac{2}{3}\sqrt{17},\ y = -\tfrac{8}{3}
\end{aligned}$$

Puesto que $\sqrt{17} = 4.12$ (aproximadamente) los valores anteriores con una aproximación de dos cifras decimales son

$$\begin{aligned}
x &= 2.75,\ y = 2.67\\
x &= 2.75,\ y = -2.67\\
x &= -2.75,\ y = 2.67\\
x &= -2.75,\ y = -2.67
\end{aligned}$$

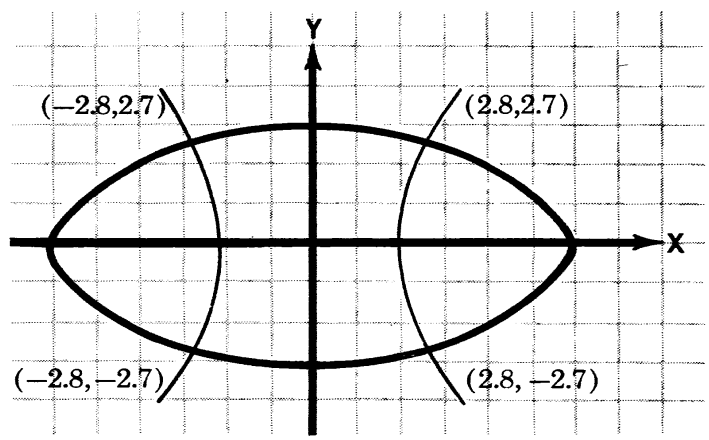


Figura 9.9

Si se aplica a las ec. (1) y (2) el método usual de construir gráficas, se obtiene la figura 9.9 en la que la elipse es la gráfica de (1) y la hipérbola la de (2). Estas dos curvas se intersectan en cuatro puntos cuyas coordenadas, aproximadamente, son (2.8, 2.7) (2.8, −2.7) (−2.8, −2.7) (−2.8, 2.7). Tales coordenadas concuerdan, aproximadamente, con las soluciones obtenidas anteriormente.

Este método se puede aplicar también a sistemas de ecuaciones que comprenden términos xy, o términos de primer grado, o ambos, siempre y cuando una de las incógnitas aparezcan sólo en un término de cada ecuación y que estos dos términos sean del mismo tipo.

EJEMPLO 2 Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$x^2 + 2xy - 2x = 15 \qquad (1)$$
$$xy - 3x = -3 \qquad (2)$$

Solución: Se eliminará el término xy y la solución se efectuará de acuerdo con los pasos siguientes.

$x^2 + 2xy - 2x = 15$		(1)
$2xy - 6x = -6$	*ec (2) × 2*	(3)
$x^2 \qquad + 4x = 21$	*ec (1) — ec (3)*	
$x^2 + 4x - 21 = 0$	*se ha transpuesto 21*	
$(x + 7)(x - 3) = 0$	*se ha factorizado*	
$x = -7$	*se ha igualado cada factor con cero*	
$x = 3$		
$(-7)y - 3(-7) = -3$	*se ha sustituido $x = -7$ en (2)*	
$-7y + 21 = -3$		
$-7y = -3 - 21$		
$-7y = -24$		
$y = 3\frac{3}{7}$		
$(3)y - 3(3) = -3$	*se ha sustituido $x = 3$ en (2)*	
$3y - 9 = -3$		
$3y = -3 + 9$		
$3y = 6$		
$y = 2$		

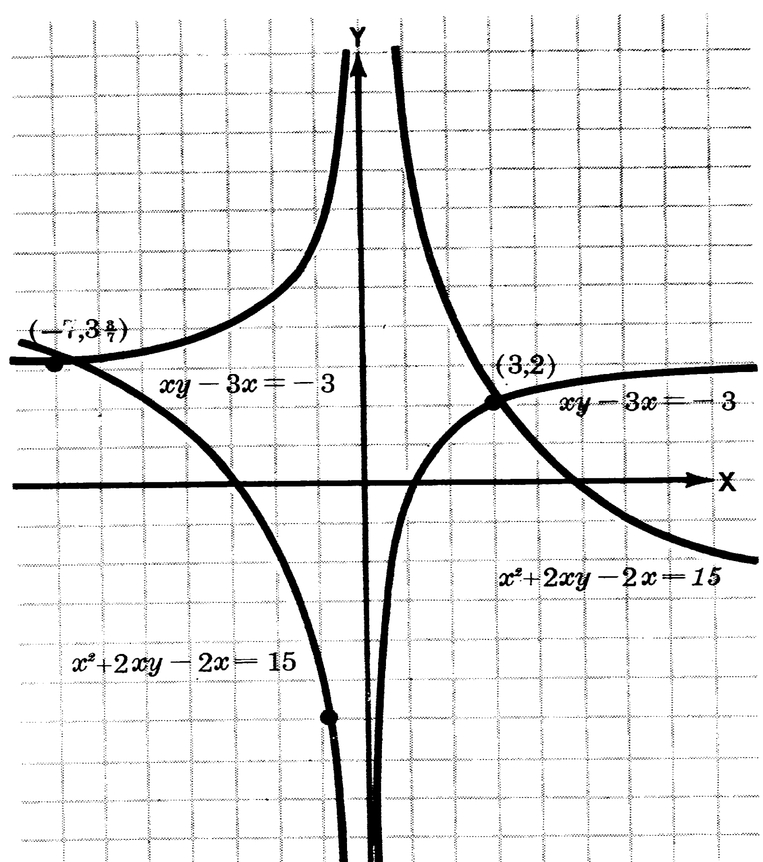


Figura 9.10

Por tanto, las soluciones son

$x = -7, y = 3\frac{3}{7}$
$x = 3, y = 2$

Las gráficas de las ecuaciones (1) y (2) y sus puntos de intersección se muestran en la figura 9.10.

EJERCICIO 42: ECUACIONES SIMULTANEAS DE SEGUNDO GRADO

Resuélvanse los siguientes pares de ecuaciones.

1: $x^2 + 3y^2 = 7$
$2x^2 - y^2 = 7$

2: $x^2 + 2y^2 = 3$
$3x^2 - y^2 = 2$

3: $x^2 + 2y^2 = 17$
$x^2 - 2y^2 = 1$

4: $3x^2 - 5y^2 = 3$
$x^2 - 3y^2 = -11$

5: $4x^2 + 3y^2 = 4$
$8x^2 + 5y^2 = 7$

6: $9x^2 + y^2 = 2$
$18x^2 + 3y^2 = 5$

7: $2x^2 + 4y^2 = 9$
$3x^2 + 8y^2 = 14$

8: $2x^2 + 9y^2 = 19$
$x^2 + 18y^2 = 11$

9: $2x^2 + 3y^2 = 7$
$3x^2 + 2y^2 = 8$

10: $2x^2 + 5y^2 = 17$
$3x^2 + 2y^2 = 9$

11: $5x^2 - 6y^2 = 3$
$3x^2 + 4y^2 = 17$

12: $2x^2 - 3y^2 = 1$
$4x^2 - 5y^2 = 5$

13: $x^2 - y^2 + 3x = 7$
$2x^2 + 3y^2 - 6x = 5$

14: $3x^2 + y^2 + 2y = 9$
$2x^2 + 3y^2 + 3y = 10$

15: $3x^2 - y^2 + 2y = 6$
$2x^2 + 3y^2 - 7y = 2$

16: $2x^2 + 3y^2 + 8x = 3$
$5x^2 + 2y^2 + 6x = 5$

17: $4x^2 + 3y^2 - 3y = 2$
$3x^2 - 2y^2 + 5y = -1$

18: $6x^2 + 5y^2 + 2x = 3$
$5x^2 + 3y^2 - 4x = -2$

19: $2x^2 + 3y^2 - 7y = 2$
$8x^2 + 5y^2 - 9y = 2$

20: $3x^2 - 4y^2 - 8x = 4$
$5x^2 + 2y^2 - 7x = 2$

21: $x^2 + 2xy - x = 4$
$2x^2 - xy + 3x = 3$

22: $x^2 + 3xy + 3x = -8$
$3x^2 + xy + x = 8$

23: $y^2 + xy + 2y = 6$
$2y^2 - xy + 2y = 1$

24: $3y^2 + 2xy - y = -2$
$2y^2 - xy + 2y = 2$

25: $x^2 + xy - 3x = -2$
$2x^2 - 3xy - x = -4$

26: $x^2 - 4xy + 2x = -2$
$3x^2 - 4xy - 2x = -6$

27: $y^2 - 2xy = -2$
$-3y^2 + 5xy + y = 6$

28: $y^2 - 4xy + 2y = -5$
$2y^2 - 3xy - y = -10$

29: $\frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{3}y^2 = 5$
$\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}y^2 = 1$

30: $\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{7}y^2 = 7$
$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{7}y^2 = 3$

31: $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 6$
$\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 6$

32: $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = 5$
$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = -3$

9.6 DOS ECUACIONES DEL TIPO $ax^2 + bxy + cy^2 = d$.

pasos para resolver las dos ecuaciones

La solución de dos ecuaciones del tipo $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ se puede obtener de acuerdo con los siguientes pasos.

1. Se elimina el término constante por adición o por sustracción. Se obtiene así una ecuación del tipo $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$.

2. Se resuelve esta última ecuación para y en términos de x usando algunos de los métodos del Cap. 8*.

Se obtienen por tanto dos soluciones de la forma $y = Kx$ y $y = Gx$, en donde K y G son constantes**.

* La operación es algunas veces más fácil si se resuelve x en términos de y. Si esto se efectúa debe intercambiarse x por y en los pasos 3, 4 y 5.

** Si $(Bx)^2 - 4ACx^2 = 0$, los dos valores de y serán iguales. Las constantes K y G pueden comprender radicales.

3. Se sustituye cada valor obtenido y en el paso anterior en cualquiera de las ecuaciones originales. Se obtienen así dos ecuaciones que contienen solamente a x.

4. Se resuelven para x cada una de estas ecuaciones y se obtienen dos soluciones para cada ecuación.

5. Se sustituye cada solución de la ecuación obtenida a partir de $y = Kx$ para x en $y = Kx$, obteniendo así los correspondientes valores de y.

De igual manera se sustituye cada solución de la ecuación obtenida a partir de $y = Gx$ para x en $y = Gx$.

6. Se ordenan las soluciones en la forma.

$$\begin{array}{ll} x = \quad , & y = \\ x = \quad , & y = \\ x = \quad , & y = \\ x = \quad , & y = \end{array}$$

EJEMPLO 1 Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$3x^2 + 4xy + y^2 = -8 \tag{1}$$
$$7x^2 + 2xy - y^2 = -28 \tag{2}$$

Solución.

Paso 1.

$$\begin{array}{rll} 21x^2 + 28xy + 7y^2 = -56 & \textit{ec. (1)} \times 7 & (3) \\ 14x^2 + \ \ 4xy - 2y^2 = -56 & \textit{ec. (2)} \times 2 & (4) \\ \hline 7x^2 + 24xy + 9y^2 = 0 & \textit{ec. (3)} - \textit{ec. (4)} & (5) \end{array}$$

Paso 2.

$$\begin{aligned} y &= \frac{-24x \pm \sqrt{576x^2 - 252x^2}}{18} && \textit{se ha resuelto (5) para y de acuerdo con la fórmula } a = 9,\ b = 24x,\ c = 7x^2 \\ &= \frac{-24x \pm \sqrt{324x^2}}{18} \\ &= \frac{-24x \pm 18x}{18} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{x}{3} \tag{6}$$

Por tanto

$$y = -\frac{7x}{3} \tag{7}$$

Pasos 3, 4 y 5.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x\left(-\frac{x}{3}\right) + \left(-\frac{x}{3}\right)^2 &= -8 && \textit{se ha sustituido (6) en (1)} \\ 3x^2 - \frac{4x^2}{3} + \frac{x^2}{9} &= -8 && \textit{se han efectuado las operaciones indicadas} \\ 27x^2 - 12x^2 + x^2 &= -72 && \textit{se han eliminado las fracciones} \\ 16x^2 &= -72 \\ x^2 &= -\tfrac{72}{16} = -\tfrac{18}{4} \end{aligned}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{18}{4}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

$$y = -\frac{1}{3}\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right) = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \textit{se ha sustituido } \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\,i \textit{ por } x \textit{ en (6)}$$

Por tanto, dos soluciones son

$$x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}i,\ y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$3x^2 + 4x\left(-\frac{7x}{3}\right) + \left(-\frac{7x}{3}\right)^2 = -8 \qquad \textit{se ha sustituido (7) en (1)}$$

$$3x^2 - \frac{28x^2}{3} + \frac{49x^2}{9} = -8 \qquad \textit{se han efectuado las operaciones indicadas}$$

$$27x^2 - 84x^2 + 49x^2 = -72$$

$$-8x^2 = -72$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$y = -\tfrac{7}{3}(\pm 3) = \mp 7 \qquad \textit{se ha sustituido } \pm 3 \textit{ por } x \textit{ en (7)}$$

Por tanto, dos soluciones adicionales son

$$x = \pm 3,\ y = \mp 7$$

Paso 6. Por tanto, las cuatro soluciones son

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2}i,\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}i,\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x = 3,\ y = -7$$

$$x = -3,\ y = 7$$

Si como ocurre en el par de ecuaciones

$$3x^2 - 2xy - y^2 = 0$$

$$2x^2 + xy - 2y^2 = 9$$

ninguna de las ecuaciones contiene término constante, el paso 1 es innecesario. Se aplica el paso 2 a la primera de estas ecuaciones y se procede con los otros.

Si el sistema de ecuaciones dado tiene raíces irracionales, probablemente se presentarán operaciones difíciles con radicales. El ejemplo 2 ilustra el método de trabajo en tales casos.

EJEMPLO 2 Si para resolver simultáneamente las ecuaciones se aplican los seis pasos anteriores

$$3x^2 + 3xy + 2y^2 = 100 \qquad (1)$$

$$x^2 - 4xy - y^2 = -40 \qquad (2)$$

Solución:

$$6x^2 + 6xy + 4y^2 = 200 \qquad \textit{ec. (1)} \times 2 \qquad (3)$$

$$5x^2 - 20xy - 5y^2 = -200 \qquad \textit{ec. (2)} \times 5 \qquad (4)$$

$$11x^2 - 14xy - y^2 = 0 \qquad \textit{ec. (3) + ec. (4)} \qquad (5)$$

$$y = \frac{14x \pm\sqrt{196x^2 + 44x^2}}{-2} \qquad \textit{se ha resuelto (5) para y según la fórmula}$$

$$= \frac{14x \pm \sqrt{240x^2}}{-2}$$
$$= \frac{14x \pm 4x\sqrt{15}}{-2}$$

Por tanto, las dos soluciones de (5) para y en términos de x son,

$$y = (-7 - 2\sqrt{15})x \qquad \textit{factorizando y cancelando} \tag{6}$$
$$y = (-7 + 2\sqrt{15})x \tag{7}$$

Sustituyendo ahora (6) en (2), se resuelve para x como sigue,

$$x^2 - 4x[(-7 - 2\sqrt{15})x] - [(-7 - 2\sqrt{15})x]^2 = -40$$
$$x^2 + x^2(28 + 8\sqrt{15}) - x^2(49 + 28\sqrt{15} + 60) = -40$$
$$x^2(1 + 28 - 49 - 60 + 8\sqrt{15} - 28\sqrt{15}) = -40$$
$$x^2(-80 - 20\sqrt{15}) = -40$$

$$x^2 = \frac{-40}{-80 - 20\sqrt{15}}$$
$$= \frac{2}{4 + \sqrt{15}} \qquad \textit{factorizando y cancelando}$$
$$= \frac{8 - 2\sqrt{15}}{16 - 15} \qquad \textit{racionalizando el denominador}$$
$$= 8 - 2\sqrt{15}$$
$$x = \pm\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$$
$$= \pm(\sqrt{5} - \sqrt{3})^*$$

Sustituyendo los valores de x en (6), se tiene

$$y = (-7 - 2\sqrt{15})[\pm(\sqrt{5} - \sqrt{3})]$$
$$= \pm(-7 - 2\sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$
$$= \pm(-7\sqrt{5} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{75} + 2\sqrt{45})$$
$$= \pm(-7\sqrt{5} + 7\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 6\sqrt{5})$$
$$= \pm(-\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$$

Por tanto dos soluciones de (1) y (2) son

$$x = \sqrt{5} - \sqrt{3},\ y = -\sqrt{5} - 3\sqrt{3}$$
$$x = -\sqrt{5} + \sqrt{3},\ y = \sqrt{5} + 3\sqrt{3}$$

Se pueden obtener dos soluciones más de (1) y (2) efectuando el mismo procedimiento en (7). Estas dos soluciones son

$$x = \sqrt{5} + \sqrt{3},\ y = -\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$$
$$x = -\sqrt{5} - \sqrt{3},\ y = \sqrt{5} - 3\sqrt{3}$$

EJERCICIO 43: ECUACIONES SIMULTANEAS DEL TIPO $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$

Resuélvanse los siguientes pares de ecuaciones:

1: $x^2 + 3xy - 2y^2 = 2$
$2x^2 + 5xy - 3y^2 = 4$

2: $3x^2 + xy - y^2 = 1$
$x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$

* Un radical de forma $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}} = \sqrt{u} \pm \sqrt{v}$, $a > 0$, $b > 0$, si $u + v = a$, y $uv = b$. También el radical $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}\,i} = \sqrt{u} \pm \sqrt{v}\,i$ si $u - v = a$ y $uv = b$.

3: $x^2 + 2xy - 5y^2 = -5$
$2x^2 - xy - 6y^2 = 4$

4: $3x^2 + 5xy - 3y^2 = -15$
$x^2 + xy + 3y^2 = 15$

5: $4x^2 + 3xy + 2y^2 =$ [illegible]
$2x^2 + 6xy + y^2 = -3$

6: $5x^2 - 2xy - 2y^2 = 1$
$7x^2 - 3xy - 3y^2 = 1$

7: $3x^2 - xy - 3y^2 = 4$
$5x^2 + xy - 2y^2 = 8$

8: $5x^2 - 4xy + y^2 = 65$
$x^2 - xy + y^2 = 13$

9: $4x^2 + 6xy - y^2 = 3$
$2x^2 - 5xy + 3y^2 = 1$

10: $9x^2 + 3xy - y^2 = 4$
$3x^2 + 2xy + y^2 = 8$

11: $16x^2 - 12xy + 3y^2 = 3$
$4x^2 - 3xy + 2y^2 = 2$

12: $2x^2 + xy + y^2 = 14$
$x^2 - xy + 4y^2 = 7$

13: $x^2 + 2xy + 4y^2 = 3$
$2x^2 + 3xy + 4y^2 = 6$

14: $5x^2 - 3xy - 9y^2 = 3$
$3x^2 + xy - 3y^2 = 1$

15: $x^2 - 6xy + 4y^2 = 1$
$x^2 - 10xy + 8y^2 = -4$

16: $2x^2 + 3xy + 9y^2 = 7$
$x^2 + xy - 3y^2 = 3$

17: $2x^2 - 5xy + y^2 = 2$
$x^2 - 7xy + 3y^2 = 3$

18: $3x^2 + 3xy - 2y^2 = 2$
$5x^2 + 4xy - 5y^2 = 4$

19: $x^2 - 5xy + y^2 = 5$
$2x^2 - 5xy - y^2 = 3$

20: $3x^2 + 2xy - y^2 = 5$
$x^2 - 3xy - 2y^2 = 1$

21: $x^2 - 2xy - 2y^2 = 4$
$3x^2 - 6xy + 2y^2 = 4$

22: $x^2 + 2xy + y^2 = 4$
$x^2 + 2xy - y^2 = 6$

23: $x^2 + 4xy - 2y^2 = -25$
$4x^2 + 4xy + y^2 = -25$

24: $3x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$
$3x^2 + 2xy - y^2 = -5$

25: $x^2 - 3xy + y^2 = 2$
$x^2 + xy - 8y^2 = 8$

26: $3x^2 + 4xy - 5y^2 = 6$
$5x^2 + 3xy - 7y^2 = 3$

27: $3x^2 + 4xy + 2y^2 = 5$
$5x^2 + 6xy + 3y^2 = 10$

28: $x^2 - 2xy + 3y^2 = 9$
$3x^2 - 5xy - y^2 = 3$

29: $x^2 + 2xy - 2y^2 = -3$
$3x^2 - 2xy + 2y^2 = 7$

30: $x^2 - 2xy + y^2 = 9$
$2x^2 - 2xy + 3y^2 = 30$

31: $4x^2 - 4xy + y^2 = 1$
$x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$

32: $3x^2 + 2xy + y^2 = 12$
$x^2 - 2xy + y^2 = 18$

9.7 PARES DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO QUE SE PUEDEN RESOLVER POR SUSTITUCION

El método de sustitución es útil para resolver ecuaciones simultáneas de segundo grado, bien cuando una de ellas se puede resolver fácilmente para una variable en términos de la otra o bien cuando después de haber eliminado uno o más términos por adición o por sustracción se obtiene una ecuación que se puede resolver con facilidad para una variable en términos de la otra. En los ejemplos 1 y 2 se ilustra el método para resolver, respectivamente, cada uno de esos casos.

EJEMPLO 1 Para resolver simultáneamente las ecuaciones

$$xy = 6 \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 = 13 \tag{2}$$

Solución. Se resuelve primero (1) para y en términos de x, y se obtiene.

$$y = \frac{6}{x} \tag{3}$$

Se sustituye ahora (3) en (2), y se tiene

$$x^2 + \frac{36}{x^2} = 13$$

Eliminando las fracciones, se tiene

$$x^4 + 36 = 13x^2$$

ecuación de cuarto grado pero de forma cuadrática, que se puede resolver como sigue:

$$\begin{aligned} x^4 - 13x^2 + 36 &= 0 \qquad \textit{se ha transpuesto } 13x^2 \\ (x^2 - 9)(x^2 - 4) &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ x &= \pm 3 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Se sustituye luego $x = \pm 3$ en (3), obteniéndose $y = 6/\pm 3 = \pm 2$. Análogamente, si $x = \pm 2$, $y = \pm 3$.
Por consiguiente, las soluciones son

$$\begin{aligned} &x = 3,\ y = 2 \\ &x = -3,\ y = -2 \\ &x = 2,\ y = 3 \\ &x = -2,\ y = -3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Resolver las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + x - 2y = 9 \tag{1}$$
$$x^2 + y^2 - 2x = 1 \tag{2}$$

Solución. Si en las ecuaciones anteriores se sustrae (2) de (1), se obtiene

$$3x - 2y = 8 \tag{3}$$

Ecuación de primer grado que se puede resolver para x en términos de y como sigue:

$$x = \frac{2y + 8}{3} \tag{4}$$

Luego, sustituyendo este valor de x en (2), se tiene

$$\left(\frac{2y + 8}{3}\right)^2 + y^2 - 2\left(\frac{2y + 8}{3}\right) = 1 \tag{5}$$

de la cual se puede obtener la solución completa efectuando las operaciones siguientes:

$$\frac{4y^2 + 32y + 64}{9} + y^2 - \frac{4y + 16}{3} = 1 \qquad \textit{se han efectuado las operaciones indicadas en (5)}$$

$$4y^2 + 32y + 64 + 9y^2 - 12y - 48 = 9 \qquad \textit{se han eliminado las fracciones}$$

$$13y^2 + 20y + 7 = 0 \qquad \textit{se han transpuesto y sumado términos}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 364}}{26} \qquad \textit{se ha resuelto para } y \\ &= \frac{-20 \pm \sqrt{36}}{26} \\ &= \frac{-20 \pm 6}{26} \\ &= -1 \text{ and } -\tfrac{7}{13} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (4), se tiene

$$x = \frac{-2+8}{3} = \frac{6}{3}$$
$$= 2 \quad \text{cuando } y = -1$$
y
$$x = \frac{-\frac{14}{13}+8}{3}$$
$$= \frac{-14+104}{39} = \frac{90}{39}$$
$$= \frac{30}{13} \quad \text{cuando } y = -\frac{7}{13}$$

Por tanto, las soluciones son

$$x = 2,\ y = -1$$
$$x = \tfrac{30}{13},\ y = -\tfrac{7}{13}$$

9.8 ECUACIONES SIMETRICAS

Una ecuación con dos variables es simétrica si la ecuación no se altera al intercambiar las variables entre si. Por ejemplo, si en la ecuación.

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + y = 2$$

se cambia x *por* y y y por x, se obtiene la misma ecuación. La solución, de dos de esas ecuaciones se simplifica si primero se sustituye x por $u + v$ y y por $u - v$ y se resuelven luego las ecuaciones para u y para v. A continuación se obtiene x mediante la suma de u más v y y mediante la sustracción de v de u. Este método se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO Resolver simultáneamente las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + 3xy + x + y = -4 \quad (1)$$
$$4xy + x + y = -23 \quad (2)$$

Solución. Sean

$$x = u + v \quad (3)$$
$$y = u - v \quad (4)$$

se sustituyen estos valores en (1) y se obtiene

$$u^2 + 2uv + v^2 + u^2 - 2uv + v^2 + 3u^2 - 3v^2 + u + v + u - v = -4$$

Sumando términos, se tiene

$$5u^2 - v^2 + 2u = -4$$

De manera análoga, se obtiene de (2)

$$4u^2 - 4v^2 + u + v + u - v = -23$$
$$4u^2 - 4v^2 + 2u = -23 \qquad \textit{agrupando términos}$$

Por tanto, se tienen dos ecuaciones con u y v

$$5u^2 - v^2 + 2u = -4 \quad (5)$$
$$4u^2 - 4v^2 + 2u = -23 \quad (6)$$

En cada una de estas ecuaciones aparece v sólo en un término y por consiguiente, puede eliminarse por adición. Luego se procede a obtener la solución completa del modo siguiente:

$$\begin{array}{rll} 20u^2 - 4v^2 + 8u = -16 & \textit{ec. (5)} \times 4 & (7) \\ 4u^2 - 4v^2 + 2u = -23 & \textit{ec. (6)} & (6) \\ \hline 16u^2 \qquad + 6u = 7 & \textit{ec. (7) — ec. (6)} & \\ 16u^2 + 6u - 7 = 0 & \textit{se ha transpuesto 7} & \end{array}$$

$$u = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 448}}{32} \qquad \textit{según la fórmula}$$

$$u = \frac{-6 \pm 22}{32} = \frac{16}{32} \text{ and } -\frac{28}{32}$$

Por tanto, $u = \frac{1}{2}$ and $u = -\frac{7}{8}$.

Sustituyendo en (6) $\frac{1}{2}$ en vez de u, se tiene

$$\begin{aligned} 4(\tfrac{1}{4}) - 4v^2 + 2(\tfrac{1}{2}) &= -23 \\ 1 - 4v^2 + 1 &= -23 \qquad \textit{se han efectuado las operaciones} \\ -4v^2 &= -25 \qquad \textit{indicadas en (5)} \\ v^2 &= \tfrac{25}{4} \\ v &= \pm\tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, las dos soluciones de (5) y (6), son

$$u = \tfrac{1}{2},\ v = \tfrac{5}{2}$$
$$u = \tfrac{1}{2},\ v = -\tfrac{5}{2}$$

Para el primer par de valores de u y de v se tiene a partir de las ecuaciones (3) y (4)

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} = 3,\ y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} = -2$$

y del segundo par se tiene

$$x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} = -2,\ y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2} = 3$$

Como siguiente paso se sustituye $u = -\frac{7}{8}$ en (6), y se tiene

$$4(\tfrac{49}{64}) - 4v^2 + 2(-\tfrac{7}{8}) = -23$$

Efectuando la multiplicación indicada, y eliminando fracciones, se tiene

$$196 - 256v^2 - 112 = -1472$$

Trasladando y sumando términos, se obtiene

$$-256v^2 = -1556$$

y

$$v^2 = \tfrac{1556}{256} = \tfrac{389}{64}$$
$$v = \pm\frac{\sqrt{389}}{8}$$

Por consiguiente, las otras dos soluciones de (5) y (6) son

$$u = -\frac{7}{8},\ v = \frac{\sqrt{389}}{8}$$

$$u = -\frac{7}{8},\ v = -\frac{\sqrt{389}}{8}$$

Al sustituir estos valores en (3) y (4), se tiene

$$x = -\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{389}}{8},\ y = -\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{389}}{8}$$

$$x = -\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{389}}{8},\ y = -\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{389}}{8}$$

Por tanto, las cuatro soluciones simultáneas de (1) y (2) son:

$x = 3,\ y = -2$
$x = -2,\ y = 3$
$x = \frac{1}{8}(-7 + \sqrt{389}),\ y = \frac{1}{8}(-7 - \sqrt{389})$
$x = \frac{1}{8}(-7 - \sqrt{389}),\ y = \frac{1}{8}(-7 + \sqrt{389})$

EJERCICIO 44: SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR SUSTITUCION

Resuélvanse los siguientes pares de ecuaciones

1: $x^2 - y = 3$
$x^2 + 2x - 3y = 5$

2: $2x^2 - y = 3$
$x^2 + 3x - 2y = 6$

3: $x^2 + y = 11$
$x^2 - x - 2y = 2$

4: $3x^2 + y = 0$
$x^2 + 2x + 2y = -3$

5: $y^2 - 2x = -2$
$y^2 + 3x - y = 3$

6: $y^2 - 5x = 6$
$y^2 - 6x - y = 8$

7: $y^2 - 3x = 7$
$2y^2 - x - 4y = 1$

8: $y^2 + 2x = 10$
$3y^2 - 3x + y = 1$

9: $xy = 2$
$x^2 - y^2 = 3$

10: $xy = -6$
$x^2 + y^2 = 13$

11: $xy = -1$
$x^2 + 2y^2 = -3$

12: $xy = 2$
$2x^2 + 3y^2 = -11$

13: $2x + xy = 3$
$x^2 + xy = 2$

14: $3x - xy = 4$
$x^2 + xy = 6$

15: $3y + xy = -6$
$y^2 - xy = 4$

16: $2y - 3xy = 2$
$y^2 + xy = 2$

17: $x + 2y + 2xy = 3$
$3x + 4y - 2xy = 4$

18: $3x + y + 6xy = 7$
$6x + 2y + 3xy = 8$

19: $9x + 2y + 3xy = 10$
$3x - y + 6xy = 5$

20: $2x + 3y - 2xy = 1$
$x + 5y - 4xy = -7$

21: $x^2 + y^2 - 5x + y = -4$
$x^2 + y^2 - 3x + 2y = 1$

22: $x^2 + y^2 + x + y = 2$
$2x^2 + 2y^2 + 3x - y = 8$

23: $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 1$
$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 13$

24: $x^2 + y^2 + 3x - 3y = 4$
$5x^2 + 5y^2 - 4x + 4y = 1$

25: $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 6$
$2x^2 + 2y^2 + 3x + 3y = 10$

26: $x^2 + y^2 + x + y = 12$
$3x^2 + 3y^2 + 2x + 2y = 32$

27: $x^2 + y^2 + x + y = 0$
$2x^2 + 2y^2 + 3x + 3y = -2$

28: $x^2 + y^2 + 3x + 3y = -4$
$5x^2 + 5y^2 + 7x + 7y = 12$

29: $x^2 + xy + y^2 - x - y = 1$
$x^2 - xy + y^2 - x - y = -1$

30: $xy + 2x + 2y = 21$
$2xy - x - y = 12$

31: $x^2 - 2xy + y^2 + 3x + 3y = -6$
$x^2 - 2xy + y^2 + x + y = -2$

32: $3xy - 2x - 2y = 4$
$xy - x - y = 0$

9.9 PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE ECUACIONES SIMULTANEAS DE SEGUNDO GRADO.

Existen muchas situaciones que conducen a pares de ecuaciones simultáneas de segundo grado. En el ejemplo siguiente se ilustra una de dichas situaciones.

EJEMPLO A y B, trabajando juntos, pueden hacer un trabajo en 60/11 de día. Si trabajan por separado, A necesita dos días más para hacer el trabajo que lo que necesita B.

Calcúlese el tiempo que necesita cada uno para hacer el trabajo por separado.

Solución. Si A necesita a días y B necesita b días, entonces

$$a - b = 2 \tag{1}$$

ya que A necesita dos días más que B. Además, $1/a$ corresponde a la parte del trabajo que A puede hacer en un día, $1/b$ es la parte de trabajo que B puede hacer en un día. Por tanto, $1/a + 1/b$ representa la parte del trabajo que los dos pueden hacer en un día. Según los datos, 11/60 es también la parte del trabajo que los dos pueden hacer en un día, ya que necesitan 60/11 de día para hacer el trabajo juntos. Por tanto,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{11}{60} \tag{2}$$

Ahora debe resolverse el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2). Si se despeja a de (1) y se sustituye el resultado en (2), se tiene

$$\frac{1}{b+2} + \frac{1}{b} = \frac{11}{60}$$

A continuación se eliminan los denominadores, obteniéndose

$$\begin{aligned} 60b + 60(b+2) &= 11b(b+2) && \textit{ya que el M.G.M. es } 60b(b+2). \\ 60b + 60b + 120 &= 11b^2 + 22b && \textit{Se han eliminado los paréntesis} \\ 11b^2 - 98b - 120 &= 0 && \textit{Se han combinado términos} \\ (b-10)(11b+12) &= 0 && \textit{Se ha factorizado} \end{aligned}$$

Por tanto, $b = 10, -\frac{12}{11}$. Es decir, B requiere diez días para hacer el trabajo, eliminándose la otra posibilidad por corresponder a un número negativo. Finalmente, A requiere doce días para hacer el trabajo, es decir, dos días más que el tiempo requerido por B.

EJERCICIO 45: PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1: Encuéntrense dos números cuya suma sea 61 y cuyo producto sea 658.

2: Encuéntrense dos números cuyo producto sea 242 y cuyo cociente sea 12.5.

3: Encuéntrense dos números positivos cuyo producto y diferencia sean 756 y 15, respectivamente.

4: Encuéntrense dos números positivos tales que su producto sea 88 y la suma de sus cuadrados sea 185.

5: Encuéntrense las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es de 168 metros cuadrados y que su diagonal tiene una longitud de 25 metros.

6: Encuéntrense las dimensiones de un rectángulo si su diagonal mide 17 metros y la diferencia de sus lados es de 7 metros.

7: Calcúlense las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 13 centímetros y cuyo perímetro es 34 centímetros.

8: El área de un triángulo rectángulo es 60 metros cuadrados y su perímetro es 46 metros. Encuéntrense su base y su altura.

9: Dos números no nulos tienen su producto, su suma y la diferencia de sus cuadrados iguales entre sí. Encuéntrense dichos números.

10: Un jardín rectangular tiene un área de 150 metros cuadrados y está rodeado por una acera de concreto de 1.5 metros de ancho. Encuéntrense las dimensiones del jardín sabiendo que el área de la acera es de 80 metros cuadrados.

11: Se construye una caja con un volumen de 1440 centímetros cúbicos utilizando una hoja metálica rectangular en la que se cortan cuadrados de 3 centímetros de lado en las esquinas, doblando luego los lados. Encuéntrense las dimensiones de la hoja metálica si su área es 792 centímetros cuadrados.
12: De un punto de la hipotenusa se bajan perpendiculares a cada uno de los catetos de un triángulo rectángulo, obteniéndose de este modo un rectángulo. Encuéntrense las dimensiones del rectángulo si su área es 105 y las longitudes de los catetos son 14 y 30.
13: El área combinada de dos círculos tangentes externamente es 34 π centímetros cuadrados. Encuéntrense el radio de cada círculo si entre sus centros hay una separación de 8 centímetros.
14: La diferencia de las áreas de dos círculos tangentes internamente es 40 π centímetros cuadrados. Encuéntrense el radio de cada círculo si la separación de sus centros es 4 centímetros.
15: Una ventana tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Encuéntrense las dimensiones del rectángulo si el perímetro y el área de la ventana son $20\frac{2}{7}$ y $26\frac{2}{7}$ metros y metros cuadrados, respectivamente. Usese π como $\frac{22}{7}$.
16: A y B pueden pintar juntos un granero en $1\frac{5}{7}$ de día. Calcúlese cuánto tiempo requiere cada uno para hacer el trabajo separadamente sabiendo que A requiere un día más que B.
17: A y B pueden hacer un trabajo juntos en doce días. Calcúlese cuánto requiere cada uno para hacer el trabajo separadamente, sabiendo que A requiere 1.5 veces más tiempo que B.
18: La suma de los cuadrados de los dos dígitos de un número es 34. Encuéntrese el número si el dígito de las unidades es dos unidades mayor que el de las decenas.
19: La diferencia de los cuadrados de dos dígitos de un número es 24 y la diferencia de los dígitos es 2. Encuéntrese el número sabiendo que al invertir el orden de los dígitos el número decrece.
20: En el trapecio $ABCD$, las bases AB y DC son perpendiculares a AD; además, DC es 8 centímetros mayor que BC y 4 centímetros menor que AB. Encuéntrense las longitudes de los lados si el perímetro es de 38 centímetros.
21: El aeroplano A sale del aeropuerto P y quince minutos más tarde el aeroplano B sale también de P hasta alcanzar a A, volviendo luego a P. Cuando B regresa al aeropuerto, A está todavía a una distancia de 990 millas. Encuéntrese la velocidad de cada aeroplano, si la velocidad de uno de ellos es 1.2 veces la del otro.
22: La ciudad de San Antonio está a 768 kilómetros al oeste de Nueva Orleáns. Dos aviones hacen un viaje redondo entre las dos ciudades en siete y diez horas, respectivamente. Durante todo el viaje estuvo soplando viento del Este con velocidad constante. Encuéntrese la velocidad relativa al aire de cada avión, sabiendo que la del segundo avión fue 5/7 de la del primero.
23: Un comerciante obtuvo un ingreso de \$690 000 por la venta de receptores de televisión en 1955. En 1960 vendió 1.5 veces más receptores que en 1955, pero a un precio de \$650 menos por receptor. Su ingreso en 1960 fue \$150 000 mayor que el de 1955. Calcúlese cuántos receptores vendió en 1960 y cuál fue el precio por receptor en 1955.
24: Una persona compró un lote de acciones por \$11 000. Después de un año recibió como dividendo \$2.20 por acción y 20 acciones adicionales. Entonces vendió las acciones ganando en cada una \$2.00 sobre el precio de compra. Si la utilidad total fue de \$1 980, encuéntrese el número de acciones y el precio de cada una en la compra inicial.

Exprésese cada uno de los siguientes radicales como la suma de dos radicales, después de consultar la nota del Pr. 9.6.

25: $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ 26: $\sqrt{13 + 2\sqrt{42}}$

27: $\sqrt{11 + 2\sqrt{30}}$ 28: $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}}$

29: $\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$ 30: $\sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$

31: $\sqrt{12 + 4\sqrt{5}}$ 32: $\sqrt{14 + 4\sqrt{6}}$

10 RAZONES, PROPORCIONES Y VARIACIONES

EN EL PRESENTE CAPÍTULO se discutirá un aspecto que sólo se había tratado indirectamente, a saber: la relación entre el numerador el denominador de una fracción cualquiera. Por ejemplo, la fracción $\frac{2}{4}$ *expresa* que 2 está dividido entre 4 e *implica* que 2 guarda una cierta relación con respecto a 4. Esa implicación es de importancia en la igualdad $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, que *expresa* que las dos fracciones son iguales e *implica* una relación entre 2 y 4, que es la misma que la relación entre 1 y 2. Como generalización se puede escribir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, que expresa la *interrelación* de los cuatro números, a, b, c y d. Como se verá, la teoría matemática de esta interrelación, llamada razones, proporciones y variaciones, tiene una aplicación amplia en las ciencias físicas y en las técnicas relacionadas con ellas. En sus aspectos más simples las razones, proporciones y variaciones son de ocurrencia frecuente en la vida diaria.

10.1 RAZONES

La razón de un número a a un segundo número b, distinto de cero, es el cociente que se obtiene al dividir a entre b. De esta manera la razón de a a b es $\frac{a}{b}$, o, como se escribe frecuentemente, $a{:}b$, en donde los dos puntos indican división. Muchas de las dificultades que se encuentran

en el estudio de las razones se evitarán recordando que las expresiones $\frac{a}{b}$, a/b, $a{:}b$ son equivalentes y son, colectivamente, expresiones simbólicas de la razón de a a b.

Si a y b son magnitudes de la misma especie, se deben expresar en la misma unidad para que a/b tenga sentido. Esto es, para obtener la razón de 3 cms. a 2 dms., se convierten 2 dms. en 20 cms., y la razón deseada es $\frac{2}{20}$. En tales casos la razón a/b representa un número abstracto y es la respuesta a la pregunta *¿qué múltiplo o fracción de b es el número a?* Aun cuando frecuentemente de una razón se piensa como de una operación que implica cantidades de la misma especie, también frecuentemente se tienen razones de magnitudes de naturaleza diferente. Por ejemplo, en Física, la velocidad v de un cuerpo se expresa como

$$v = \frac{s}{t}$$

El valor de esta razón es el número de metros o la parte de s, que un cuerpo recorre en un segundo. Igualmente, el precio P por hectárea de terreno es igual a la razón del costo total, C al número de hectáreas, n.

$$P = \frac{C}{n}$$

Esto es, el valor de esa razón es la porción de C que corresponde a una hectárea.

Entonces, si a y b no representan magnitudes de la misma especie, la razón $a{:}b$ representa la porción de a que corresponde a una unidad de b.

10.2 PROPORCIONES

Una de las aplicaciones más frecuentes de las razones, se presenta en aquellos casos que implican números que pueden agruparse en pares y cuyas razones son iguales entre sí. Por ejemplo, si un automóvil viaja a una velocidad doble de la de otro, recorrerá en igual tiempo una distancia doble. Esto es, si S y s son las velocidades medias de los dos automóviles y D y d las distancias respectivas que recorren, se tiene

$$\frac{S}{s} = \frac{D}{d}$$

cualquier ecuación de ese tipo se llama *proporción* y sirve para ilustrar la definición siguiente:

proporción

Una *proporción* es la proposición de que dos razones son iguales.
Las proporciones se escriben de dos modos: (*)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{10.1}$$

* En otros libros aparecen como $a{:}b{::}c{:}d$.

$$a:b = c:d \tag{10.2}$$

medios y extremos

La ecuación (10.2) se lee *a es a b como c es a d;* tanto en (1) como en (2) los términos b y c se llaman *medios* y a y d *extremos.* También se emplea para a y c la palabra *antecedentes* y para b y d la palabra *consecuentes.*

Debido a que muchas relaciones importantes, tanto en matemáticas como en otras ciencias, se establecen como proporciones, el conocimiento de ellas resulta de gran utilidad al trabajar en el campo de la técnica. A continuación se presentarán algunas propiedades que facilitan la manipulación de las proporciones.

Si se multiplica cada miembro de (1) por bd, se obtiene

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$$

Luego, se divide cada miembro de la fracción de la izquierda entre b, y cada miembro de la fracción de la derecha entre d. Se tiene

$$\blacktriangleright\ ad = cb \tag{10.3}$$

producto de medios y de extremos.

De esta manera se obtiene la importante propiedad que se escribe a continuación.

1. *En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.*

EJEMPLO 1 Encontrar x, si $3:4 = x:12$.

Solución. Aplicando la propiedad 1, se tiene

$$4x = 36$$
$$x = 9$$

Por tanto,

Si se divide cada miembro de (10.3) entre cd, se tiene

$$\frac{ad}{cd} = \frac{cb}{cd}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \textit{efectuado las operaciones indicadas}$$

Además, dividiendo cada miembro de (10.3) entre ac, se obtiene

$$\frac{ad}{ac} = \frac{cb}{ac}$$

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

alternación e inversión

En consecuencia, se tiene la siguiente propiedad:

2. *Si $a/b = c/d$, entonces $a/c = b/d$, y también $b/a = d/c$.*

Se dice que la segunda proporción se obtiene de la primera por *alternación* y que la tercera se obtiene, también de la primera, por *inversión.*

EJEMPLO 2 Si $a/b = c/d$ y $n/d = m/c$, demostrar que $a/b = m/n$.

Solución. Ya que $n/d = m/c$, se tiene

$$\frac{n}{m} = \frac{d}{c} \qquad \textit{por alternación.}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{c}{d} \qquad \textit{por inversión}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \qquad \textit{puesto que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Se pueden derivar dos propiedades más de las proporciones a partir de (10.1), si primero se suma 1 a cada miembro de (10.1) y se simplifica y luego se suma —1 a cada miembro de (10.1) y se simplifica. Para el primer caso, se tiene

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$

Por consiguiente,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \tag{10.4}$$

Para el segundo caso se tiene

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

Simplificando, se tiene

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \tag{10.5}$$

Ahora, dividiendo los correspondientes miembros de (10.4) entre los de (10.5) se obtiene

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

En consecuencia, se puede escribir la siguiente propiedad:

adición y sustracción

3. *Si* $a/b = c/d$, *entonces* $(a+b)/b = (c+d)/d$, $(a-b)/b = (c-d)/d$, y $(a+b)/(a-b) = (c+d)/(c-d)$.

En la propiedad 3, se dice que la segunda y la tercera proporciones se derivaron de la primera por adición y sustracción, respectivamente. De la cuarta se dice que se derivó de la primera por adición y sustración.

EJEMPLO 3 Si $a/b = c/d$, $a + b = 60$, $c = 3$ y $d = 2$, encontrar a y b.

Solución. Si $a/b = c/d$, se tiene por adición.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Por tanto, al sustituir los valores dados para a, b, c y d, se tiene

$$\frac{60}{b} = \frac{3+2}{2}$$

$$\frac{60}{b} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} 5b &= 120 && \textit{de la propiedad 1} \\ b &= 24 \end{aligned}$$

Además, puesto que

$a + b = 60$

se concluye que

$a = 36$

media proporcional Si en cualquier proporción los dos medios son iguales, se tiene entonces la llamada *proporción media*. Así, si en (10.1) $c = b$, entonces $a/b = b/d$ o bien $a:b = b:d$. En este caso b se llama *media proporcional* de a y de d, (o entre a y d), y d se llama *tercera proporcional* de a y de b. Sin embargo, cuando en (10.1) $b \neq c$ se llama *cuarta proporcional* de a, b y c.

EJEMPLO 4 Encontrar la media proporcional de 12 y de 3.

Solución. Sea x la media proporcional que se busca, entonces

$$\begin{aligned} 12:x &= x:3 \\ x^2 &= 36 && \textit{según la propiedad 1} \\ x &= \pm 6 && \textit{resolviendo para } x \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encontrar la tercera proporcional de 16 y 12.

Solución. Sea x la tercera proporcional que se busca, entonces

$$\begin{aligned} 16:12 &= 12:x \\ 16x &= 144 && \textit{según la propiedad 1} \\ x &= 9 && \textit{resolviendo para } x \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Encontrar x, si 7 es la cuarta proporcional de 35, 28 y x.

Solución. De acuerdo con la definición, se tiene

$$\begin{aligned} 35:28 &= x:7 && \textit{por definición} \\ 28x &= 245 && \textit{según la propiedad 1} \\ x &= \tfrac{245}{28} = \tfrac{35}{4} && \textit{resolviendo para } x \end{aligned}$$

Existe un simbolismo usado frecuentemente que se asemeja a una proporción, pero que se emplea para indicar que tres razones son iguales entre sí. Por ejemplo

$$a:b:c = x:y:z \tag{10.6}$$

que en realidad es una manera abreviada de escribir

$$a:b = x:y \qquad a:c = x:z \qquad b:c = y:z \tag{10.7}$$

o bien que

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \tag{10.8}$$

Si en (10.8) se hace igual a una constante k, cada una de las razones, se tiene

$$a = kx \qquad b = ky \qquad \text{y} \qquad c = kz \tag{10.9}$$

De (10.9) se sigue que

$$a + b + c = k(x + y + z)$$

Por tanto,

$$\frac{a + b + c}{x + y + z} = k$$

o bien

$$\frac{a + b + c}{x + y + z} = \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \tag{10.10}$$

EJEMPLO 7 Si los lados de dos triángulos son A, B, C y a, b, c, respectivamente y si

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \tag{1}$$

encontrar A, B y C, si el perímetro del primer triángulo es 176 y si $a = 5$, $b = 18$ y $c = 21$.

Solución. De la proposición dada

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

$$\frac{A + B + C}{a + b + c} = \frac{A}{a} \qquad \textit{por ec. (10.10)}$$

Se sustituye el valor del perímetro en vez de $A + B + C$ y los valores dados para a, b y c. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\frac{176}{5 + 18 + 21} &= \frac{A}{5} \\
\frac{176}{44} &= \frac{A}{5} \\
44A &= 880 && \textit{por la propiedad de medios y extremos} \\
A &= 20 \\
\frac{A}{a} &= \frac{B}{b} && \textit{por ec. (1)} \\
\frac{20}{5} &= \frac{B}{18} && \textit{sustituyendo} \\
5B &= 360 && \textit{por la propiedad de medios y extremos} \\
B &= 72 && \textit{resolviendo para } B \\
A + B + C &= 176 \\
C &= 176 - (A + B) && \textit{transponiendo y resolviendo para } C \\
&= 176 - 92 \\
&= 84
\end{aligned}$$

EJERCICIO 46: RAZONES Y PROPORCIONES

En los problmas 1 a 8 exprésense como fracciones las siguientes razones y luego simplifíquense.

1: 5 metros a 8 centímetros.
2: $2\frac{1}{3}$ kilómetros a 2 decímetros.
3: $3\frac{3}{4}$ centímetros a 6 milímetros.
4: $2\frac{1}{4}$ kilómetros a 120 centímetros.
5: 2 semanas a 5 días.
6: $\frac{3}{4}$ de día a 20 minutos.
7: \$10.00 a 5 centavos.
8: \$2.40 a 30 centavos.

En los problemas 9 a 12 encuéntrese el valor de la razón indicada e interprétese el resultado.

9: \$10.00 a 8 horas.
10: \$55.00 a 5 kilogramos de carne.
11: 56 galletas a 7 niños.
12: 340 kilómetros a 50 litros de gasolina.

13: La pendiente de un techo es la distancia que el techo asciende por unidad horizontal de longitud. Encuéntrese la pendiente de un techo si una de las vigas que lo sostienen tiene 17 metros de largo y uno de sus extremos está 3 metros más arriba que el otro.
14: La pendiente de una carretera es la distancia que ésta asciende por unidad de longitud sobre su superficie. Encuéntrese la pendiente media de una carretera que sube 60 metros en 2 kilómetros.
15: El calor de fusión de un material sólido es el número de calorías necesario para fundir un gramo de dicho material. Encuéntrese el calor de fusión del hielo si 2000 calorías funden 25 gramos de hielo.
16: La densidad de un cuerpo se define como la razón de la masa del cuerpo a su volumen. Si la masa de 25 centímetros cúbicos de mercurio es 340 gramos, encuéntrese la densidad del mercurio.

Mediante el uso de la propiedad 1, encuéntrese el valor de x en los problemas 17 a 24.

17: $2:3 = x:7$
18: $x:6 = 7:18$
19: $6:3x = 24:36$
20: $4:5 = 3:x$
21: $(2 + x):(3 - x) = 4:1$
22: $(1 + x):(1 - x) = 3:4$
23: $(x - 2):2 = 5:(x + 1)$
24: $5:(3x + 1) = (x - 1):3$

Encuéntrese la media proporcional para los pares de números de los problemas 25 a 28.

25: 8,32 26: 6,96 27: 2,8 28: 3,12

Encuéntrense la tercera proporcional para los pares de números de los problemas 29 a 32.

29: 3,7 30: 5,9 31: 2,6 32: 3,12

Encuéntrense la cuarta proporcional para las triadas de números de los problemas 33 a 36.

33: 2,7,4 34: 5,3,20 35: 4,5,8 36: 3,6,4

37: si $x:y = 5:3$ y $x - y = 6$, encontrar x y y.
38: si $x:6 = y:2$ y $x - y = 12$, encontrar x y y.
39: si $x:y = 4:5$ y $x + y = 18$, encontrar x y y.
40: si $x:y = 1:3$ y $x + y = 16$, encontrar x y y.

41: Si el ruido de una explosión se oye a 1452 metros en cuatro segundos, calcúlese a qué distancia está una persona que oye la explosión seis segundos después de que ésta ocurre.

42: Si una onda producida por una piedra que cae en un lago avanza 4 metros en cuatro segundos. ¿Cuánto avanzará en siete segundos?

43: Si un mapa se traza con la escala de $\frac{1}{2}$ centímetro a 15 kilómetros, ¿qué distancia representan 7 centímetros?

44: Si un aeroplano vuela 360 millas en hora y media, ¿cuánto volará en dos horas y cuarenta minutos?

10.3 VARIACIONES

Es frecuente estudiar situaciones en las que aparecen dos cantidades que pueden variar, pero cuya razón no cambia. Por ejemplo, si el precio del algodón no cambia durante un día, entonces la razón del precio de una paca al peso de ésta es el mismo en cualquier momento de ese día. Dicha razón representa el precio por kilogramo.

En tales casos, se dice que la primera cantidad varía al variar la segunda, o, dicho más precisamente, varía proporcionalmente directa con la segunda. Así, sí a varía directa y proporcionalmente con b, entonces la razón a/b es igual a una constante. Si k representa esa constante, entonces $a/b = k$ o bien $a = kb$.

Muchas leyes científicas que tratan de relaciones entre cantidades físicas emplean la terminología anterior. A continuación se presentarán dos de esas leyes y se indicará cómo se expresan por medio de ecuaciones.

La ley de Gay Lussac-Charles establece que si la presión es constante, el volumen de una masa gaseosa es directamente proporcional a la temperatura absoluta. Si V representa el volumen y T la temperatura, entonces la ley estipula que $V = kT$, en donde k es una constante.

La ley de Boyle-Mariotte establece que si la temperatura es constante, el volumen de una masa gaseosa es inversamente proporcional a la presión que ejerce sobre ella. Por tanto, si V es el volumen p es la presión, V es inversamente proporcional a p. Esto significa que en todo momento V es igual al producto de una constante k por $1/p$, o sea $V = k(1/p)$.

Los ejemplos anteriores ilustran dos de los tres tipos de variaciones proporcionales que se definen a continuación.

variación directa

Variación directa. Si una cantidad *varía directa y proporcionalmente* con otra, entonces la primera es igual al producto de una constante por la segunda.

variación inversa

Variación inversa. Si una cantidad *varía inversa y proporcionalmente* con otra, entonces la primera es igual al producto de una constante por el recíproco* de la segunda.

variación conjunta

Variación conjunta. Si una cantidad *varía conjunta y proporcionalmente* con dos o más cantidades, entonces la primera es igual al producto de una constante por el producto de las otras.

constante de proporcionalidad

En las definiciones anteriores, la constante se conoce como *constante de proporcionalidad.*

Frecuentemente se presentan situaciones que son combinaciones de los tipos anteriores. Por ejemplo, la ley de la gravitación de Newton establece que la fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros de gravedad. Si G, M, m y d representan, respectivamente, la fuerza de atracción

*Dos números son recíprocos si su producto es 1; de aquí que el recíproco de n sea $1/n$ ya que $n(1/n) = 1$.

gravitatoria, las dos masas y la distancia, entonces la ley establece que

$$G = k\left(\frac{Mm}{d^2}\right)$$

EJEMPLO 1 La presión en el fondo de una piscina varía directamente con la altura del agua. Si la presión es 1 kg./cm.^{2} cuando la columna de agua tiene una altura de 10 mts., encontrar la presión sobre el fondo de una piscina cuya altura de agua es 1.35 mts.

Solución. Si P representa la presión y h la altura del agua y como P varía directamente proporcional a h, entonces

$$P = kh \tag{1}$$

Ahora, cuando $h = 10$ mts., $P = 1$ kg/cm^2, luego

$$1 = 10\ k$$

Por tanto

$$k = \frac{1}{10} = 0.1$$

De este modo

$$P = 0.1\ h \tag{2}$$

Luego, si $h = 1.35$ mts., entonces

$$P = (0.1)\ 1.35 = 0.135\ \text{kg/cm}^2$$

EJEMPLO 2 La cantidad de carbón que consume un barco que viaja con velocidad uniforme es directamente proporcional a la distancia recorrida y al cuadrado de la velocidad. Si el barco emplea 45 tons. de carbón para recorrer 128 kms con velocidad de 24 kms/hr, ¿cuántas toneladas empleará si recorre 192 kms, con velocidad de 32 kms/hr.?

Solución. Se hace

$T =$ número de toneladas usada.
$s =$ distancia en kms.
$v =$ velocidad en kms/hora

entonces,

$T = k(sv^2)$ *según la definición de variación conjunta.* (1)

Por tanto, para $T = 45$, $s = 128$, $v = 24$, se tiene

$$45 = k\ (128)\ (24)^2$$

Por tanto,

$k = \dfrac{45}{(128)(24)^2} = \dfrac{5}{8192}$ *resolviendo para* (k)

Sustituyendo este valor de k en (1), se tiene

$$T = \tfrac{5}{8192}\,(sv^2)$$

Ahora, puesto que $s = 192$ y $v = 32$, se concluye que

$$T = \frac{5}{8192}(192)(32^2)$$
$$= 120 \text{ tons}$$

EJEMPLO 3 Si el volumen de una masa gaseosa a cierta temperatura es 56 cm^3 a la presión de 18 kgs., calcular el volumen cuando la presión es 16 kgs.

Solución: La ley de Boyle-Mariotte establece que el volumen es inversamente proporcional a la presión. Por tanto, si se hace

V = volumen

y

p = presión

se tiene

$$V = k\left(\frac{1}{p}\right) \qquad \textit{según la definición de variación inversa} \qquad (1)$$

Luego, si $V = 56$ cuando $p = 18$, se tiene

$$56 = k\left(\frac{1}{18}\right)$$

Por consiguiente,

$$k = (56)(18) \qquad \textit{resolviendo para } k$$
$$= 1\,008$$

Sustituyendo ahora este valor de k en (2), se tiene

$$V = 1\,008\left(\frac{1}{p}\right) \qquad \textit{sustituyendo el valor de } k \textit{ en (1)}$$

Por tanto, cuando $p = 16$, se tiene

$$V = 1008\left(\frac{1}{16}\right) = 63 \text{ cm}^3.$$

EJEMPLO 4 El límite de ruptura de una viga horizontal apoyada en ambos extremos es directamente proporcional tanto al ancho de la viga como al cuadrado de su peralte e inversamente proporcional a la distancia entre los puntos de apoyo. Si una viga de 4 por 6 cms de sección y 15 mts. de largo, puede soportar una carga de 1470 kgs., calcular el límite de ruptura para la viga si ésta se coloca tomando como base el lado de 6 cms.

Solución. Se hace

c = la carga
a = el ancho
p = el peralte
l = la distancia entre los puntos de apoyo

se tiene

$$c = k\left(\frac{ap^2}{l}\right)$$

Cuando la viga está en su posición normal, $a = 4$, $p = 6$, $1 = 15$, y $c = 1\,470$. Sustituyendo estos valores en (1) se tiene

$$1470 = k\left[\frac{(4)(6^2)}{15}\right]$$

Por tanto,

$$22{,}050 = 144k$$

y

$$\begin{aligned} k &= \tfrac{22050}{144} \\ &= \tfrac{1225}{8} \end{aligned}$$

Luego, para la viga volteada de su posición original, $a = 6$, $p = 4$, $1 = 15$. Sustituyendo en (1) estos valores y el valor de k, se tiene

$$\begin{aligned} L &= \left[\frac{1225}{8}\right]\left[\frac{(6)(4^2)}{15}\right] \\ &= \left[\frac{1225}{8}\right]\left[\frac{(6)(16)}{15}\right] \\ &= 980 \text{ kgs.} \end{aligned}$$

Los problemas que se pueden resolver mediante el método ilustrado en los ejemplos anteriores, constan de tres elementos. Primero, una ley relativa al problema, a partir de la cual se puede escribir la ecuación de la variación. Segundo, un grupo de datos que, permite encontrar el valor de la constante de proporcionalidad. Tercero, otro grupo de datos que, con excepción de uno, son cantidades conocidas. Empleando la información contenida en las dos primeras partes, se puede encontrar esta cantidad desconocida.

EJERCICIO 47: VARIACIONES

1: Exprésense como ecuaciones las siguientes proposiciones: (*a*) m, es directamente proporcional a n; (*b*) s, es inversamente proporcional a t; (*c*) r, es conjuntamente proporcional a e y a m; (*d*) w, es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de y.

2: Si y es directamente proporcional a x y es igual a 2 cuando $x = 3$, encuéntrese el valor de y cuando $x = 7$.

3: Si w es directamente proporcional a x y es igual a 15 cuando $x = 5$, encuéntrese el valor de w cuando $x = 2$.

4: Dado que y es inversamente proporcional a x y que $y = 6$ cuando $x = 8$, encuéntrese el valor de y cuando $x = 12$.

5: Si w es inversamente proporcional a y y es igual a 4 cuando $y = 5$, encuéntrese el valor de w si $y = 2$.

6: Si y es conjuntamente proporcional a x y a w y es igual a 36 cuando $x = 4$ y $w = 3$, encuéntrese el valor de y si $x = 6$ y $w = 5$.

7: Dado que x es conjuntamente proporcional a w y a y y que $x = 40$ cuando $w = 2$ y $y = 5$, encuéntrese el valor de x si $w = 3$ y $y = 6$.

8: Dado que w es directamente proporcional al producto de $x\,y$ e inversamente proporcional al cuadrado z y que $w = 14$ cuando $x = 4$, $y = 28$ y $z = 4$, encuéntrese el valor de w cuando $x = 6$, $y = 9$ y $z = 3$.

9: El volumen de una pirámide regular es conjuntamente proporcional a su altura y al área de su base. Si el volumen de una pirámide regular de 4 centímetros de altura y de 6 centímetros cuadrados de base es 8 centímetros cúbicos,

encuéntrese el volumen de otra pirámide de 5 centímetros de altura y de 9 centímetros cuadrados de base.

10: En un instante dado la longitud de una sombra es directamente proporcional a la altura del objeto que la produce. Si un anuncio de dos metros de altura produce una sombra de 0.8 metros de largo, calcúlese la altura de un árbol cuya sombra es de 4 metros.

11: El interés simple producido en un tiempo dado es conjuntamente proporcional al capital y a la tasa de interés. Si \$700 produjeron \$105 al 5%, encuéntrese el interés producido por \$900 al $4\frac{1}{2}$ en el mismo tiempo.

12: En el océano, el cuadrado de la distancia al horizonte es directamente proporcional a la altura del observador sobre el nivel del agua. Si una persona de 1.80 metros de altura está parada sobre la cubierta de un barco a 6 metros sobre la superficie del agua, puede observar hasta 2 kilómetros ¿Hasta dónde podría observar desde la ventanilla de un aeroplano que vuela a 400 metros sobre la superficie del agua?

13: La resistencia del aire sobre un móvil es, aproximadamente, proporcional al cuadrado de la velocidad del mismo. Compárese la resistencia del aire sobre un automóvil que viaja a 40 kilómetros por hora con la de un automóvil que viaja a 60 kilómetros por hora.

14: La cantidad de pintura necesaria para pintar la superficie lateral de un poste cilíndrico es conjuntamente proporcional al radio y a la altura del poste. Compárese la cantidad de pintura necesaria para un poste de 2 metros de altura y 0.20 metros de radio con la necesaria para pintar un poste de 3 metros de altura y 0.15 metros de radio.

15: La velocidad de aterrizaje de un aeroplano es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su peso. Si un aeroplano que pesa 2000 kilogramos aterriza a 70 kilómetros/hr., calcúlese la velocidad con que aterrizaría si llevara 500 kilogramos más de carga.

16: La fuerza que ejerce el viento sobre una superficie plana y vertical es conjuntamente proporcional al área de la superficie y al cuadrado de la velocidad del viento. Si la fuerza ejercida sobre un metro cuadrado es de 1 kilogramo cuando la velocidad del viento es de 22 kilómetros/hr., encuéntrese la fuerza sobre el vidrio de una ventana de 1.5 metros por 2 metros durante una tormenta en la cual la velocidad del viento es de 80 kilómetros/hr.

17: El peso de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el cuerpo y el centro de la Tierra. Si una persona pesa 90 kilogramos sobre la superficie de la tierra, calcúlese cuanto pesaría a 220 kilómetros de altura. Supónga que el radio de la Tierra es de 6400 kilómetros.

18. La cantidad de hidrógeno producida cuando se añade sodio al agua es directamente proporcional al peso del sodio. Si 46 gramos de sodio producen 2 gramos de hidrógeno, calcúlese cuánto hidrógeno se produciría en 115 gramos de sodio.

19: La aceleración producida en un objeto por una fuerza que actúa sobre él es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del objeto. Compárese la aceleración producida por una fuerza de 350 dinas que actúa sobre una masa de 70 gramos con la producida por una fuerza de 320 dinas que actúa sobre un masa de 80 gramos.

20: La fuerza necesaria para que un alambre atraviese la supercie de un líquido es conjuntamente proporcional a la tensión superficial del líquido y a la longitud del alambre. Si se necesitan 376 dinas para extraer un alambre de 4 centímetros de longitud de un recipiente que contiene mercurio cuya tensión superficial es de 470 dinas por centímetro, ¿que fuerza será necesaria para extraer un alambre de 3 centímetros de longitud de un recipiente que contiene aceite de oliva cuya tensión superficial es de 35 dinas por centímetro?

21: La potencia que un eje puede transmitir en condiciones de seguridad es

directamente proporcional al cubo del radio del eje y al número de revoluciones que éste da por minuto. Compárese la potencia que puede transmitir un eje de 4 centímetros de radio y 1000 revoluciones por minuto, con la de otro de 6 centímetros de radio y 440 revoluciones por minuto.

22: La iluminación producida sobre una superficie por una fuente de luz es directamente proporcional al número de bujías de la fuente de luz e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de dicha fuente a la superficie. Compárese la iluminación producida por una lámpara de 256 bujías sobre una superficie que está a 8 metros de ella, con la producida por una lámpara de 144 bujías sobre una superficie a 4 metros.

23: La resistencia de una viga horizontal apoyada en sus extremos es directamente proporcional al ancho y al cuadrado del peralte de la viga e inversamente a su longitud. Compárense las resistencias de dos vigas: la primera, de ancho w, peralte d y longitud l, y la segunda, de ancho $3w$, peralte $2d$ y longitud $\frac{1}{2}l$.

24: La potencia máxima de una caldera, con chimenea de sección transversal dada, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura de la chimenea. Si una caldera con potencia de 600 caballos de fuerza tiene una chimenea de 12 metros de altura, calcúlese la altura de la chimenea de igual sección transversal que será necesaria para 700 caballos de fuerza.

25: La cantidad de energía eléctrica convertida en calor en un cierto tiempo es conjuntamente proporcional a la resistencia del conductor, al cuadrado de la corriente y al tiempo. Si 36 julios de calor se producen en un conductor por una corriente de 3 amperes que fluye por 2 segundos, calcúlese el calor que se produciría en el mismo conductor por una corriente de 2 amperes fluyendo por 3 segundos.

26: El paso de una cuerda vibrante de sección transversal dada es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión e inversamente proporcional a su longitud. Compárense los pasos de dos cuerdas vibrantes si la primera tiene la mitad de la longitud de la segunda y está sujeta a una tensión doble.

27: Una de las leyes de Kepler, establece que el cuadrado del tiempo empleado por un planeta para efectuar una revolución alrededor del Sol es directamente proporcional al cubo de la distancia media de ese planeta al Sol. Si Marte está con respecto al Sol a una distancia media 1.5 veces mayor que la Tierra, encuéntrese el tiempo aproximado que emplea en efectuar una revolución alrededor del Sol.

28: La resistencia eléctrica de un alambre de sección uniforme es directamente proporcional a la longitud del alambre e inversamente proporcional al área de su sección. Compárese la resistencia de un alambre de 30 metros de largo y 1.56 milímetros de radio con la de otro de 15 metros de largo y 0.78 milímetros de radio.

11 NUMEROS COMPLEJOS

EN EL CAPÍTULO 1. expusimos cómo se inventó lo que después fue llamado sistema de los números reales, originado por la necesidad de contar objetos, o cabezas de ganado, invento que más tarde se desarrolló constituyendo la aritmética que ha servido a los fines de impulsar la industria y el comercio. Como ocurre a cualquier invento, el sistema de los números reales tiene limitaciones que al principio fueron aceptadas y después superadas por medio de perfeccionamientos. En relación con las ecuaciones de segundo grado se encontró el concepto de número imaginario y el artificio utilizado para manejarlo fue la notación $i^2 = -1$, $i = \sqrt{-1}$ (Pr, 8,4). Aquí continuamos extendiendo el concepto de números reales, incluyendo el de números imaginarios. El sistema que los abarca se llama *sistema de los números complejos.*

11.1 DEFINICION

número complejo

Un número complejo es un número de la clase $a + bi$, en donde a y b son reales e $i^2 = -1$, (o $i = \sqrt{-1}$).

La letra a se llama parte real de $a + bi$ y bi se llama parte imaginaria. Si a es cero el número complejo se reduce a un *número imaginario puro.* Si b es cero se reduce a un número real. Por consiguiente, los números reales y los números imaginarios puros son casos especiales de los números complejos. Si b es diferente a cero, el número complejo se denominará número imaginario.

igualdad de dos números complejos

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si, y solamente si, $a = c$ y $b = d$. Por ejemplo, si

$$x - 2 + 4yi = 3 + 12i$$

Por tanto

$$x - 2 = 3$$

y

$$4y = 12$$

entonces $x = 5$ y $y = 3$

11.2 LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS.

La suma, la diferencia y el producto de dos números complejos se efectúan empleando los métodos descritos en el capítulo 1. Por ejemplo, la suma y la diferencia de $2 + 3i$ y $4 - 5i$ se obtiene de la misma manera que la suma y la diferencia de $2 + 3x$ y $4 - 5x$. En consecuencia,

$$(2 + 3i) + (4 - 5i) = (2 + 4) + (3 - 5)i = 6 - 2i$$

y también

$$(2 + 3i) - (4 - 5i) = (2 - 4) + i(3 + 5) = -2 + 8i$$

Cuando se aplica el método usual de la multiplicación para encontrar el producto de $(2 + 3i)\ (4 - 5i)$, se obtiene

$$(2 + 3i)(4 - 5i) = 8 + 2i - 15i^2$$

reemplazando i^2 por -1, se tiene

$$(2 + 3i)(4 - 5i) = 8 + 2i + 15 = 23 + 2i$$

El cociente que resulta al dividir $2 + 3i$ entre $4 - 5i$ se escribe a modo de fracción $(2 + 3i)/(4 - 5i)$, y ésta se puede expresar como una fracción cuyo denominador es real si se multiplica cada uno de sus miembros por $4 + 5i$. Se obtiene así

$$\frac{2 + 3i}{4 - 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{8 + 22i + 15i^2}{16 - 25i^2} = \frac{8 - 15 + 22i}{16 + 25} = \frac{-7 + 22i}{41}$$

A la última fracción obtenida se le llama cociente de $2 + 3i$ entre $4 - 5i$.

En general, la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$, se expresan en las fórmulas siguientes.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d) \tag{11.1}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d) \tag{11.2}$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{11.3}$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2} \tag{11.4}$$

Para obtener el cociente expresado en (11.4) se multiplicaron el dividendo $a + bi$ y el divisor $c + di$, por $c - di$.

Este factor $c - di$ se llama conjugado de $c + di$ y la relación establecida se define de la siguiente manera.

números complejos conjugados

Se dice que dos números complejos *son conjugados* uno de otro si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias difieren sólo en signo.

El conjugado de un número complejo, se escribe colocando sobre el número una línea horizontal llamada vínculo. De este modo.

$$x + iy = x - iy$$

Los ejemplos siguientes ilustran el modo de realizar las operaciones fundamentales con numeros complejos.

EJEMPLO 1 Realizar las operaciones indicadas. $(3 + 4i) + (2 - 7i)$.

Solución

$$(3 + 4i) + (2 - 7i) = 3 + 2 + i(4 - 7) = 5 - 3i$$

EJEMPLO 2 Realizar las operaciones indicadas. $(3 + 4i) - (2 - 7i)$.

Solución

$$(3 + 4i) - (2 - 7i) = 3 - 2 + i(4 + 7) = 1 + 11i$$

EJEMPLO 3 Realizar las operaciones indicadas. $(3 + 4i)(2 - 7i)$.

Solución

$$(3 + 4i)(2 - 7i) = 6 + i(8 - 21) - 28i^2 = 34 - 13i$$

EJEMPLO 4 Realizar las operaciones. $\dfrac{3 + 4i}{2 - 7i}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{3 + 4i}{2 - 7i} &= \frac{(3 + 4i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} \\ &= \frac{6 + i(21 + 8) + 28i^2}{4 - 49i^2} \\ &= \frac{-22 + 29i}{53} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Realizar las operaciones. $3 + 4i + \overline{3 + 4i}$.

Solución

$$3 + 4i + \overline{3 + 4i} = 3 + 4i + 3 - 4i = 6$$

EJEMPLO 6 Realizar las operaciones. $(3 + 4i)(\overline{3 + 4i})$.

Solución

$$(3 + 4i)(\overline{3 + 4i}) = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25$$

EJERCICIO 48: OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

Efectúense las operaciones indicadas en los problemas 1 a 24.

1: $(3 + 2i) + (5 + 3i)$ 2: $(4 + 3i) + (2 + 5i)$

3: $(2 - 3i) + (1 + 2i)$ 4: $(5 - 6i) + (4 + 2i)$

5: $(4+i)-(1+3i)$

6: $(6+3i)-(2-4i)$

7: $(3+5i)-(5-3i)$

8: $(7-4i)-(-6+4i)$

9: $(3+7i)+(5+3i)-(-2+9i)$

10: $(5-i)-(8-2i)+(3-i)$

11: $(-4-5i)+(11-7i)-(8+6i)$

12: $(9+7i)-(-9+7i)+(-18+i)$

13: $(3+4i)(5+2i)$

14: $(2+5i)(3+7i)$

15: $(2-3i)(3+5i)$

16: $(-7+4i)(3-4i)$

17: $(4-3i)^2$

18: $(5+2i)^2$

19: $(7+5i)^2$

20: $(6+5i)^2$

21: $(1+2i)(2-i)(1+i)$

22: $(3-2i)(2+i)(1-i)$

23: $(3+4i)(4+3i)(2-5i)$

24: $(3+5i)(5+3i)(2-i)$

Encuéntrense los conjugados de los números complejos de los problemas 25 a 36.

25: $3+4i$

26: $6-i$

27: $-2+3i$

28: $4+3i$

29: $2-5i$

30: 7

31: $4i$

32: $3-i$

33: $(1+i)(-2-i)$

34: $(4+3i)(5+7i)$

35: $-3i(2+5i)$

36: $2i(-3+8i)$

Redúzcanse a la forma a + bi las expresiones de los problemas 37 a 48.

37: $\dfrac{3-i}{3+2i}$

38: $\dfrac{2+5i}{3+2i}$

39: $\dfrac{1+4i}{3+i}$

40: $\dfrac{2-3i}{1+2i}$

41: $\dfrac{(3+4i)(1-2i)}{1+i}$

42: $\dfrac{(2+i)(1-i)}{4-3i}$

43: $\dfrac{(2+3i)(3+2i)}{4-3i}$

44: $\dfrac{(5-i)(1-5i)}{3+2i}$

45: $(2-3i)\overline{(3+4i)}$

46: $\overline{(3+i)}(2-5i)$

47: $\overline{(4+i)}\,\overline{(-1+3i)}$

48: $\overline{(7-2i)}\,\overline{(2-7i)}$

Mediante el uso de las condiciones que determinan que dos números complejos son iguales, encuéntrense los valores x y y en las ecuaciones siguientes:

49: $x+3i+3=5+yi$

50: $x-2i=3+3i-yi$

51: $y+ix-2i=3+4i$

52: $3+x+i=7+yi$

53: $x+3i=y+ix$

54: $4+iy=2x+2ix$

55: $x-iy=1+ix$

56: $4+2iy=2y+ix$

57: $x+2yi=ix+y+1$

58: $3x-y-i=2ix-iy$

59: $3ix+2x=2iy+y+1$

60: $2y+iy=3i+ix-x$

61: $(x+iy)(1+2i)=-1+8i$

62: $(x+iy)(2-i)=5$

63: $(x-iy)(3-4i)=3-29i$

64: $(x-iy)(3+2i)=12-5i$

Si $Z=x+iy$ y $W=u+iv$, demuéstrese que son válidas las proposiciones de los problemas 65 a 68.

65: $\overline{Z+W}=\bar{Z}+\bar{W}$

66: $\overline{Z-W}=\bar{Z}-\bar{W}$

67: $\overline{ZW}=\bar{Z}\,\bar{W}$

68: $\overline{Z/W}=\bar{Z}/\bar{W}$

11.3 REPRESENTACION GEOMETRICA

En la fig. 1-1 se representa un número real mediante un punto en una línea recta y se explican varias de las propiedades de los números reales mediante esa representación.

eje real

eje imaginario

La interpretación geométrica de los números complejos es igualmente útil. Con objeto de asociar un número complejo $z = x + iy$ con un punto, se usa un par de ejes coordenados rectangulares. Entonces el punto que representa $x + iy$ es el punto cuyas coordenadas son (x, y) (ver figura 11.1).

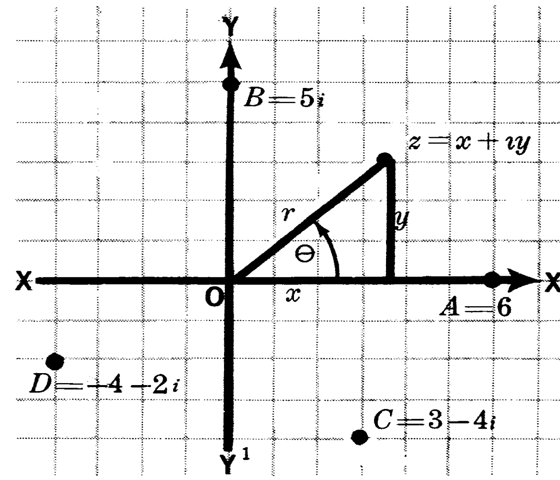


Figura 11.1

Cuando se usan para los números complejos los ejes X e Y como sistema de referencia se les designa, respectivamente, como eje *real* y eje *imaginario* y el plano se llama *plano complejo*.

Los puntos en $X'X$ están asociados con los números reales y los que están sobre $Y'Y$ con los números imaginarios. Por ejemplo $A = 6 = 6 + 0i$ está asociado con (6,0) y $B = 5i = 0 + 5i$ lo está con (0,5). Por otro lado $c = 3 - 4i$ está representado por $(3, -4)$ y $D = -4 -2i$ con $(-4, -2i)$. Los puntos que representa a A, B, C y D, se muestran en la figura 11.1.

valor absoluto o módulo

Si en la figura 11.1 se une el punto z con el origen se obtienen el segmento r y el ángulo θ. Se designa a r como *valor absoluto o módulo de* z y a θ como *amplitud o argumento.* De esta manera se obtiene la definición siguiente. La magnitud del segmento que va del origen al punto que representa un número complejo se llama módulo o *valor absoluto* de ese número. El ángulo formado por este segmento y el eje real positivo se llama *argumento* o *amplitud* del número.

amplitud o argumento

Si se emplea el teorema de Pitágoras, se tiene

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{11.5}$$

y debe observarse que r siempre es positivo. *Además, puesto que

$\tan \theta = \dfrac{y}{x}$, se concluye que

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \tag{11.6}$$

por ejemplo: en el número complejo $3 + 4i$, $r = \sqrt{9} + 16 = \sqrt{25} = 5$.

y

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \tfrac{4}{3} = 53°10', \text{ aproximadamente}$$

De igual manera en el número complejo $\sqrt{3} + i$, $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$, y

* El valor absoluto de z se designa así $|z|$.

$$\theta = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$$

11.4 ADICION Y SUSTRACCION GEOMETRICAS

Si se determinan los puntos representados por

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ w &= u + iv \end{aligned}$$

y

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

se obtienen los puntos designados por z, w, y $w + z$ en la fig. 11.2. Ahora, si los puntos z y w se unen al origen y al punto $z + w$, se obtiene el

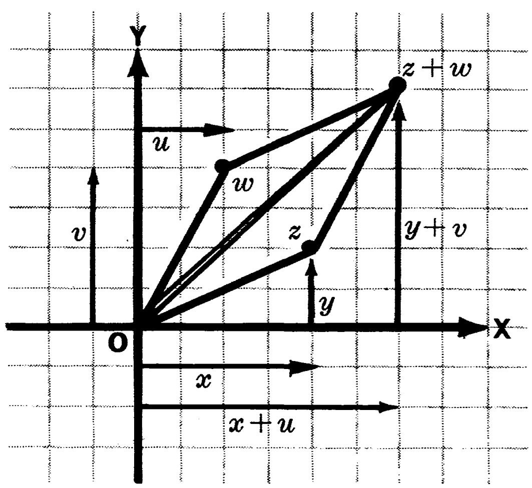


Figura 11.2

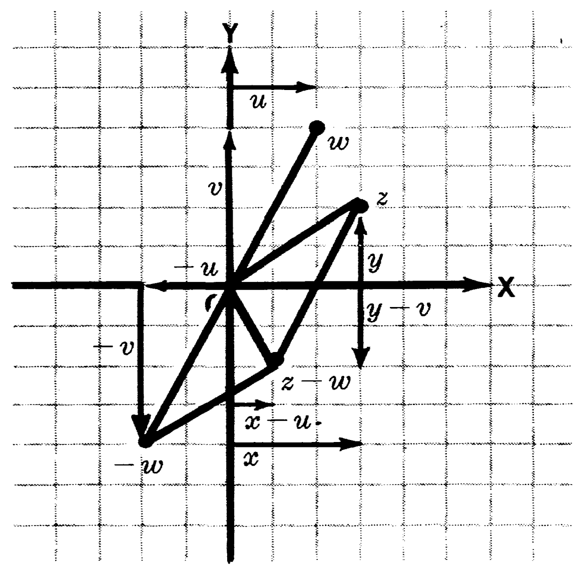


Figura 11.3

cuadrilátero cuyos vértices son O, z, $z + w$ y w; y fácilmente se puede demostrar que el cuadrilátero en cuestión es un paralelogramo. Además, el valor absoluto de $z + w$ o $|z + w|$ es igual a la diagonal del paralelogramo.

De este modo la representación geométrica de la suma de los números complejos $z = x + iy$ y $w = u + iv$ se obtiene determinando primero los puntos que representan a los números y completando luego el paralelogramo que tiene como tres vértices el orígen y los puntos que representan a z y a w. El punto que representa a $z + w$ es el cuarto vértice del paralelogramo.

La diferencia de dos números complejos, z y w, es

$$\begin{aligned} z - w &= (x + iy) - (u + iv) \\ &= (x + iy) + (-u - iv) \end{aligned}$$

y geométricamente se obtiene esta diferencia aplicando el procedimiento anterior a $x + iy$ y a $-u - iv$. Es así como se obtiene la fig. 11.3.

11.5 REPRESENTACION POLAR

En la fig. 11.1 se observa que $\cos\theta = x/r$ y $\operatorname{sen}\theta = y/r$. Por tanto, $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. En consecuencia, el número complejo

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos\theta + ir\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Sacando a r como factor común en el miembro de la derecha se tiene

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \tag{11.7}$$

forma polar o trigonométrica de z.

El miembro de la derecha de (11.7) se llama *forma polar o trigonométrica de z*, y es de gran utilidad tanto para obtener potencias y raíces como para obtener el producto y el cociente de números complejos.*

EJEMPLO 1 Expresar $1 + i\sqrt{3}$ en forma polar.

Solución: Para expresar en forma polar el número complejo $1 + i\sqrt{3}$, nos referimos a lo expresado en (11.5) y (11.6) respectivamente.

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\theta = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = 60°$$

$$\begin{aligned} 1 + i\sqrt{3} &= 2(\cos 60° + i\operatorname{sen} 60°) \qquad \textit{por ec. (11.7)} \\ &= 2\operatorname{cis} 60° \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Expresar $4 - 5i$ en forma polar.

Solución. El valor absoluto de $4 - 5i$ es $r = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$. Su argumento es $\theta = \arctan(-5/4)$. En consecuencia,

$$4 - 5i = \sqrt{41}\left[\cos\left(\arctan\frac{-5}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\arctan\frac{-5}{4}\right)\right]$$

Empleando una tabla de funciones trigonométricas se encuentra que

$$\arctan\frac{-5}{4} = 308°40'$$

*Las siguientes relaciones trigonométricas serán de utilidad al tratar con problemas que comprendan la forma polar.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 0° &= 0 = \cos 90° \\ \operatorname{sen} 30° &= \tfrac{1}{2} = \cos 60° \\ \operatorname{sen} 45° &= \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° \\ \operatorname{sen} 60° &= \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° \\ \operatorname{sen}(180° \pm \theta) &= \mp\operatorname{sen}\theta \\ \cos(180° \pm \theta) &= -\cos\theta \\ \operatorname{sen}(360° - \theta) &= -\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 90° &= 1 = \cos 0° \\ \operatorname{sen} 180° &= 0 = \cos 270° \\ \operatorname{sen} 270° &= -1 = \cos 180° \\ \operatorname{sen} 360° &= 0 \\ \cos(360° - \theta) &= \cos\theta \\ \operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen}\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 4 - 5i &= \sqrt{41}\,(\cos 308°40' + i \operatorname{sen} 308°40') \qquad \textit{por ec. (11.7)} \\ &= \sqrt{41}\operatorname{cis} 308°40' \end{aligned}$$

EJERCICIO 49: REPRESENTACION GEOMETRICA DE NUMEROS COMPLEJOS

Represéntense gráficamente los números complejos de los problemas 1 a 16, así como sus conjugados.

1: $3 - 2i$	2: $4 + i$	3: $5 + 3i$	4: 7
5: $2 + 5i$	6: $-2 + 3i$	7: $2i$	8: $-2 - i$
9: $-4 - 3i$	10: $5 - 2i$	11: -5	12: $3 - 3i$
13: $-5i$	14: $5 - 12i$	15: $15 + 8i$	16: $-7 - 24i$

Efectúense gráficamente las operaciones indicadas en los problemas 17 a 32 y compruébense algebráicamente los resultados.

17: $(2 + i) + (3 + 2i)$	18: $(3 - 2i) + (2 + 3i)$
19: $(3 - 2i) + (2 - 5i)$	20: $(5 + 3i) + (7 - i)$
21: $(-2 + 5i) + (3 - 4i)$	22: $(-3 + 7i) + (3 + 2i)$
23: $(-3 - 2i) + (5 + 2i)$	24: $(-6 - 5i) + (4 + 3i)$
25: $(4 + 5i) - (1 + 3i)$	26: $(8 + 9i) - (5 + 7i)$
27: $(7 + 8i) - (2 + 5i)$	28: $(11 + 4i) - (8 + 2i)$
29: $(2 + 5i) - (1 - 2i)$	30: $(3 + 5i) - (2 - i)$
31: $(-1 + 4i) - (2 - 3i)$	32: $(2 - 5i) - (4 - 7i)$

Exprésense en forma polar los números complejos de los problemas 33 a 52.

33: $1 - i$	34: $-1 + i$	35: $-1 - i$
36: $1 + i$	37: $1 + i\sqrt{3}$	38: $1 - i\sqrt{3}$
39: $-1 + i\sqrt{3}$	40: $-1 - i\sqrt{3}$	41: $-\sqrt{3} + i$
42: $-\sqrt{3} - i$	43: $\sqrt{3} + i$	44: $\sqrt{3} - i$
45: $-3 - 4i$	46: $5 + 12i$	47: $8 - 15i$
48: $-7 + 24i$	49: $3i$	50: -2
51: $-i$	52: 3	

11.6 PRODUCTO DE DOS NUMEROS COMPLEJOS

La aplicación sucesiva de este proceso conduce al teorema siguiente: *Si entonces*

El producto de dos números complejos

$$C = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$
$$C' = x' + iy' = r'(\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta')$$

$$\begin{aligned} CC' &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)r'(\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta') \\ &= rr'(\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \operatorname{sen} \theta' + i \operatorname{sen} \theta \cos \theta' + i^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta') \\ &= rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta') + i(\operatorname{sen} \theta \cos \theta' + \cos \theta \operatorname{sen} \theta')] \end{aligned}$$

Haciendo uso de las fórmulas para el seno y el coseno en el caso de la suma de dos ángulos se tiene

$$CC' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')] \tag{11.8}$$

De ahí, el teorema siguiente: *El valor absoluto del producto de dos números complejos es el producto de sus valores absolutos. El argumento del producto de dos números complejos es la suma de sus argumentos.*

Puesto que el producto de dos números complejos es un número complejo se puede encontrar el producto de cualquier número de números complejos mediante sucesivas aplicaciones del teorema anterior.

EJEMPLO Obtener el producto de $1 + i, 1 + \sqrt{3}i$, y $\sqrt{3} - i$.

Solución. Para obtener el producto de $1 + i, 1 + \sqrt{3}i$, y $\sqrt{3} - i$ se expresan primero los números en su forma polar, y se obtiene

$$\begin{aligned}
1 + i &= \sqrt{2}(\cos \arctan 1 + i \operatorname{sen} \arctan 1) \\
&= \sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) \\
1 + \sqrt{3}i &= 2(\cos \arctan \sqrt{3} + i \operatorname{sen} \arctan \sqrt{3}) \\
&= 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) \\
\sqrt{3} - i &= 2\left(\cos \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} + i \operatorname{sen} \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= 2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)
\end{aligned}$$

Por tanto, su producto es

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) \\
&\qquad = (\sqrt{2})(2)(2)[\cos(45° + 60° + 330°) + i \operatorname{sen}(45° + 60° + 330°)] \\
&\qquad = 4\sqrt{2}(\cos 435° + i \operatorname{sen} 435°) \\
&\qquad = 4\sqrt{2}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)
\end{aligned}$$

puesto que las funciones trigonométricas de 435° son iguales a las de 435° — 360° = 75°.

El valor aproximado de ese número se puede obtener mediante el empleo de una tabla de funciones trigonométricas y utilizando una aproximación decimal para $\sqrt{2}$.

11.7 COCIENTE DE DOS NUMEROS COMPLEJOS

Como se indicó en el Pr. 11.2, el cociente de dos números complejos se obtiene multiplicando cada uno por el conjugado del divisor. Por tanto, el cociente de $C = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ entre $C' = r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')$, es

$$\begin{aligned}
\frac{C}{C'} &= \frac{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}{r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')} \\
&= \frac{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}{r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')} \, \frac{\cos\theta' - i \operatorname{sen}\theta'}{\cos\theta' - i \operatorname{sen}\theta'} \\
&= \frac{r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}{r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')} \, \frac{\cos(-\theta') + i \operatorname{sen}(-\theta')}{\cos\theta' - i \operatorname{sen}\theta'} \\
&= \frac{r\{\cos[\theta + (-\theta')] + i \operatorname{sen}[\theta + (-\theta')]\}}{r'(\cos^2\theta' - i^2 \operatorname{sen}^2\theta')} && \textit{por ec. (11.8)} \\
&= \frac{r[\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')]}{r'(\cos^2\theta' + \operatorname{sen}^2\theta')} \\
&= \frac{r[\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')]}{r'} && \textit{puesto que } \cos^2\theta' + \operatorname{sen}^2\theta' = 1.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la fórmula para el cociente de dos números complejos C y C' es

$$\blacktriangleright \quad \frac{C}{C'} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i \operatorname{sen}(\theta - \theta')] \tag{11.9}$$

De ahí, el teorema siguiente: *El valor absoluto del cociente de dos números complejos es el valor absoluto del dividendo entre el valor absoluto del divisor. La amplitud del cociente de dos números complejos es la amplitud del dividendo menos la amplitud del divisor.*

EJEMPLO Calcular el cociente de $1 + \sqrt{3i}$ y de $1 + i$.

Solución. Para obtener el cociente de $1 + \sqrt{3i}$ entre $1 + i$ se expresa cada número en la forma polar, y se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} &= \frac{2(\cos \arctan \sqrt{3} + i \operatorname{sen} \arctan \sqrt{3})}{\sqrt{2}\,(\cos \arctan 1 + i \operatorname{sen} \arctan 1)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\frac{\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ}\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}[\cos(60^\circ - 45^\circ) + i \operatorname{sen}(60^\circ - 45^\circ)] \\
&= \sqrt{2}\,(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ) \\
&= \sqrt{2} \operatorname{cis} 15^\circ
\end{aligned}$$

Se puede obtener un valor aproximado de este número empleando una tabla de funciones trigonométricas y un valor decimal aproximado para $\sqrt{2}$.

EJERCICIO 50: REPRESENTACION POLAR DE NUMEROS COMPLEJOS

Efectúense las operaciones indicadas en los problemas 1 a 20 y exprésense los resultados tanto en forma polar como en forma rectangular.

1: $[3(\cos 22^\circ + i \operatorname{sen} 22^\circ)][2(\cos 8^\circ + i \operatorname{sen} 8^\circ)]$
2: $[2(\cos 43^\circ + i \operatorname{sen} 43^\circ)][\frac{1}{2}(\cos 17^\circ + i \operatorname{sen} 17^\circ)]$
3: $[4(\cos 29^\circ + i \operatorname{sen} 29^\circ)][\frac{1}{2}(\cos 16^\circ + i \operatorname{sen} 16^\circ)]$
4: $[5(\cos 73^\circ + i \operatorname{sen} 73^\circ)][2(\cos 47^\circ + i \operatorname{sen} 47^\circ)]$

5: $(2 \operatorname{cis} 13^\circ)(3 \operatorname{cis} 11^\circ)(2 \operatorname{cis} 6^\circ)$
6: $(\sqrt{2} \operatorname{cis} 19^\circ)(2 \operatorname{cis} 43^\circ)(\sqrt{3} \operatorname{cis} 28^\circ)$
7: $(\sqrt{5} \operatorname{cis} 28^\circ)(\sqrt{5} \operatorname{cis} 8^\circ)(2 \operatorname{cis} 9^\circ)$
8: $(3 \operatorname{cis} 71^\circ)(2 \operatorname{cis} 69^\circ)(\sqrt{3} \operatorname{cis} 10^\circ)$
9: $\dfrac{6(\cos 51^\circ + i \operatorname{sen} 51^\circ)}{2(\cos 21^\circ + i \operatorname{sen} 21^\circ)}$
10: $\dfrac{2(\cos 78^\circ + i \operatorname{sen} 78^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 18^\circ + i \operatorname{sen} 18^\circ)}$
11: $\dfrac{10(\cos 143^\circ + i \operatorname{sen} 143^\circ)}{5(\cos 8^\circ + i \operatorname{sen} 8^\circ)}$
12: $\dfrac{6(\cos 199^\circ + i \operatorname{sen} 199^\circ)}{3(\cos 19^\circ + i \operatorname{sen} 19^\circ)}$
13: $\dfrac{(3 \operatorname{cis} 26^\circ)(2 \operatorname{cis} 38^\circ)}{6(\cos 4^\circ + i \operatorname{sen} 4^\circ)}$
14: $\dfrac{(4 \operatorname{cis} 128^\circ)(3 \operatorname{cis} 33^\circ)}{6(\cos 11^\circ + i \operatorname{sen} 11^\circ)}$
15: $\dfrac{(5 \operatorname{cis} 180^\circ)(6 \operatorname{cis} 99^\circ)}{3(\cos 39^\circ + i \operatorname{sen} 39^\circ)}$
16: $\dfrac{(8 \operatorname{cis} 137^\circ)(15 \operatorname{cis} 154^\circ)}{20(\cos 66^\circ + i \operatorname{sen} 66^\circ)}$
17: $\dfrac{24(\cos 268^\circ + i \operatorname{sen} 268^\circ)}{(3 \operatorname{cis} 34^\circ)(2 \operatorname{cis} 9^\circ)}$
18: $\dfrac{105(\cos 184^\circ + i \operatorname{sen} 184^\circ)}{(7 \operatorname{cis} 19^\circ)(5 \operatorname{cis} 30^\circ)}$
19: $\dfrac{15(\cos 48^\circ + i \operatorname{sen} 48^\circ)}{(3 \operatorname{cis} 46^\circ)(2 \operatorname{cis} 32^\circ)}$
20: $\dfrac{30(\cos 31^\circ + i \operatorname{sen} 31^\circ)}{(6 \operatorname{cis} 29^\circ)(2 \operatorname{cis} 47^\circ)}$

Exprésense en forma polar los números complejos de los problemas 21 a 40, efectúense las operaciones indicadas y dénse los resultados en forma polar.

21: $(1+i)(1-\sqrt{3}i)$ **22:** $(1-i)(-1-\sqrt{3}i)$
23: $(-\sqrt{3}-i)(-1+i)$ **24:** $(-1+\sqrt{3}i)(1+i)$
25: $(\sqrt{3}+i)(-1+i)(-1-\sqrt{3}i)$
26: $(\sqrt{3}-i)(1+i)(-1+\sqrt{3}i)$
27: $(-\sqrt{3}-i)(1-i)(1+\sqrt{3}i)$
28: $(-\sqrt{3}+i)(-1-i)(1-\sqrt{3}i)$
29: $(1+i)^4$ **30:** $(\sqrt{3}-i)^3$ **31:** $(1-\sqrt{3}i)^2$
32: $(-1-i)^5$ **33:** $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ **34:** $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i}$
35: $\dfrac{-1-i}{-1+i}$ **36:** $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i}$ **37:** $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)}{1+i}$
38: $\dfrac{(-1+\sqrt{3}i)i}{1+\sqrt{3}i}$ **39:** $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)}$
40: $\dfrac{-1-i}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

11.8 TEOREMA DE MOIVRE

Si se eleva al cuadrado el número complejo

$$C = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} C^2 &= [r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)][r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta) \quad \textit{según ec. (11.8)} \end{aligned}$$

De igual manera

$$\begin{aligned} C^3 &= C(C^2) \\ &= [r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)][r^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta)] \\ &= r^3(\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta) \end{aligned}$$

La aplicación sucesiva de este proceso conduce al teorema siguiente: *Si*

$$C = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \tag{11.10}$$

entonces

$$C^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta) \tag{11.11}$$

Proposición que se conoce con el nombre de teorema de De Moivre.

La demostración de este teorema para valores enteros de n hace necesario el uso de la inducción matemática y se dará como ejemplo 2 en el capítulo 16. Por el momento, se considerará que el teorema es válido para valores enteros de n y se demostrará que también lo es para todo número racional p/q.

Sea

$$r^{p/q} = R \qquad \text{y} \qquad \frac{p}{q}\theta = \phi \tag{11.12}$$

entonces,

$$r = R^{q/p} \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{q}{p}\,\phi \tag{11.13}$$

En consecuencia,

$$r^p = R^q \qquad \text{y} \qquad p\theta = q\phi \tag{11.14}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
[r(\cos\theta + i \sin\theta)]^{p/q} &= \{[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^p\}^{1/q} \\
&= [r^p(\cos p\theta + i \operatorname{sen} p\theta)]^{1/q} && \textit{por } (11.11) \\
&= [R^q(\cos q\phi + i \operatorname{sen} q\phi)]^{1/q} && \textit{por } (11.14) \\
&= \{[R(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)]^q\}^{1/q} && \textit{por } (11.11) \\
&= R(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \\
&= r^{p/q}\left(\cos\frac{p}{q}\,\theta + i \operatorname{sen}\frac{p}{q}\,\theta\right) && \textit{por } (11.12)
\end{aligned}$$

EJEMPLO Elevar $\sqrt{3+i}$ a la quinta potencia.

Solución.

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3} + i)^5 &= \left[2\left(\cos \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} + i \operatorname{sen} \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^5 \\
&= [2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)]^5 \\
&= 2^5[\cos 5(30°) + i \operatorname{sen} 5(30°)] \\
&= 32(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) \\
&= 32\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) \\
&= -16\sqrt{3} + 16i
\end{aligned}$$

11.9 RAICES DE NUMEROS COMPLEJOS

En el campo de los números reales no existe raíz cuadrada de —9, ni raíz cuarta de —16. En realidad, no existe raíz par de ningún número negativo y solamente existe una raíz impar de un número negativo en el campo de los números reales. Sin embargo, empleando números complejos se pueden obtener n raíces enésimas de cualquier número mediante la aplicación del teorema de De Moivre.

Ilustraremos este procedimiento resolviendo los dos ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 Encontrar las tres raíces cúbicas de 64.

Solución. Expresando en forma trigonométrica.

$$64 = 64(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$$

$$64 = 64[\cos(0° + n360°) + i \operatorname{sen}(0° + n360°)] \tag{1}$$

para cualquier valor entero n ya que sen θ y cos θ son periódicos con 360° como período

$$64^{1/3} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \tag{2}$$

tendremos

$$64 = [r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)]^3 \qquad \textit{elevando al cabo ambos miembros} \qquad (3)$$
$$= r^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta)$$

por aplicación del teorema de Moivre igualando los segundos miembros de (1) y (3)

$$r^3(\cos 3\theta + i \text{ sen } 3\theta) = 64[\cos(0° + n360°) + i \text{ sen}(0° + n360°)] \qquad (4)$$

para todos los valores enteros de n.

De los valores absolutos de ambas expresiones obtendremos $r^3 = 64$ en (4); de aquí $r = \sqrt[3]{64} = 4$. Además 3θ y $0° + n\,360° = n\,360°$ son iguales para todos los valores de n ya que cada uno es una expresión del argumento; de aquí,

$$\begin{aligned}
3\theta &= n360° \\
\theta &= n120° \\
&= 0° \qquad \text{para } n = 0 \\
&= 120° \qquad \text{para } n = 1 \\
&= 240° \qquad \text{para } n = 2
\end{aligned}$$

Refiriéndonos a (2) vemos que los valores de la raíz cúbica de 64 que corresponde a estos valores de θ son

$$\begin{aligned}
4(\cos 0° + i \text{ sen } 0°) &= 4 \\
4(\cos 120° + i \text{ sen } 120°) &= -2 + 2\sqrt{3}i \\
4(\cos 240° + i \text{ sen } 240°) &= -2 - 2\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

Conviene notar que no hay necesidad de utilizar valores posteriores de n, puesto que con ello se encontrarían ángulos que difieren de los ya obtenidos en múltiplos de 360°. En consecuencia, cualquier valor adicional de la raíz cúbica de 64 estaría entre los ya obtenidos.

EJEMPLO 2 Encontrar las cuatro raíces cuartas de $1 + \sqrt{3i}$.

Solución. Si se expresa $1 + \sqrt{3i}$ en forma polar, se tiene

$$\begin{aligned}
1 + \sqrt{3}i &= 2(\cos \arctan\sqrt{3} + i \text{ sen} \arctan\sqrt{3}) \\
&= 2(\cos 60° + i \text{ sen } 60°) \\
&= 2[\cos(60° + n360°) + i \text{ sen}(60° + n\,360°)] \qquad (1)
\end{aligned}$$

para todo valor entero de n. Si se hace

$$(1 + \sqrt{3}i)^{1/4} = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$$

y se aplica al teorema de De Moivre, se obtiene

$$[(1 + \sqrt{3}i)^{1/4}]^4 = r^4(\cos 4\theta + i \text{ sen} 4\theta) \qquad (2)$$

Igualando las expresiones para $1 + \sqrt{3i}$, dadas por (1) y (2), se tiene

$$r^4(\cos 4\theta + i \text{ sen } 4\theta) = 2[\cos(60° + n360°) + i \text{ sen } (60° + n360°)]$$

para todo valor entero de n. Además, igualando los valores absolutos de las dos formas de $1 + \sqrt{3i}$, e igualando también sus argumentos, se obtiene

$$r^4 = 2 \qquad \text{y} \qquad 4\theta = 60° + n360°;$$

por tanto,

$$r = 2^{1/4} \qquad \text{y} \qquad \theta = 15° + n90°$$

es decir,

$$\begin{aligned} \theta &= 15^\circ && \text{para } n = 0 \\ &= 105^\circ && \text{para } n = 1 \\ &= 195^\circ && \text{para } n = 2 \\ &= 285^\circ && \text{para } n = 3 \end{aligned}$$

En consecuencia, los valores de las raíces cuartas de $1 + \sqrt{3i}$ son

$2^{1/4}(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$
$2^{1/4}(\cos 105^\circ + i \operatorname{sen} 105^\circ)$
$2^{1/4}(\cos 195^\circ + i \operatorname{sen} 195^\circ)$
$2^{1/4}(\cos 285^\circ + i \operatorname{sen} 285^\circ)$

Si las raíces de un número complejo se conocen en la forma trigonométrica, entonces sus valores aproximados en la forma algebraica pueden obtenerse utilizando los valores aproximados de las funciones trigonométricas para cada ángulo y calculando, además, la raíz enésima real de r por medio de logaritmos.

Es importante hacer notar que las cuatro raíces cuartas de $1 + \sqrt{3i}$ están colocadas equidistantemente en la circunferencia de un círculo de radio $r^{1/4} = 2^{1/4}$, lo que viene siendo un caso particular de la siguiente proposición.

raíz principal

Las n raíces enésimas de a + bi, están colocadas equidistantemente en la circunferencia de un círculo de radio.

$$r^{1/n} = \sqrt{(a^2 + b^2)^{1/n}}$$

y siendo el argumento de la primera θ/n.

La raíz obtenida empleando el menor valor de θ *se llama raíz principal.*

EJERCICIO 51: POTENCIAS Y RAICES DE NUMEROS COMPLEJOS

Usando el teorema de De Moivre elévense a la potencia indicada los números de los problemas 1 a 16. En caso necesario utilícese la tabla II del apéndice para obtener el ángulo con aproximación de diez minutos.

1: $(1 + i)^3$	2: $(1 - i)^4$	3: $(-1 + i)^5$
4: $(-1 - i)^2$	5: $(1 - \sqrt{3}i)^3$	6: $(-1 + \sqrt{3}i)^2$
7: $(1 + \sqrt{3}i)^4$	8: $(-1 - \sqrt{3}i)^7$	9: $(3 + 4i)^5$
10: $(5 - 12i)^2$	11: $(-2 + 3i)^4$	12: $(-1 - 2i)^6$
13: i^9	14: 3^5	15: $(-2i)^6$
16: $(-2)^7$		

Encuéntrense las raíces pedidas en los problemas 17 a 32.

17: Raíces cúbicas de $1 + i$	18: Raíces cúbicas de i
19: Raíces cúbicas de $1 - \sqrt{3}i$	20: Raíces cúbicas de $-\sqrt{3} + i$
21: Raíces cuartas de $1 - i$	22: Raíces cuartas de $1 + \sqrt{3}i$
23: Raíces cuartas de 16	24: Raíces cuartas de $-1 + \sqrt{3}i$
25: Raíces quintas de $-\sqrt{3} - i$	26: Raíces quintas de $1 - i$
27: Raíces quintas de $1 + i$	28: Raíces quintas de -32

29: Raíces sextos de $-1 - \sqrt{3}i$ **30**: Raíces novenas $1 + i$

31: Raíces octavas de $-\sqrt{3}i$ **32**: Raíces novenas $-1 + i$

Resuélvanse las siguientes ecuaciones por medio del teorema de De Moivre.

33: $x^2 = -16i$ **34**: $x^2 = 25i$ **35**: $x^3 = -27i$

36: $x^3 = -64$ **37**: $x^4 = 16$ **38**: $x^4 = -81$

39: $x^5 = i$ **40**: $x^5 = 32$

12 ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

EL TRABAJO QUE HASTA AHORA se ha hecho con las ecuaciones ha consistido casi exclusivamente en el manejo de problemas de primer grado y de segundo grado. Cuando han aparecido ecuaciones de grado superior ha sido posible manejarlas reduciéndolas a la forma cuadrática. Sin embargo, las aplicaciones prácticas del álgebra frecuentemente requieren ecuaciones que ni son cuadráticas ni pueden reducirse a la forma cuadrática y resulta importante poder resolver tales ecuaciones con tiempo y esfuerzo mínimo. Este es el motivo por el que los matemáticos desarrollaron los métodos que se discutirán en este capítulo. La forma en que ellos procedieron fue la siguiente: primeramente, observaron la posibilidad de la existencia de ciertas propiedades: luego, demostraron dichas propiedades y, finalmente, las emplearon en las aplicaciones.

Se seguirá aquí un desarrollo parecido y, entre otros, se establecerán métodos para los siguientes procesos: (1), determinación del rango en el que deben caer las raíces para facilitar el cálculo de dichas raíces; (2), determinación de las raíces racionales; (3), cálculo del número máximo de raíces positivas y negativas, y (4), cálculo de los valores aproximados de las raíces irracionales.

12.1 ECUACIONES RACIONALES ENTERAS

Este capítulo se dedicará a los métodos empleados para resolver ecuaciones del tipo

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{12.1}$$

en donde n es entero y $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ son constantes. En los capítulos 4 y 6 se han presentado los casos en que $n = 1$ y $n = 2$. En los capítulos 8 y 9 y en este se consideran los casos en que n es mayor que dos.

polinomio

El miembro de la izquierda de (12.1) se llama *función racional entera o polinomio racional entero* y las ecuaciones del tipo (12.1) se llaman *ecuaciones racionales enteras.*

El grado de una ecuación racional entera es igual al mayor exponente que tenga la incógnita de la ecuación.

La notación funcional empleada en el Pr. 5.2, se empleará aquí más ampliamente, por ejemplo, si $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 4$, entonces $f(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 2(2) + 4$, y $f(r) = 2r^3 + r^2 - 2r + 4$.

12.2 TEOREMA DEL RESIDUO

teorema del residuo

La operación para encontrar las raíces de (12.1), en el párrafo anterior, se simplifica considerablemente si el miembro de la izquierda se factoriza en uno o varios factores de primer grado. El teorema del residuo que se enuncia y se demuestra más adelante, es últil para ese propósito y es también la base del método empleado para determinar las raíces de (12.1) cuando el miembro de la izquierda no es factorizable con facilidad.

Si se divide un polinomio $f(x)$ entre $x - r$, hasta obtener un residuo independiente de x, entonces el residuo es igual a $f(r)$.

Antes de proceder a la demostración del teorema del residuo se ilustrará su significado mediante el ejemplo siguiente.

Si se divide $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ entre $x - 3$, empleando el método del Pr. 1.9, se obtiene $x^2 + x - 1$ como cociente y 2 como residuo. Debe observarse que el residuo es independiente de x.

En este problema $x - r = x - 3$. Esto es, $r = 3$.
Ya que

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$$
$$f(3) = 3^3 - 2(3)^2 - 4(3) + 5 = 27 - 18 - 12 + 5 = 2$$

que es igual al residuo obtenido anteriomente.
En la operación de división existe la relación siguiente entre el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo.
Dividendo = (cociente) (divisor) + residuo.
Por consiguiente, si $Q(x)$ es el cociente que se obtiene al dividir $f(x)$ entre $x - r$ y R es el residuo, se tiene

$$f(x) = Q(x)(x - r) + R \tag{12.2}$$

La ecuación (12.2) es válida para todo valor de x, inclusive para $x = r$. Por tanto, si (12.2) se sustituye r en vez de x, se tiene

$$f(r) = Q(r)(r - r) + R$$

En consecuencia,

$f(r) = R$

con lo que queda demostrado el teorema.

12.3 TEOREMA DEL FACTOR Y SU RECIPROCO

teorema del factor

Si r es una raíz de $f(x) = 0$, entonces $f(r) = 0$. Por tanto, de acuerdo con el teorema del residuo, R es cero en la expresión (12.2) del párrafo anterior, y para esa situación

$f(x) = Q(x)(x - r)$

De esta manera $x - r$ es un factor de $f(x)$, expresión que conduce al teorema del factor que se expone a continuación.

Si r es raíz de la ecuación racional entera $f(x), = 0$, entonces $x - r$ es factor de $f(x)$.

recíproco del teorema del factor

Recíprocamente, si $x - r$ es factor de $f(x)$, entonces el residuo que resulta al dividir $f(x)$ entre $x - r$ es igual a cero. Por tanto, r es raíz de $f(x) = 0$. De esta manera a continuación se expone recíproco del teorema del factor.

Si $x - r$ es factor del polinomio $f(x)$, entonces r es raíz de $f(x) = 0$.

EJERCICIO 52: USO DE LOS TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

Empleando el teorema del residuo, encuentrese el residuo que se obtendría al dividir la primera expresión de los problemas 1 a 16, entre la segunda.

1: $x^3 + 6x^2 - 4x + 3,\ x - 1$
2: $x^3 - 5x^2 + 6x - 2,\ x + 1$
3: $x^3 + 7x^2 - 3x - 4,\ x - 2$
4: $x^3 + 3x^2 + 9x + 4,\ x + 3$
5: $2x^3 + 2x^2 - 3x - 5,\ x + 2$
6: $3x^3 + 6x^2 - 4x + 1,\ x + 3$
7: $2x^3 - 3x^2 - 2x - 5,\ x - 4$
8: $4x^3 + 2x^2 + x - 7,\ x - 1$
9: $-4x^3 - 3x^2 + 5x - 6,\ x + 2$
10: $-3x^3 - 9x^2 + 7x + 1,\ x + 4$
11: $-5x^3 + 6x^2 + 6x - 4,\ x + 1$
12: $-6x^3 - 5x^2 + 3x + 6,\ x - 1$
13: $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 2x + 4,\ x - 2$
14: $2x^4 - 9x^2 - 7x - 7,\ x + 3$
15: $16x^5 + 8x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x - 3,\ x - \frac{1}{2}$
16: $-3x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 7,\ x + 2$

Empleando el teorema del factor, demuéstrese que la segunda expresión de los problemas 17 a 36 es un factor de la primera.

17: $x^3 + 3x^2 + 4x + 2, x + 1$
18: $-x^3 + 4x^2 - 5x + 2, x - 1$
19: $2x^3 + 2x^2 - 3x + 2, x + 2$
20: $-3x^3 + 4x^2 + 3x + 2, x - 2$
21: $5x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 6x + 5, x + 1$
22: $3x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 9x + 9, x - 3$
23: $-2x^5 + 7x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 9x + 4, x - 4$
24: $3x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 7x + 5, x + 1$
25: $16x^3 + 8x^2 + 2x + 1, x + \frac{1}{2}$
26: $9x^3 + 3x^2 + x - 1, x - \frac{1}{3}$
27: $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2, x + \frac{2}{3}$
28: $8x^3 - 6x^2 + 4x - 3, x - \frac{3}{4}$
29: $x^3 + 2ax^2 + 3a^2x - 2a^3, x + a$
30: $2x^3 - 2bx^2 - 3b^2x - 2b^3, x - 2b$
31: $x^3 - x^2(2a - 3) - x(6a + 2) + 4a, x - 2a$
32: $x^3 + x^2(b + 3) + x(3b + 2) + 2b, x + b$
33: $x^n - a^n, x - a$
34: $x^n - a^n$, n even, $x + a$
35: $x^n + a^n$, n odd, $x + a$
36: $x^n - a^{3n}, x - a^3$

Empleando el recíproco del teorema del factor, encuéntrense las raíces de las ecuaciones de los problemas 37 a 44.

37: $(x-1)(x+2)(x+1)=0$	38: $(x-3)(x+5)(x-2)=0$
39: $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x+\frac{2}{3})=0$	40: $(x-a)(x+b)(x+c)=0$
41: $(x^2+3x-4)(x-1)=0$	42: $(x^2-x-2)(x+5)=0$
43: $(x^2+2x-3)(x-3)=0$	44: $(x^2-x-6)(x-4)=0$

12.4 DIVISION SINTETICA

Mediante el proceso conocido como *división sintética* se puede reducir considerablemente el trabajo realizado para encontrar el cociente y el residuo que resultan al dividir un polinomio en x entre $x - r$.

El procedimiento por seguir se puede comprender más fácilmente empleando primero un ejemplo. Si se emplea el método usual para dividir $2x^3 + x^2 - 18x - 7$ entre $x - 3$, se tiene

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & & 2x^2 & + & 7x & + & 3 & \\
\hline
2x^3 & + & x^2 & - & 18x & - & 7 & x-3 \\
\cline{8-8}
(2x^3) & - & 6x^2 & & & & & \\
\cline{1-5}
 & & 7x^2 & - & [18x] & & & \\
 & & (7x^2) & - & 21x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 3x & - & [7] & \\
 & & & & (3x) & - & 9 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 2 &
\end{array}
$$

Ahora se analizará este problema observando lo que puede suprimirse sin interferir con los pasos esenciales. En primer lugar, la división requiere que cada término de los escritos dentro de un paréntesis en el problema sea exactamente igual al término que está sobre él. Además, los términos dentro de corchetes son términos del dividendo escritos en nueva posición. Si se omiten estos dos conjuntos de términos, se tiene

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
 & & 2x^2 & + & 7x & + & 3 & \\
\hline
2x^3 & + & x^2 & - & 18x & - & 7 & x-3 \\
\cline{8-8}
 & - & 6x^2 & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & 7x^2 & & & & & \\
 & & & - & 21x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & 3x & & & \\
 & & & & & - & 9 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 2 &
\end{array}
$$

Se puede ahorrar espacio colocando $-21x$ y -9 en la misma línea que $-6x^2$; y $3x$ y 2 en la misma línea que $7x^2$. Además, es innecesario escribir la variable. Por tanto, una forma abreviada de trabajar es

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 2 & +7 & +3 & \\ \hline
2 & +1 & -18 & -7 & 1-3 \\
 & -6 & -21 & -9 & \\ \hline
 & 7 & +3 & +2 &
\end{array}$$

Si se considera que el método que se está desarrollando se aplica únicamente a aquellos problemas en que el divisor es $x - r$, resulta innecesario escribir el coeficiente de x, que siempre es 1.

Además, en la sustracción se cambia el signo del sustraendo y se suma, lo que puede hacerse automáticamente si en el divisor se reemplaza -3 por $+3$. Realizando estas sugestiones, se tiene

$$\begin{array}{rrrr|l}
 & 2 & +7 & +3 & \\ \hline
2 & +1 & -18 & -7 & 3 \\
 & +6 & +21 & +9 & \\ \hline
 & +7 & +3 & +2 &
\end{array}$$

El último paso en el procedimiento es volver a escribir el número 2 que aparece en el dividendo como el primer término de la tercera línea. De esta manera los primeros tres términos de esta línea son iguales a los coeficientes del cociente. Por tanto, se puede omitir este último, quedando el problema como sigue

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & +1 & -18 & -7 & 3 \\
 & +6 & +21 & +9 & \\ \hline
2 & +7 & +3 & +2 &
\end{array}$$

En consecuencia, mecánicamente se pueden efectuar los pasos esenciales del procedimiento como sigue: el primer 2 se escribe en la tercera línea y se multiplica por 3; el resultado, 6, se escribe debajo del 1 y se suma obteniéndose 7; se multiplica 7 por 3 obteniéndose 21 que se coloca debajo de -18 con el que se suma; por último, el anterior resultado se multiplica por 3 y el producto obtenido se suma con -7, obteniéndose 2. Entonces los coeficientes del cociente son 2, $+7$, $+3$ y el residuo es 2.

regla de la división sintética

Para dividir $F(x)$ entre $x - r$ por división sintética:

1. Se escriben los coeficientes de $F(x)$ en el mismo orden que las potencias decrecientes de x. Si falta una de éstas se escribe cero en el lugar que le corresponde.

2. Se sustituye el divisor $x - r$ por $+ r$.

3. Se vuelve a escribir, debajo de él, el coeficiente de la mayor potencia de x y se multiplica por r. El producto obtenido se coloca inmediatamente debajo del coeficiente de x que sigue en orden, y se suma con éste. La suma obtenida se multiplica por r y el producto obtenido se coloca debajo del coeficiente que sigue y se suma con el mismo. Se continúa así

con el procedimiento hasta obtener un producto que se suma al término constante.

4. El último número de la tercera línea es el residuo, y los otros, leídos de izquierda a derecha, son los coeficientes del cociente, cuyo grado es siempre menor en uno que el grado de $F(x)$.

EJEMPLO Determinar por división sintética el cociente y el residuo que se obtiene al dividir $2x^4 + x^3 - 16x^2 + 18$ entre $x + 2$.

Solución. Puesto que $x - r = x + 2$, entonces $r = -2$. Escribiendo en una línea los coeficientes del dividendo y colocando cero en vez del coeficiente de x que no aparece y efectuando los pasos de la división sintética, se tiene

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & +1 & -16 & 0 & +18 & \underline{-2} \\ & -4 & +6 & +20 & -40 & \\ \hline 2 & -3 & -10 & +20 & -22 & \end{array}$$

Por tanto, el cociente es $2x^3 - 3x^2 - 10x + 20$, y el residuo es 22.

EJERCICIO 53: DIVISION SINTETICA

Mediante el uso de la división sintética, encuentrense el cociente y el residuo que se producen al dividir la primera entre la segunda de las expresiones de los problemas 1 a 32.

1: $x^3 - 3x^2 + 2x - 3, x - 1$
2: $x^3 + 5x^2 - 3x + 1, x + 2$
3: $2x^3 + 5x^2 + 2x - 1, x + 3$
4: $3x^3 + 2x^2 - x + 3, x - 2$
5: $-3x^3 + 11x^2 + 3x + 2, x - 4$
6: $-2x^3 + 4x^2 + 7x - 1, x - 3$
7: $-2x^3 - 2x^2 + 5x - 7, x + 3$
8: $-x^3 - 7x^2 + 4x + 2, x + 1$
9: $x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 9x - 4, x - 5$
10: $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 3, x + 4$
11: $-3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 3x - 3, x - 1$
12: $-2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 3, x + 2$
13: $x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5, x + 3$
14: $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x - 3, x - 2$
15: $-2x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 2, x - 1$
16: $-x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 3, x + 1$
17: $2x^3 - x - 1, x + 1$
18: $x^4 + x^2 - 1, x + 2$
19: $x^5 - x^3 + x, x - 2$
20: $x^5 - 5x^3 - 9x, x - 3$
21: $9x^4 + 8x^2 - 4, x - \frac{1}{3}$
22: $4x^3 + 2x^2 + 6x - 3, x + \frac{1}{2}$
23: $8x^3 + 6x^2 - 4x - 1, x + \frac{3}{4}$
24: $9x^3 - 6x^2 + 6x + 2, x - \frac{2}{3}$
25: $x^6 - 30x - 5, x - 2$
26. $3x^6 - 2x^3 - x, x + 1$
27: $2x^5 + 55x^2, x + 3$
28: $3x^4 - 10x^2 - 1, x - 2$
29: $x^3 - 2ax^2 + 3a^2x - 3a^3, x + a$
30: $3x^3 - 2ax^2 - 3a^2x - 2a^3, x - 2a$
31: $2x^4 + 3ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + 4a^4, x + a$
32: $x^5 - 4a^2x^3 + x^2 + 2a^2, x + 2a$

Encuéntrese para k un valor tal, que al dividir la primera entre la segunda de las expresiones siguientes, el residuo tenga el valor que se indica.

33: $x^3 - 2x^2 - 5x + 2k; x + 2$; residuo 2
34: $x^3 - 4x^2 + 5x - k; x - 3$; residuo 1
35: $x^3 - 2x^2 + kx - 4; x + 1$; residuo 3
36: $x^3 + 3x^2 + kx + 2; x - 1$; residuo 4
37: $x^3 + kx^2 + 2kx - 20; x - 2$; residuo 4
38: $x^3 + kx^2 - (k + 5)x - 19; x + 3$; residuo 5
39: $2x^3 - kx^2 - (k^2 - k)x - 3k - 6; x - k$; residuo 4
40: $x^4 + (k + 1)x^3 + kx^2 - kx + 3k - 4; x + k$; residuo 0

12.5 GRAFICA DE UN POLINOMIO

Las raíces de una ecuación racional entera $f(x) = 0$, son las abscisas de los puntos en donde la gráfica $y = f(x)$ cruza el eje de las X, ya que en estos puntos $y = 0$. Como en el procedimiento para encontrar las raíces de ecuaciones de ese tipo se hace un uso amplio de las gráficas, este párrafo se dedicará a la discusión de las mismas.

El método para obtener la gráfica de un polinomio es el mismo que el empleado en los Prs. 5.4 y 8.12, excepto que se hará uso de la división sintética para obtener los valores correspondientes de x y de y.

El procedimiento se ilustrará con el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 1 Obtener la gráfica de $x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Solución. Para ello se iguala esta función con y, y se tiene

$$y = x^3 + 3x^2 - x - 3 \qquad (1)$$

Luego, se obtiene una tabla de valores de x y de y mediante el uso de la división sintética y del teorema del residuo.

Por ejemplo, el valor del miembro de la derecha de (1) cuando $x = 2$ es el valor del residuo cuando la función se divide entre $x - 2$. Efectuando esta operación, se tiene

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +3 & -\ 1 & -\ 3 & \underline{2} \\ & +2 & +10 & +18 & \\ \hline 1 & +5 & +\ 9 & +15 & \end{array}$$

El residuo es 15. Por tanto, cuando $x = 2$, $y = 15$. Del mismo modo se obtiene la tabla siguiente de valores correspondientes de x y de y.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	-15	0	3	0	-3	0	15

Estos puntos se sitúan como se muestra en la fig. 12.1. Sin embargo, en virtud de que los puntos $(-4, -15)$ y $(-3,0)$, y los puntos $(1,0)$ y $(2,15)$, están demasiado separados unos de otros, se requiere el émpleo de dos valores fraccionarios de x, $x = -3\frac{1}{2}$ y $x = 1\frac{1}{2}$, para determinar con mayor exactitud la forma de la curva. Cuando $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 5\frac{5}{8}$ y cuando $x = -3\frac{1}{2}$, $y = -5\frac{5}{8}$. De esta manera se obtienen los nuevos puntos indicados en la fig. 12.1, que al ser unidos reproducen la curva que se muestra.

Excepción hecha de pequeños intervalos, los valores de una función racional entera de x cambian más rápidamente que los correspondientes valores de x. Así, en el ejemplo 1, cuando x varía de 1 a 2, y varía de 0 a 15. Igualmente cuando $x = 3$, $y = 48$. Por esta razón, es usual emplear diferentes escalas en los ejes X y Y. En el siguiente ejemplo se demostrará esta situación.

EJEMPLO 2 Construir la gráfica usando tabla de valores de x y de y para la función.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	175	-32	-81	-56	-17	0	-17	-56	-81	-32	175

Solución Para construir la gráfica con estos valores, se selecciona para el eje de las X una escala cuya unidad sea igual a 10 veces la unidad de la escala en el eje de las Y. La gráfica se representa en la Fig. 12.2.

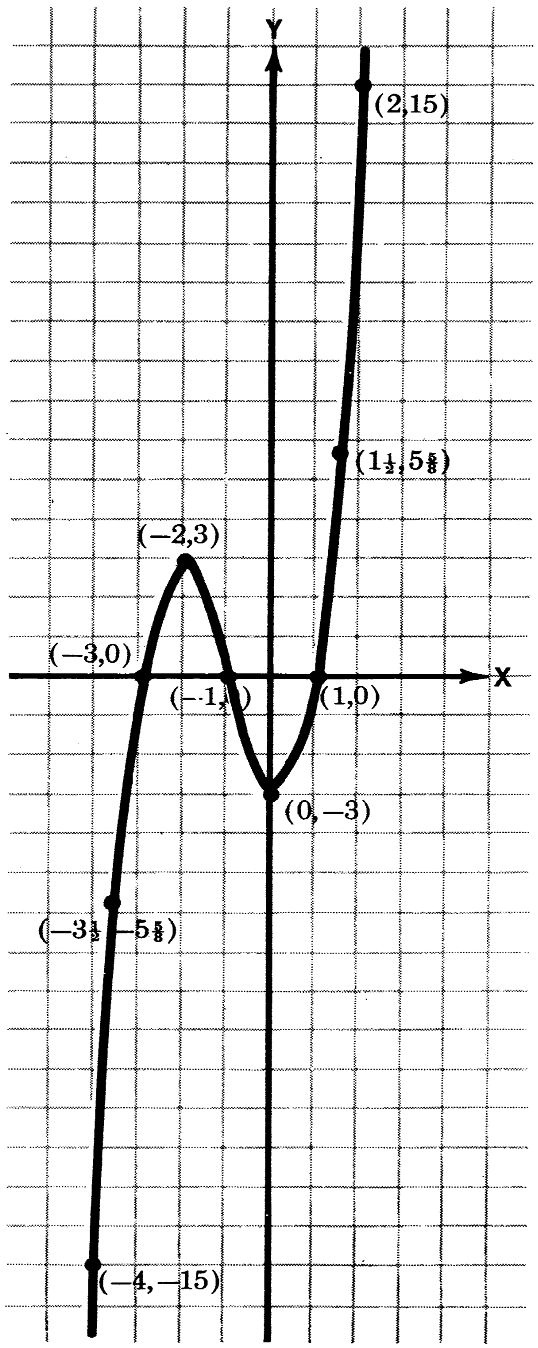


Figura 12.1

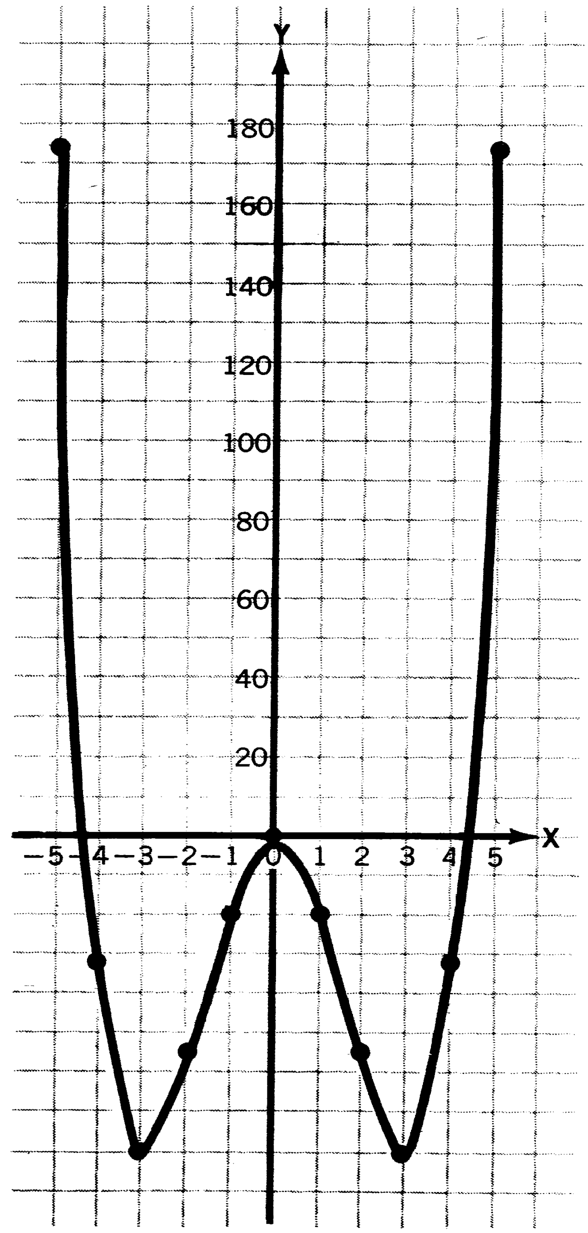


Figura 12.2

EJERCICIO 54: GRAFICAS DE POLINOMIOS

Dibújense las gráficas de las siguientes funciones en el intervalo indicado y determínense, aproximadamente, los ceros de cada función.

1: $x^3 - x^2 - 4x + 4$, -3 a 3

2: $x^3 + 3x^2 - x - 3$, -4 a 2

3: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, -2 a 4

4: $x^3 - 9x^2 + 20x$, 0 a 6

5: $x^3 - 8x^2 + 10x + 12$, -1 a 7	6: $x^3 - 4x^2 - 5x + 18$, -3 a 5
7: $x^3 - 5x^2 + x + 3$, -2 a 6	8: $x^3 + 8x^2 + 13x + 2$, -6 a 2
9: $x^3 + 3x^2 - 11x + 6$, -7 a 2	10: $x^3 + 7x^2 + 10x + 2$, -6 a 1
11: $x^3 - 10x^2 + 22x - 12$, 0 a 8	12: $x^3 - 6x^2 + x + 14$, -2 a 6
13: $x^3 + 7x^2 + 6x - 14$, -6 a 2	14: $x^3 + 14x^2 + 52x + 48$, -9 a -1
15: $x^3 - 14x^2 + 52x - 56$, 1 a 9	16: $x^3 + 11x^2 + 27x + 17$, -8 a 0
17: $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 2x + 6$, -3 a 5	
18: $x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 2x - 18$, -1 a 7	
19: $x^4 + 12x^3 + 38x^2 + 12x - 27$, -7 a 1	
20: $x^4 + 10x^3 + 23x^2 - 10x - 6$, -6 a 1	

12.6 LOCALIZACION DE RAICES

En el ejemplo de Pr. 12.5 encontramos las raíces de las ecuaciones, —3, —1 y 1. Además, para $x = -4$ la curva queda por debajo de el eje de las X, ya que pasa por el punto $(-4, -15)$; para $x = 2$ la curva está sobre el eje de las X, ya que pasa por el punto (2.15). Esto constituye un ejemplo de una regla general.

Si la gráfica de $F(x)$ pasa por dos puntos situados en lados opuestos del eje de las X y si no tiene lagunas o interrupciones, entonces debe cruzar un número impar de veces al eje de las X. Las líneas que no tienen lagunas o que no están formadas por partes separadas, se llaman continuas. Se puede demostrar, aun cuando sale del propósito de este libro, que la gráfica de cualquier función racional entera es continua. Con base en ello se tiene la siguiente regla para la localización de raíces.

regla para localizar raíces

Si $F(a)$ y $F(b)$ difieren en signo, existe un número impar de raíces reales de $F(x) = 0$, entre $x = a$ y $x = b$.

12.7 NUMERO DE RAICES

El teorema fundamental del Algebra establece que *toda ecuación racional entera tiene por lo menos una raíz.**

Considerando la ecuación racional entera

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a = 0 \qquad (12.3)$$

y suponiendo que r_1 es una raíz, se tiene, de acuerdo con el teorema del factor,

$$f(x) = Q_1(x)(x - r_1)$$

en donde $Q_1(x)$ es de grado $n - 1$. La ecuación $Q_1(x) = 0$ tiene también, por lo menos una raíz r_2. Entonces $x - r_2$ es factor de $Q_1(x)$ y en consecuencia $Q_1(x) = Q_2(x)\ (x - r_2)$, en donde $Q_2(x)$ es de grado $n - 2$. Por tanto, $f(x) = (x - r_1)\ (x - r_2)\ Q_2(x)$. Si se continúa este proceso se pueden encontrar $n - 2$ factores adicionales $(x - r_3)$, $(x - r_4)$, . . . $(x - r_n)$, y se tiene

*Para la demostración de este teorema puede consultarse el libro: Dickson, FIRST COURSE IN THEORY OF EQUATIONS. Pág. 155.

$$f(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_n)Q_n(x) \tag{12.4}$$

en donde $Q_n\ (x)$ es de grado $n - n = 0$ y es, por tanto, una constante. Evidentemente, $Q_n(x)$ es el coeficiente de x^n en el miembro de la derecha de (2). Por tanto, es igual a a_0.

En consecuencia, la forma factorizada de $f(x)$ es

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_n) \tag{12.5}$$

En donde, por el recíproco del teorema del factor, se hace evidente que $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ son raíces de $f(x) = 0$. Además, $f(x)$ no tiene otras raíces, ya que ninguno de los factores de (12.5) es igual a cero para ningún otro valor r_{n+1} de x, que no sea alguno de los mismos $r_1, r_2\ r_3 \ldots r_n$.

En el caso de que s valores de $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ sean iguales, ésto es, que $r_1 = r_2 = r_3 \ldots = r_n$, entonces (12.5) se convierte en

$$f(x) = a_0(x - r_s)^s(x - r_{s+1}) \cdots (x - r_n)$$

teorema sobre el número de raíces

en donde r_s se llama raíz múltiple de grado s de $f(x) = 0$. De esta manera se tiene el siguiente teorema.

Una ecuación racional entera de grado n, tiene exactamente n raíces entre las cuales una raíz múltiple de grado se cuenta como s raíces.

EJEMPLO Localizar las raíces de $2x^2 - x^2 - 6x + 3 = 0$.

Solución. En la ecuación $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$, $f(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3$. Además, se puede comprobar que $f(-2) = -5$. $f(-1) = 6$, $f(0) = 3$, $f(1) = -2$, $f(2) = 3$. Por tanto, existe un número impar de raíces entre -2 y -1, entre 0 y 1, y entre 1 y 2. Puesto que la ecuación es de tercer grado, debe tener solamente tres raíces. Por tanto, hay exactamente una raíz en cada uno de los intervalos anteriores.

12.8 LIMITES DE LAS RAICES REALES

El teorema que se da en este párrafo permite encontrar dos números, uno de los cuales es mayor o igual que la mayor de las raíces reales de una ecuación y otro que es más pequeño o igual que la menor de las raíces de la ecuación. De ese modo al efectuar las operaciones se puede restringir el intervalo dentro del cual se encuentran las raíces reales.

límite superior

Cualquier número mayor que, o igual, a la mayor de las raíces de una ecuación se llama *límite superior de las raíces.*

límite inferior

Cualquier número menor que, o igual, a la menor de las raíces de una ecuación se llama *límite inferior de las raíces.*

A continuación se enunciará y se demostrará el teorema que permite determinar esos límites.

teorema de límites

Si el coeficiente de x^n de una ecuación racional entre $f(x) = 0$ es positivo, y si no existen términos negativos en la tercera línea de la división sintética de $f(x)$ entre $x - k$, $k > 0$, entonces k es límite superior de las raíces reales de $f(x) = 0$. Además, si los signos de la tercera línea de la división sintética de $f(x)$ entre $x - (-k) = x + k$ son alterna-

*tivamente más o menos —k, es límite inferior de las raíces reales.**

EJEMPLO Encontrar los límites superior e inferior de la ecuación

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 3 = 0$$

Solución. La división sintética del miembro de la izquierda de

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 3 = 0 \text{ por } x - 3 \text{ y por } x + 1,$$

respectivamente, se muestra a continuación.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & +3 & +3 & \underline{3} \\ & 3 & +3 & +18 & \\ \hline 1 & +1 & +6 & +21 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & +3 & +3 & \underline{-1} \\ & -1 & +3 & -6 & \\ \hline 1 & -3 & +6 & -3 & \end{array}$$

En el primer caso los términos de la tercera línea son todos positivos. Por tanto 3 es límite superior. En el segundo caso los términos de la tercera línea son alternativamente positivos y negativos. En esta consecuencia, -1 es límite inferior de las raíces.

Para demostrar la primera parte del teorema se empleará (12.2) para $r = k$; se tiene

$$f(x) = Q(x)(x - k) + R \tag{12.6}$$

Según el Pr 12.4, los coeficientes de $Q(x)$ y el valor de R son los números de la tercera línea que resulta de la división sintética de $f(x)$ entre $x - k$. Si estos números son positivos o cero, y si x es mayor que k, entonces $Q(x)\ (x - k) + R > 0$. Por tanto, no existen raíces reales de $f(x) = 0$ mayores de k.

Si el coeficiente que se obtiene al dividir $f(x)$ entre $x + k$ es $q(x)$ y si el residuo es R', entonces

$$f(x) = q(x)(x + k) + R' \tag{12.7}$$

Además, si los términos de la tercera línea de la división sintética son alternativamente positivos y negativos, entonces los coeficientes de $q(x)$ y de R' son alternativamente positivos y negativos. La expresión $q(x)$ es de grado $n - 1$ y su primer coeficiente es igual al coeficiente x^n en $f(x)$ y, por tanto, es positivo. Además, puesto que R' es el último término de la tercera línea de la división sintética, y puesto que hay $n + 1$ términos en esa línea, entonces R' es negativo cuando n es impar y positivo cuando n es par.

Se escoge ahora un número positivo h tal que $-h < -k$, ó $-h + k < 0$, sustituyendo en (12.7) el valor de x por $-h$, se tiene

$$f(-h) = q(-h)(-h + k) + R' \tag{12.8}$$

La sustitución de x por $-h$ en $q\ (x)$ ocasionará un cambio únicamente en los signos de los términos de grado impar. Puesto que los términos de $q(x)$ son alternativamente positivos y negativos, entonces los términos de $q(-h)$ son todos positivos o todos negativos. Si el grado n de

*Si existen uno o más ceros en la tercera línea de la división sintética de $f(x)$ entre $x + k$, entonces $-k$ es límite inferior de las raíces reales si después de reemplazar cada cero, sea por un signo más, sea por un signo menos, los signos de la tercera línea de la divisón sintética son alternativamente más o menos.

$f(x)$ es impar, entonces el grado de $q(x)$ es $n - 1$ y, por tanto, es par. En consecuencia, tanto en el primer término de $q(-h)$ como los demás términos son positivos. De ese modo, puesto que $-h + k$ es negativo, $q(-h)(-h + k)$ es negativo. Además cuando n es impar, R' es negativo. Por tanto, $f(-h)$ es la suma de dos cantidades negativas y por ello es diferente de cero.

Si n es par, $n - 1$ es impar, y entonces todos los términos de $q(-h)$ son negativos y R' es positivo. Por tanto, puesto que $q(-h)(-h + k)$ es positivo, $f(-h)$ es la suma de dos cantidades positivas y por ello diferente de cero.

De ese modo, en cualquier caso, $-h$ no es raíz de $f(x)$. Con ello la demostración del teorema queda completa.

EJERCICIO 55: LOCALIZACION DE RAICES

Encuéntrese el grado de las ecuaciones de los problemas 1 a 8. Luego encuéntrense todas las raíces señalando su multiplicidad.

1: $(x - 3)^2(x + 4)^3 = 0$
2: $(x - 3)(x + 1)(x - 1)^3 = 0$
3: $(x + 2)^2(x - 2)(x + 4)^4 = 0$
4: $(x - 3)^4(x - 2)^3(x + 1)(x - 5)^2 = 0$
5: $(2x - 1)^2(3x + 5)^3(2x + 3)^4 = 0$
6: $(3x - 7)(2x + 5)^3(4x + 9)^6 = 0$
7: $(2x - 7)^4(3x + 8)^5(2x - 1) = 0$
8: $(5x - 1)^2(2x + 3)^7(3x - 5)^2 = 0$

Encuéntrense los enteros que son límites superior e inferior de las raíces de las ecuaciones de los problemas 9 a 32 y localícense entre enteros consecutivos todas las raíces reales de dichas ecuaciones.

9: $2x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 0$
10: $3x^3 + x^2 - 6x + 1 = 0$
11: $x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
12: $x^3 - 4x^2 - 3x + 8 = 0$
13: $3x^3 + 2x^2 - 30x - 28 = 0$
14: $2x^3 - 14x^2 + 29x - 16 = 0$
15: $3x^3 - 10x^2 - 16x + 12 = 0$
16: $2x^3 + 3x^2 - 24x - 18 = 0$
17: $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 10x + 5 = 0$
18: $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 18x - 12 = 0$
19: $x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 3 = 0$
20: $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 4x + 1 = 0$
21: $2x^4 - 4x^3 - 79x^2 - 94x + 21 = 0$
22: $6x^4 + 18x^3 - 11x^2 - 26x + 10 = 0$
23: $3x^4 + 12x^3 - x^2 - 26x + 10 = 0$
24: $2x^4 + 6x^3 - 27x^2 - 7x + 6 = 0$
25: $3x^3 - 13x^2 + 21x - 12 = 0$
26: $2x^3 - 9x^2 + 14x - 10 = 0$
27: $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
28: $3x^3 - x^2 + x + 2 = 0$
29: $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$
30: $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 2 = 0$

31: $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x - 2 = 0$
32: $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$

Las ecuaciones de los siguientes problemas tienen dos raíces entre enteros consecutivos. Localícense esas raíces mediante el uso de un valor intermedio entre los dos enteros consecutivos. Igualmente localícense las otras raíces de cada ecuación entre enteros consecutivos.

33: $3x^3 - 8x^2 - 12x - 3 = 0$
34: $4x^3 - x^2 - 34x - 35 = 0$
35: $6x^3 - 40x^2 + 57x + 33 = 0$
36: $3x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0$
37: $9x^3 - 30x^2 + 30x - 8 = 0$
38: $8x^3 - 20x^2 - 28x - 5 = 0$
39: $9x^3 + 24x^2 + 12x - 5 = 0$
40: $12x^3 - 44x^2 - x + 84 = 0$

12.9 RAICES RACIONALES DE UNA ECUACION RACIONAL ENTERA

Si una ecuación racional entera tiene una o más raíces racionales, el trabajo necesario para encontrar las otras raíces se reduce considerablemente si primero se determinan las raíces racionales. El procedimiento para encontrar una raíz racional es un procedimiento de ensayos. Por ello, el teorema siguiente es bastante útil en cuanto permite encontrar un conjunto de números entre los cuales están las raíces racionales.

teorema de las raíces racionales

Si los coeficientes de

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{12.9}$$

son números enteros, entonces cada una de sus raíces racionales, en su mínima expresión, tiene como numerador un factor de a_n y como denominador un factor a_0.

Se considerará que q/p es una raíz racional de (12.9) y que q y p no tienen factores comunes, excepto la unidad. De este modo, si se sustituye en (12.9) x por q/p y luego se multiplica por p^n, se tiene

$$a_0q^n + a_1q^{n-1}p + \cdots + a_{n-1}qp^{n-1} + a_np^n = 0 \tag{12.10}$$

Trasladando a_np^n dividiendo entre q, se tiene

$$a_0q^{n-1} + a_1q^{n-2}p + \cdots + a_{n-1}p^{n-1} = -\frac{a_np^n}{q} \tag{12.11}$$

El número representado por el miembro de la izquierda de (12.11), esta formado por la suma, el producto y las potencias enteras de enteros y, por tanto, es un entero. En consecuencia, el miembro de la derecha debe ser un entero. De esta manera q es factor de a_n puesto que por hipótesis q y p no tienen más factor común que la unidad.

Si se traslada a_0q^n del miembro de la izquierda al miembro de la derecha de (12.10), y luego se divide entre p, se obtiene

$$a_1q^{n-1} + \cdots + a_{n-1}qp^{n-2} + a_np^{n-1} = -\frac{a_0q^n}{p} \tag{12.12}$$

corolario al teorema de las raíces racionales

Por tanto, p es factor de a_0, puesto que q y p no tienen más factor común que la unidad y puesto que el miembro de la izquierda de (12.12) es un entero.

Si en (12.9), $a_0 = 1$, se tiene entonces el siguiente corolario: *Toda raíz racional de una ecuación*

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{12.13}$$

con coeficientes enteros, es un entero y factor de a_n.

EJEMPLO Encontrar las raíces racionales posibles de $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$.

Solución: En la ecuación $2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4 = 0$ los numeradores de las raíces racionales deben ser factores de 4 y los denominadores factores de 2. Por tanto, las posibilidades de raíces racionales son

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{2}, \pm \frac{4}{2},$$

el anterior conjunto de cocientes se puede reducir eliminando los repetidos, se tiene así

$$-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4.$$

Luego, se pueden emplear el teorema del residuo y el teorema del factor, para determinar cuáles de esas posibilidades son efectivamente raíces.

12.10 ECUACION DEGRADADA

Si r es raíz de la ecuación racional entera $F(x) = 0$, entonces

ecuación degradada

$$\frac{F(x)}{x - r} = 0 \tag{12.14}$$

se llama *ecuación degradada de* $F(x)$, correspondiente a r.

El cociente indicado en la definición anterior se puede obtener por división sintética.

La ecuación degradada correspondiente a una raíz dada es altamente útil al investigar las otras raíces de la ecuación original, ya que cualquier raíz de $F(x) = 0$, distinta de r, es también raíz de (12.14). Además, si r es raíz múltiple de $F(x) = 0$, y su multiplicidad es m, entonces es raíz múltiple de (12.14) y su multiplicidad en este caso es $m - 1$.

El grado de la ecuación degradada es igual al grado de la ecuación original menos uno. Frecuentemente es posible convertir una ecuación en otra de segundo grado degradándola repetidas veces.

Si en la ecuación del ejemplo del párrafo anterior se emplea la división sintética para determinar si 2 es o no raíz, se tiene

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & +1 & -9 & -4 & +4 & \underline{2} \\ & +4 & +10 & +2 & -4 & \\ \hline 2 & +5 & +1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Por tanto, 2 es una raíz. Además, todas las raíces de la ecuación ori-

ginal, con probable excepción de 2, son también raíces de la ecuación degradada $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$.

Ensayando en la ecuación degradada el valor $x = -2$, se tiene

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +5 & +1 & -2 & \underline{-2} \\ & -4 & -2 & +2 & \\ \hline 2 & +1 & -1 & 0 & \end{array}$$

Por tanto, -2 es una raíz. La ecuación degradada que corresponde a $x = 2$ y $x = -2$ es la ecuación de segundo grado $2x^2 + x - 1 = 0$.

Esta ecuación se puede resolver mediante el uso de la fórmula y se tiene

$$(2x - 1)(x + 1) = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2}, -1$$

Por tanto, las cuatro raíces de la ecuación dada son $2, -2, -1$ y $\frac{1}{2}$

12.11 PROCEDIMIENTO PARA OBTENER TODAS LAS RAICES RACIONALES

A continuación se presentará un esquema de los pasos que deben seguirse para determinar las raíces racionales de una ecuación racional entera.

pasos para la obtención de todas las raíces racionales

1. Se enlistan todas las posibilidades de raíces racionales, ordenadas de acuerdo con su magnitud.

2. Se ensaya la menor de las posibles raíces enteras positivas, luego la inmediatamente mayor a ésta, y así sucesivamente hasta que se hayan encontrado todas las raíces enteras positivas o un límite de las mismas.

(a) Si se encuentra un límite, se descartan todas las posibles raíces que sean mayores.

(b) Si se encuentra una raíz, se emplea la ecuación degradada para los cálculos posteriores.

3. Se ensayan las posibilidades que sean fracciones y que estén dentro de los límites encontrados, si se ha encontrado alguno.

4. Se repiten los pasos 2 y 3 para raíces negativas.

NOTA. Si al emplear la ecuación degradada se obtiene una de segundo grado, sus raíces se encuentran mediante la fórmula usual.

EJEMPLO Encontrar las raíces racionales de $F(x) = 4x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + 6 = 0$.

Solución. Los numeradores posibles de las raíces racionales son $\pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$, y los denominadores posibles son $\pm 4, \pm 2, \pm 1$. Las raíces racionales posibles, en orden de magnitud, son $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Se procede, pues, a ensayar las posibilidades enteras positivas.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & -4 & -25 & 1 & 6 & \underline{1} \\ & +4 & 0 & -25 & -24 & \\ \hline 4 & 0 & -25 & -24 & -18 & \end{array}$$

Por tanto, 1 no es ni raíz ni límite

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & -4 & -25 & +1 & +6 & \underline{2} \\ & +8 & +8 & -34 & -66 & \\ \hline 4 & +4 & -17 & -33 & -60 & \end{array}$$

Por tanto, 2 no es ni raíz ni límite

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & -4 & -25 & +1 & +6 & \underline{3} \\ & +12 & +24 & -3 & -6 & \\ \hline 4 & +8 & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Por consiguiente, 3 es raíz y su correspondiente ecuación degradada es $4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0$.
Esta tiene las mismas raíces que la ecuación original, con excepción probable de 3. Ya que su término constante es diferente al de la ecuación original, se puede reducir el número de raíces racionales posibles empleando solamente aquellas posibilidades que sean comunes a la ecuación original y a la ecuación degradada. Las raíces racionales posibles de la ecuación degradada son ± 1, ± 2, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{4}$. No es necesario considerarlas todas, puesto que anteriormente se encontró que 1 y 2 no son raíces de la ecuación original.

Fácilmente se puede ver que $\frac{1}{4}$ no es raíz, en tanto que $\frac{1}{2}$ sí lo es. Además, la ecuación degradada correspondiente a $\frac{1}{2}$ es $4x^2 + 10\ x\ 4 = 0$. Esta es una ecuación de segundo grado que se resuelve por su fórmula y que tiene por raíces -2 y $-\frac{1}{2}$. Por tanto, las raíces de la ecuación original son 3, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y -2.

EJERCICIO 56. DETERMINACION DE RAICES

Encuéntrense todas las raíces racionales de las ecuaciones de los problemas 1 a 20.

1: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
2: $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$
3: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
4: $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$
5: $4x^3 - 4x^2 - 11x + 6 = 0$
6: $6x^3 - 19x^2 + 8x + 5 = 0$
7: $10x^3 + x^2 - 8x - 3 = 0$
8: $6x^3 + 7x^2 - 11x - 12 = 0$
9: $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$
10: $12x^3 + 28x^2 + 3x - 18 = 0$
11: $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 0$
12: $12x^3 + 56x^2 + 55x - 25 = 0$
13: $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$
14: $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$
15: $x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = 0$
16: $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$
17: $6x^4 + x^3 - 25x^2 - 4x + 4 = 0$
18: $16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1 = 0$
19: $4x^4 - 12x^3 + x^2 + 12x + 4 = 0$
20: $12x^4 + 32x^3 + 19x^2 - 7x - 6 = 0$

Encuéntrense todas las raíces de las siguientes ecuaciones.

21: $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$
22: $2x^3 + 2x^2 - 5x - 2 = 0$
23: $2x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$
24: $3x^3 - 8x^2 + 1 = 0$
25: $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0$
26: $3x^3 - 10x^2 + 12x - 3 = 0$
27: $4x^3 + 4x^2 - 7x - 12 = 0$
28: $9x^3 - x + 2 = 0$
29: $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = 0$
30: $6x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 2 = 0$

31: $x^4 + 4x + 3 = 0$
32: $4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 8x - 15 = 0$
33: $x^5 - x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 3x - 5 = 0$
34: $x^5 - 10x^4 + 44x^3 - 104x^2 + 128x - 64 = 0$
35: $6x^5 - 13x^4 + 27x^3 + 22x^2 - 78x + 36 = 0$
36: $4x^5 - 17x^4 + 12x^3 + 62x^2 - 112x + 24 = 0$

12.12 REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

En este párrafo se presentará un criterio o regla que permite determinar el número máximo de raíces positivas o de raíces negativas de una ecuación racional entera.

variación de signos

Si se ordenan los términos de un polinomio de acuerdo con los valores crecientes o decrecientes de las potencias de la variable, se dice que ocurre una variación de signos cuando difieren los signos de dos términos consecutivos; por ejemplo:

En el polinomio $2x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 7x + 3$, los signos de los términos son $+ - - + +$. Por tanto, hay dos variaciones de signos, una de positivo a negativo y otra de negativo a positivo. De igual manera en la expresión $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6x - 4$ hay tres variaciones de signos.

A continuación se dará la regla de los signos de Descartes, luego se ilustrará su aplicación y por último, se demostrará.

regla de los signos de Descartes

El número de raíces positivas de una ecuación racional entera $f(x) = 0$ no es mayor que el número de variaciones de signos en $f(x)$. El número de raíces negativas de la ecuación no es mayor que el número de variaciones de signos en $f(-x)$.

EJEMPLO Encontrar el número máximo de raíces positivas y el de las negativas en $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$.

Solución. En el polinomio $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3$, hay tres variaciones de signo. Por tanto, en la ecuación
$x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$
el número máximo de raíces positivas es tres. Además,
$f(-x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 7x - 3$,
polinomio en el cual sólo hay una variación de signo. Por tanto, el número máximo de raíces negativas de la ecuación anterior es uno.

Para demostrar la regla de los signos de Descartes, se considerará primero la siguiente proposición.

El número de variaciones de signo en el producto $f(x)\ (x - r)$, en donde $r > 0$ es por lo menos una unidad mayor que el número de variaciones de signo es $f(x)$.

Puesto que el interés radica en los signos del producto de $f(x)$ por $x - r$, se considerará únicamente el comportamiento de los signos durante la multiplicación. Se supondrá que los signos de los términos de $f(x)$ son los que aparecen en la primera línea de las que se muestran

más adelante* y que los signos de $x - r$, $r > 0$ son los de la segunda línea. Los signos de la tercera y cuarta líneas son los de los productos de $f(x)$ por x y por r, respectivamente, y la quinta línea consiste de los signos de las sumas de los términos de esos productos.

+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	
									+	−	
+	+	+	−	−	+	+	−	−	+	+	
	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	−
+	±	±	−	±	+	±	−	±	+	±	−

El doble signo se emplea cuando se adicionan un número positivo y un número negativo, puesto que no se puede indicar el signo resultante sin conocer los dos números de la suma. De ese modo los únicos signos definidos claramente en la suma son el primero, el último y aquellos en donde se suman dos números de igual signo. Cada término de la quinta línea es la suma del producto de un término de $f(x)$ por x más el producto del término que le precede por $-r$. Por tanto, los dos productos tendrán el mismo signo si entre los dos términos consecutivos de $f(x)$ hay una variación de signo, y los dos productos serán negativos cuando la variación sea de menos a más y positivos cuando ésta sea de más-menos. Así, además del primero y del último de los términos, habrá tantos signos claramente definidos como variaciones de signo haya en $f(x)$. Luego, si cada secuencia de signos dobles se cambia por el signo que precede a la secuencia, no se incrementa por ello el número de variaciones de signo en el resultado. Efectuando esta operación la quinta línea queda como sigue:

$$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad + \quad + \quad -$$

Entonces, con excepción del último término, estos signos cambian solamente cuando hay una variación en $f(x)$. Además, estos signos son exactamente los mismos que los de $f(x)$. Evidentemente, el producto del último término de $f(x)$ por $-r$ es de signo diferente al del término. De ese modo, en el resultado final, se tiene por lo menos una variación más de signo.

Supóngase ahora que $r_1, r_2, r_3, \cdots r_k$ son las raíces positivas de $f(x) = 0$. Entonces

$$f(x) = q(x)(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdots (x - r_k) \tag{12.15}$$

En el miembro de la derecha de (12.15), $q(x)$ $(x - r_1)$ tiene por lo menos una variación más de signo que $q(x)$: $q(x)(x - r_1)(x - r_2)$

* Si una o más de las potencias de x entre x y x^n falta, quedará libre el espacio correspondiente en el esquema anterior. Entonces colocaremos en el lugar vacante el signo que le precede y así nos aseguramos de que el número de variacionés de signo en esta línea será el mismo que el número de variaciones en $f(x)$, con lo cual, los razonamientos expuestos, siguen siendo válidos.

tiene por lo menos una más que $q(x)(x - r_1)$ y en consecuencia por lo menos dos más que $q(x)$. Continuando este razonamiento, se concluye que el número de variaciones en el miembro de la derecha de (12.15) es por lo menos k veces mayor que los que haya en $q(x)$. Por tanto, el mínimo de variaciones de signo en $q(x)$ es cero y el mínimo de variaciones en $f(x)$ es k. De esta manera el número de raíces positivas de $f(x) = 0$ no es mayor que el número de variaciones de signo en $f(x)$.

La segunda proposición del teorema se concluye considerando que las raíces negativas de $f(x) = 0$ son las raíces positivas de $f(-x) = 0$

12.13 RAICES IMAGINARIAS

Se puede comprobar fácilmente que $x = 2$ es raíz de la ecuación racional entera de $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$ y que la ecuación degradada correspondiente es $x^2 - 2x + 5 = 0$. Resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 1 + 2i$ y $x = 1 - 2i$. Por tanto, las raíces de la ecuación dada son el número real 2 y los números imaginarios conjugados $1 + 2i$ y $1 - 2i$.

La ecuación anterior es un ejemplo de que las raíces imaginarias de una ecuación racional entera con coeficientes reales, ocurren en pares y que cada miembro del par es conjugado del otro. Se demostrará que esta situación es válida para toda ecuación racional entera con coeficientes reales.

Se considerará que $F(x) = 0$ es una ecuación racional entera con coeficientes reales y que $a + bi$ es una de sus raíces. Si se divide $F(x)$ entre la función de segundo grado

$$(x - a)^2 + b^2 = (x - a - ib)(x - a + ib)$$

hasta obtener un residuo, $rx + s$, de primer grado, y designando por $Q(x)$ el cociente, se tiene la identidad siguiente

$$F(x) = Q(x)[(x - a)^2 + b^2] + rx + s \tag{12.16}$$

Puesto que (12.16) es válida para todo valor de x, lo es para $x = a + bi$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} F(a + ib) &= Q(a + ib)[(a + ib - a)^2 + b^2] + (r)(a + ib) + s \\ &= Q(a + ib)(-b^2 + b^2) + (r)(a + ib) + s \\ &= Q(a + ib)0 + (r)(a + ib) + s \\ &= ra + s + ibr = 0 \end{aligned}$$

puesto que por hipótesis $a + bi$ es raíz de $F(x) = 0$.

Por tanto, según el Pr. 11.1 el coeficiente br de la parte imaginaria es cero y la parte real $ra + s$ es también cero. Esto es

$$br = 0 \tag{12.17}$$

y

$$ra + s = 0 \tag{12.18}$$

Sin embargo, $b \neq 0$, y, por tanto, $r = 0$. En consecuencia, en (12.18), $s = 0$. De esa manera (12.16) se convierte en

$$F(x) = Q(x)[(x - a)^2 + b^2]$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F(a - ib) &= Q(a - ib)[(a - ib - a)^2 + b^2] \\ &= Q(a - ib)(-b^2 + b^2) = 0 \end{aligned}$$

y $a - ib$ es también raíz de $F(x) = 0$.

teorema sobre raíces imaginarias

Si el número imaginario $a + bi$, $b \neq 0$, es raíz de la ecuación racional entera con coeficientes reales $F(x) = 0$, entonces su conjugado $a - bi$ es también raíz.

EJEMPLO Formar una ecuación cúbica que tenga por raíces 2 y $3 - i$.

Solución. Si la ecuación tiene coeficientes reales, el conjugado de $3 - i$, $3 + i$ debe ser también raíz. Por tanto, según (12.5), la ecuación que se desea es

$$\begin{aligned} (x - 3 + i)(x - 3 - i)(x - 2) &= 0 \\ x^3 - 8x^2 + 22x - 20 &= 0 \quad \textit{realizando las operaciones indicadas} \end{aligned}$$

corolario al teorema sobre raíces imaginarias

Como consecuencia del teorema anterior y de (12.5), se tiene el corolario siguiente.

Todo polinomio se puede expresar como producto de repetidos o distintos factores de primer grado, por factores irreductibles de segundo grado, todos ellos con coeficientes reales.

EJERCICIO 57: REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

Empleando la regla de los signos de Descartes, encuéntrese el número máximo de raíces positivas y de raíces negativas de las ecuaciones de los problemas 1 a 12.

1: $2x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$	2: $3x^3 + 4x^2 - x - 3 = 0$
3: $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$	4: $3x^3 - x^2 - x + 2 = 0$
5: $x^3 + x + 1 = 0$	6: $x^3 - x^2 - 1 = 0$
7: $x^3 + x - 1 = 0$	8: $x^3 + x^2 + 1 = 0$
9: $3x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = 0$	10: $4x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x + 2 = 0$
11: $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2x + 4 = 0$	12: $2x^4 + 3x^2 + 2x - 6 = 0$

13: Demuéstrese que $3x^6 + 2x^4 + x^2 + 2 = 0$ tiene seis raíces imaginarias.

14: Demuéstrese que $x^5 + 2x^3 + x + 3 = 0$ tiene cuatro raíces imaginarias.

15: Demuéstrese que $x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$ tiene cuatro raíces imaginarias

16: Demuéstrese que $x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ tiene, por lo menos, dos raíces imaginarias.

Fórmese las ecuaciones enteras racionales de menor grado posible y con coeficientes reales que tengan por raíces a los números indicados en los problemas 17 a 28.

17: $1 - i, 3$	18: $3 - 2i, 1$
19: $2 + 3i, \ -3$	20: $1 - 4i, \ -1$
21: $2i, \ -1, \ +2$	22: $3 + i, 2 - i$
23: $1 + 2i, i$	24: $4 - i, 1 + i$
25: $2i, \ -i, 3$	26: $i, 1 - 2i, \ -2$
27: $2 + 3i, \ -1, 2, \ -3$	28: $1 + i, 2 - i, 2$

12.14 CALCULO DE RAICES IRRACIONALES POR APROXIMACIONES SUCESIVAS

En este párrafo se ilustrará un método gráfico para obtener, con el grado de exactitud que se desee, el valor aproximado de una raíz irracional. El método se basa en que, si dos valores de la variable están suficientemente próximos uno a otro, la parte de la gráfica entre ellos es aproximadamente una línea recta.

EJEMPLO 1 Encontrar, con aproximación de dos cifras decimales, la menor raíz positiva de $y(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$.

Solución. A partir de la tabla de valores de x y de y se construye la gráfica de $y(x) = x^3 - 4x + 1$. La gráfica se muestra en la Fig. 12.3.

x	-2.5	-2	-1	0	1	2
$y(x)$	$-\frac{37}{8}$	1	4	1	-2	1

En la gráfica se observa que las raíces de $y(x)$ están entre -2.5 y -2, 0 y 1, 1 y 2.

Para calcular con aproximación de una cifra decimal la raíz que está entre 0 y 1 se construye la gráfica de $y(x)$ en este intervalo considerando que es una línea recta y empleando una escala horizontal 10 veces mayor que la escala vertical (Fig. 12.4). La gráfica muestra que la raíz es, aproximadamente, 0.3; sin embargo,

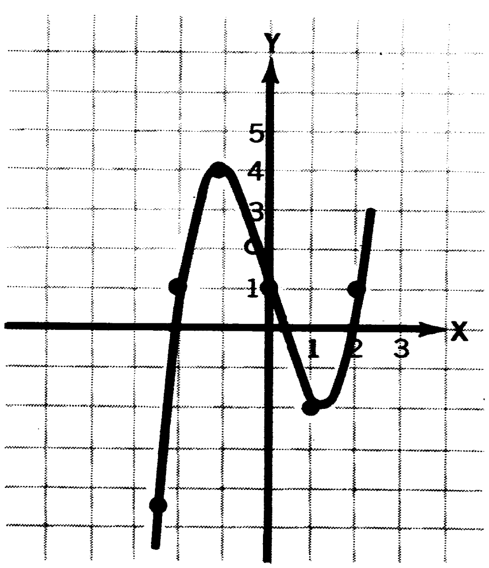


Figura 12.3

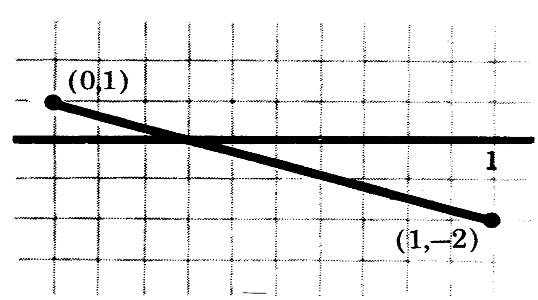


Figura 12.4

observando la Fig. (12.3) puede notarse que en realidad la parte de la curva entre los puntos (0, 1) y (1, — 2) está ligeramente a la izquierda de la línea recta que une ambos puntos.

En consecuencia, $x = 0.3$ es probablemente mayor que la raíz.

Sustituyendo este valor se encuentra que $y(0.3) = -0.173$ y que $y(0.2) = 0.208$. Por tanto, la raíz está entre $x = 0.2$ y $x = 0.3$.

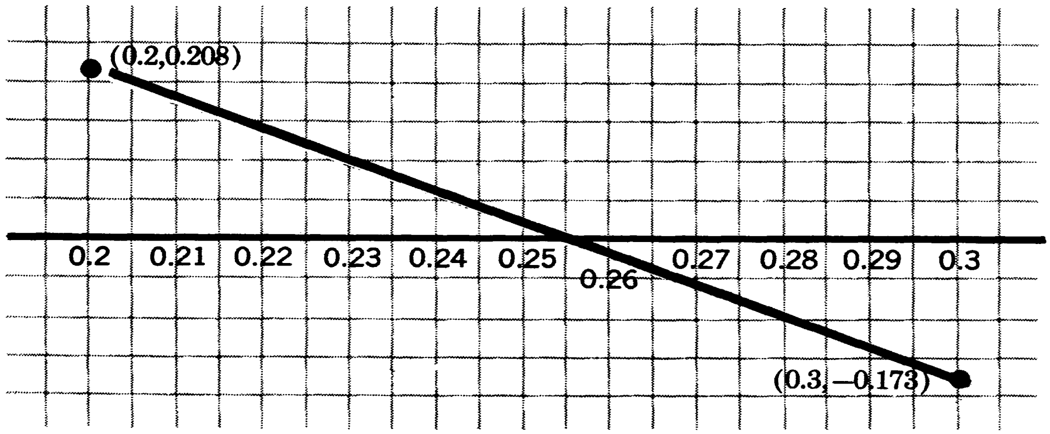


Figura 12.5

Para obtener el valor de la raíz con dos cifras decimales se repite el procedimiento para la parte de la gráfica en el intervalo de $x = 0.2$ hasta $x = 0.3$ y usando la escala indicada en la Fig. 12.5.

Se observa que la raíz es, aproximadamente, $x = 0.25$. Nuevamente, se encuentra que $y\ (0.25) = 0.015625$ y que $y\ (0.26) = -0.022424$. Por tanto, la raíz con dos cifras decimales es $x = 0.25$.

EJEMPLO 2 Encontrar, con aproximación de una cifra decimal, la mayor raíz de $y(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 9 = 0$.

Solución. La gráfica de la Fig. (12.6) se ha construido de acuerdo con la siguiente tabla de valores.

En la gráfica se muestra que hay dos raíces entre $x = 1$ y $x = 2$, y que la mayor está entre $x = 1.5$ y $x = 2$.

x	-2.5	-2	-1	0	1	1.5	2	2.5
$y(x)$	$-\frac{59}{4}$	1	13	9	1	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{31}{4}$

Ampliando la gráfica en el intervalo de $x = 1.5$ a $x = 2$, usando la escala de la Fig. (12.7) se observa que dicha raíz está entre $x = 1.7$ y $x = 1.8$.

Sin embargo, ya que en este intervalo la curva está a la derecha de la línea recta, lo más probable es que la raíz esté más cerca de $x = 1.8$. Sustituyendo valores se encuentra que $y(1.8), = -0.216$ y que, por tanto, $x = 1.8$ es menor que la raíz. Sin embargo, se encuentra que $y(1.9) = 0.928$. Por tanto, el valor de la raíz con aproximación de una cifra decimal es $x = 1.8$.

EJERCICIO 58: RAICES IRRACIONALES

Encuéntrense los valores, con aproximación de una cifra decimal, de las raíces reales de las ecuaciones de los problemas 1 a 8. Indíquese mediante un signo mas o un signo menos escrito después del valor encontrado, si dicho valor es menor o mayor que la raíz.

1: $x^3 - x^2 - 4x + 3 = 0$
2: $x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$
3: $x^3 - 2x^2 - 5x + 5 = 0$
4: $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$
5: $2x^3 - x^2 - 10x - 1 = 0$
6: $2x^3 + 5x^2 - 4x - 11 = 0$
7: $3x^3 - x^2 - 12x + 2 = 0$
8: $2x^3 - 7x^2 + 7 = 0$
9: $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$
10: $x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$

Encuéntrense, con aproximación de dos cifras decimales, la menor raíz positiva de cada una de las siguientes ecuaciones.

11: $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$
12: $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$
13: $x^3 + x^2 - 4x - 3 = 0$
14: $x^3 - 3x - 1 = 0$
15: $x^3 + 2x^2 + 5x - 5 = 0$
16: $x^3 - 7x - 7 = 0$
17: $3x^3 - 4x^2 - 5x + 1 = 0$
18: $2x^3 - 9x^2 + 7x + 5 = 0$
19: $3x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$
20: $2x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$

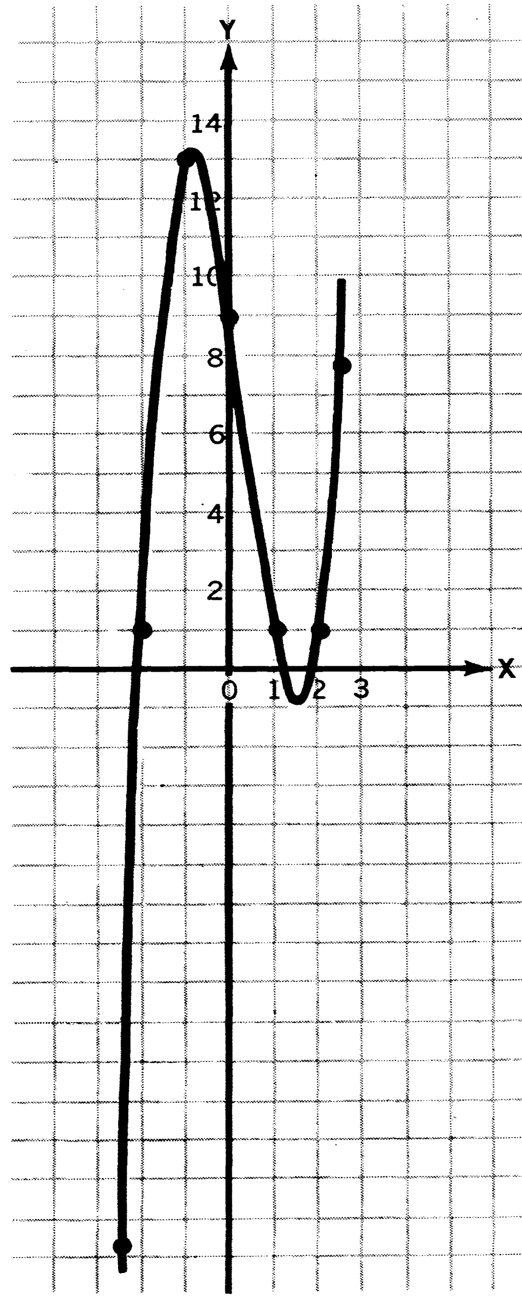
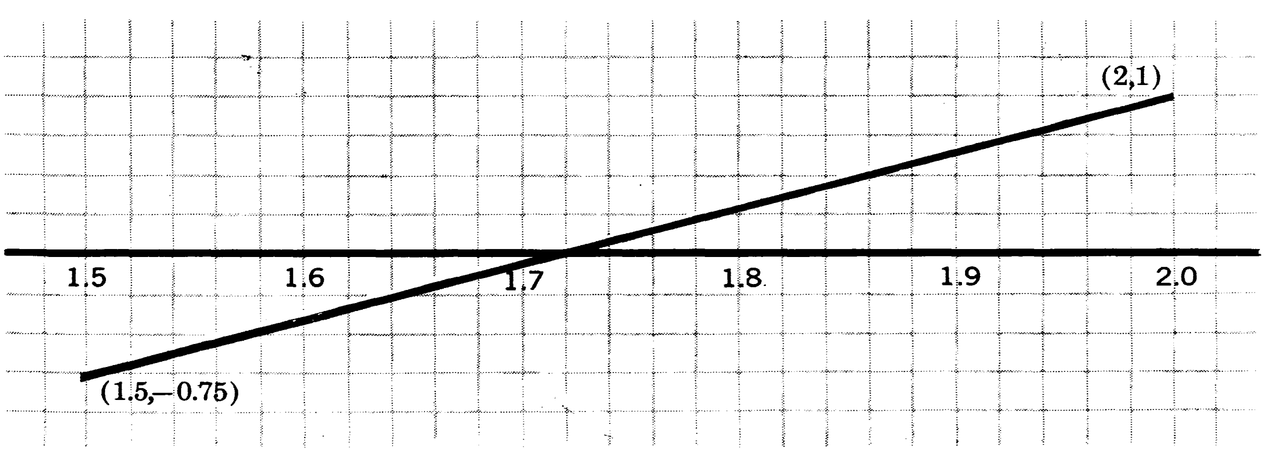


Figura 12.6

Figura 12.7



12.15 TRANSFORMACION DE UNA ECUACION PARA DECRECER SUS RAICES

En este párrafo se presentará un método para encontrar una ecuación racional entera cuyas raíces sean menores que las raíces de una ecuación dada en una cantidad h. Para demostrar el método se considerará la ecuación cúbica general

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \qquad (12.19)$$

pero el razonamiento empleado se puede aplicar a cualquier ecuación racional entera. Si se sustituye x por $z + h$ en (12,19), se tiene la que se puede escribir en la forma

$$f(z + h) = a_0(z + h)^3 + a_1(z + h)^2 + a_2(z + h) + a_3 \qquad (12.20)$$

Naturalmente el coeficiente de z^3 es a_0 y A_1, A_2 *y* A_3 son funciones de h.

Suponiendo que r es raíz de (12.19), entonces $f(r) = 0$. Si se sustituye z *por* $r - h$ en (3), y si se escribe $F(z) = f(z + h)$, se obtiene

$$F(z) = a_0z^3 + A_1z^2 + A_2z + A_3 \qquad (12.21)$$

$F(r - h) = f(r - h + h) = f(r) = 0$. Por tanto, $r - h$ es raíz de (12.21).

A continuación se mostrará cómo calcular los valores de A_1, A_2 y A_3 en (12.21), sin desarrollar los binomios en (12.20). Puesto que $F(z)$ se obtuvo al sustituir en (12.19) x por $z + h$, se puede invertir el proceso y sustituir z por $x - h$ en (12.21) y obtener (12.19). Esta sustitución da el siguiente resultado:

$$f(x) = F(x - h) = a_0(x - h)^3 + A_1(x - h)^2 + A_2(x - h) + A_3 \qquad (12.22)$$

Evidentemente, si se divide el miembro de la derecha de (12.22) entre $x - h$ se obtiene como cociente $a_0(x - h)^2 + A_1(x - h) + A_2$ y como residuo A_3. Por tanto, A_3 es el último término de la tercera línea que resulta al dividir por división sintética $f(x)$ entre $x - h$. Análogamente, A_2 es el último término de la tercera línea al dividir por división sintética el cociente anterior entre $x - h$, y por último, con igual razonamiento, A_1 es el residuo que resulta al dividir el segundo cociente entre $x - h$. En los ejemplos que siguen se muestra, con problemas específicos, cómo llevar a efecto los pasos indicados. El proceso anterior se llama *decrecimiento de las raíces* de una ecuación y la ecuación transformada se llama *ecuación disminuida*.

decrecimiento de las raíces

ecuación disminuida

EJEMPLO 1 Encontrar una ecuación cuyas raíces sean menores en dos que las de $2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$

Solución. Si $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$, y $h = 2$, las operaciones anteriores se efectúan como sigue.

$$\begin{array}{l}
2 - 5 + 3 - 12\underline{|2} \\
\quad\;\; 4 - 2 + 2 \\
\hline
2 - 1 + 1 + (1) = A_3 \\
\quad\;\; 4 + 6 \\
\hline
2 + 3 + (7) = A_2 \\
\quad\;\; 4 \\
\hline
2 + (7) = A_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\textit{primera división} \\
\\
\textit{segunda división} \\
\\
\textit{tercera división}
\end{array}$$

Entonces $a_0 = 2$, y la ecuación disminuida es $2x^3 + 7x^2 + 7x + 1 = 0$

EJEMPLO 2 Encontrar la ecuación cuyas raíces sean dos menos que las de $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x - 1)\ (x + 2)\ (2x - 3) = 0$.

Solución. En este ejemplo se harán decrecer en 2 las raíces de la ecuación $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = (x - 1)\ (x + 2)\ (2x - 3) = 0$ como sigue

$$\begin{array}{l}
2 - 1 - 7 + 6\underline{|2} \\
\quad\;\; 4 + 6 - 2 \\
\hline
2 + 3 - 1 + 4 \\
\quad\;\; 4 + 14 \\
\hline
2 + 7 + 13 \\
\quad\;\; 4 \\
\hline
2 + 11
\end{array}$$

Por tanto, la ecuación disminuida es $2x^3 + 11x^2 + 13x + 4 = 0$. Se puede comprobar fácilmente que las raíces de esta ecuación son -1, -4 y $-\frac{1}{2}$ y que cada una es 2 unidades menor que las correspondientes raíces de la ecuación original.

12.16 METODO DE HORNER PARA DETERMINAR RAICES IRRACIONALES

Mediante el método de Horner se puede obtener una raíz irracional de una ecuación racional entera con el grado de exactitud que se desee. El trabajo necesario es a veces tedioso; sin embargo, el método es simple y directo. Parte de ese trabajo se puede reducir si primero se obtienen todas las raíces racionales y luego se procede a encontrar las irracionales.

El procedimiento consiste en:

método de Horner

1. Se determina la raíz con aproximación de la primera de sus cifras que sea diferente de cero, por medio del teorema de localización expuesto en el Pr (12.4).

2. Se obtiene una ecuación cuyas raíces sean las de la ecuación original, disminuidas en el menor de los números usados al aplicar el teorema mencionado en el paso anterior.

3. Se repite el procedimiento hasta alcanzar el grado de exactitud que se desee.

EJEMPLO Calcular una raíz positiva irracional de

$$F(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 12x - 6 = 0 \tag{1}$$

con aproximación de cuatro cifras significativas.

Solución. Las posibilidades de raíces racionales son ± 6, ± 3, ± 2 y ± 1.

Después de ensayar tales posibilidades, se encuentra que ninguna de ellas es raíz. Mediante el uso de la división sintética se observa fácilmente que $F(1) = -14$ y que $F(2) = 14$. Por tanto, existe una raíz entre 1 y 2.

Ahora se disminuyen las raíces en $h_1 = 1$, obteniéndose así una ecuación que tenga una raíz entre 0 y 1. Empleado el método del Pr 12. 15 se tiene

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 & +4 & -1 & -12 & -6 & \underline{|1} \\
 & 1 & +5 & +4 & -8 & \\
\hline
1 & +5 & +4 & -8 & -14 & = A_4 \\
 & 1 & +6 & +10 & & \\
\hline
1 & +6 & +10 & +2 & = A_3 & \\
 & 1 & +7 & & & \\
\hline
1 & +7 & +17 & = A_2 & & \\
 & +1 & & & & \\
\hline
1 & +8 & = A_1 & & &
\end{array}$$

Por tanto, la ecuación

$$F_1(x) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 2x - 14 = 0 \tag{2}$$

tiene una raíz entre 0 y 1. Por división sintética se observa fácilmente que $F_1(0.7) = -1.2859$ y que $F_1(0.8) = 2.9856$. Por tanto, existe una raíz de $F_1(x) = 0$ entre 0.7 y 0.8 y se procede a obtener una ecuación cuyas raíces sean $h_2 = 0.7$ menores que las raíces de (2).

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 & +8 & +17 & +2 & -14 & \underline{|.7} \\
 & .7 & +6.09 & +16.163 & +12.7141 & \\
\hline
1 & +8.7 & +23.09 & +18.163 & -1.2859 & = A_4 \\
 & .7 & +6.58 & +20.769 & & \\
\hline
1 & +9.4 & +29.67 & +38.932 & = A_3 & \\
 & .7 & +7.07 & & & \\
\hline
1 & +10.1 & +36.74 & = A_2 & & \\
 & .7 & & & & \\
\hline
1 & +10.8 & = A_1 & & &
\end{array}$$

Por tanto,

$$F_2(x) = x^4 + 10.8x^3 + 36.74x^2 + 38.932x - 1.2859 = 0 \tag{3}$$

tiene una raíz entre 0 y 0.1 Por división sintética se encuentra que $F_2(0.03) = -0.08458159$ y que $F_2(0.04) = 0.33085776$, por tanto, $F_2(x)$ tiene una raíz entre 0.03 y 0.04 y se puede derivar una ecuación cuyas raíces sean $h_3 = 0.03$ menores que las raíces de (3).

$$\begin{array}{rrrrrl}
1 & +10.8 & +36.74 & +38.932 & -1.2859 & \underline{|.03} \\
 & +\ .03 & +\ .3249 & +1.111947 & +1.20131841 & \\
\hline
1 & +10.83 & +37.0649 & +40.043947 & -.08458159 & = A_4 \\
 & .03 & +\ .3258 & +1.121721 & & \\
\hline
1 & +10.86 & +37.3907 & +41.165668 & = A_3 & \\
 & .03 & +\ .3267 & & & \\
\hline
1 & +10.89 & +37.7174 & = A_2 & & \\
 & +\ .03 & & & & \\
\hline
1 & +10.92 & = A_1 & & &
\end{array}$$

Por tanto,

$$F_3(x) = x^4 + 10.92x^3 + 37.7174x^2 + 41.165668x - .08458159 = 0 \tag{4}$$

tiene una raíz entre 0 y 0.01.

En virtud de que x es próxima a cero, x^4, x^3 y x^2 son depreciables en comparación con x; se omiten, por tanto, esos términos y se escribe

$$F_4(x') = 41.165668x' - .08458159$$

haciendo esta expresión igual a cero y resolviéndola para x', da x', $=$ 0.002
En consecuencia,

$$\begin{aligned} x &= h_1 + h_2 + h_3 + x' \\ &= 1 + .7 + .03 + .002 \\ &= 1.732 \end{aligned}$$

De la misma manera se pueden calcular las otras raíces irracionales de (1). En consecuencia, se puede calcular cada raíz con el grado de exactitud que se desee.

El cálculo de la raíz con aproximación de las dos primeras cifras decimales, en el ejemplo considerado se puede escribir en la siguiente forma abreviada.

1	+ 4	− 1	−12	− 6	1
	1	+ 5	+ 4	− 8	
1	+ 5	+ 4	− 8	−14	
	1	+ 6	+10		
1	+ 6	+10	+ 2		
	1	+ 7			
1	+ 7	+17			
	1				
1	+ 8	+17	+ 2	−14	.7
	.7	+ 6.09	+16.163	+12.7141	
1	+ 8.7	+23.09	+18.163	− 1.2859	
	.7	+ 6.58	+20.769		
1	+ 9.4	+29.67	+38.932		
	.7	+ 7.07			
1	+10.1	+36.74			
	.7				
1	+10.8	+36.74	+38.932	− 1.2859	.03
	.03	+ .3249	+ 1.111947	+ 1.20131841	
1	+10.83	+37.0649	+40.043947	− .08458159	
	+ .03	+ .3258	+ 1.121721		
1	+10.86	+37.3907	+41.165668		
	+ .03	+ .3267			
1	+10.89	+37.7174			
	+ .03				
1	+10.92	+37.7174	+41.165668	− .08458159	

Se puede calcular el dígito de la última cifra decimal tomando el negativo del cociente que resulta al dividir el número final de la última línea entre el número que inmediatamente le precede. Sin embargo, si la raíz debe calcularse con más de tres cifras decimales, se debe continuar el procedimiento anterior hasta obtener el dígito anterior al de la última cifra.

EJERCICIO 59: DECRECIMIENTO DE LAS RAICES DE ECUACIONES Y METODO DE HORNER

En los problemas 1 a 12 obténgase las ecuaciones cuyas raíces son las de la ecuación dada disminuídas en el número indicado a la derecha de la ecuación.

$x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = 0$, 3 2: $x^3 - 4x^2 - 2x + 1 = 0$, 4
$3x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = 0$, 2 4: $2x^3 + 3x^2 - x + 5 = 0$, 1
$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$, 2 6: $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 4x - 3 = 0$, 4
$2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - x - 6 = 0$, 3 8: $3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x - 4 = 0$, 1
$x^3 + 2x - 1 = 0$, .1 10: $x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$, .2
$2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$, .3 12: $2x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$, .4

Empleando el método de Horner, encuéntrense con aproximación de dos cifras decimales las menores raíces positivas de las ecuaciones de los problemas 13 a 24.

13: $x^3 + x^2 - 6x + 1 = 0$ 14: $x^3 - 2x^2 - 15x + 1 = 0$
15: $x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$ 16: $x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$
17: $x^3 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ 18: $x^3 - 3x^2 - 10x + 16 = 0$
19: $x^3 + x^2 - 9x - 5 = 0$ 20: $x^3 - 2x^2 - 8x - 2 = 0$
21: $2x^3 - 7x^2 - 3x + 1 = 0$ 22: $3x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0$
23: $2x^3 - x^2 - 3x - 2 = 0$ 24: $3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$

Encuéntrense, con aproximación de tres cifras decimales, las raíces irracionales de las ecuaciones de los problemas 25 a 32.

25: $x^3 - 3x^2 + 3x - 14 = 0$ 26: $x^3 - x - 7 = 0$
27: $x^3 + 2x^2 + 2x + 38 = 0$ 28: $x^3 + x - 1 = 0$
29: $x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = 0$ 30: $4x^4 + 8x^3 + 5x^2 - 6x - 6 = 0$
31: $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 14x + 4 = 0$
32: $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$

Empleando el método de Horner, encuéntrense, con aproximación de tres cifras decimales, los valores de las raíces reales indicadas.

33: $\sqrt[3]{5}$

SUGERENCIA: Resuélvase la ecuación $x^3 - 5 = 0$

34: $\sqrt[3]{6}$ 35: $\sqrt[3]{9}$ 36: $\sqrt[3]{10}$ 37: $\sqrt[4]{3}$
38: $\sqrt[4]{5}$ 39: $\sqrt[5]{2}$ 40: $\sqrt[5]{8}$

12.17 POLINOMIOS IDENTICOS

polinomios idénticos

El teorema que sigue es básico para el trabajo que se desarrollará en el capítulo 22 acerca de fracciones parciales.

Si dos polinomios de grado n son iguales para más de n valores de la variable, los polinomios son idénticos. Esto es, los coeficientes de potencias iguales de la variable, son iguales.

Se considera que los dos polinomios

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

son iguales para todos los n valores de $x = x_1, x_2, \cdots x_n$ y también para el valor $x = x_{n+1}$ diferente de los anteriores. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n - b_n) \\
&= (a_0 - b_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \qquad \textit{teorema del factor según ec. 12.3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

para $x = x_1, x_2, \cdots x_n$ y para $x = x_{n+1}$. Entonces, puesto que, $f(x_{+1}) = 0$ y ninguno de los factores que comprenden a x es cero para $x = x_{n+1}$ se concluye que $a_0 - b_0$, primer coeficiente de x, es cero. En consecuencia, $a_0 = b_0$.

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n - b_n) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{12.23}
$$

es de grado $n - 1$ y válida para $x = x_1, x_2, \cdots x_n$ y para $x = x_{n+1}$. En consecuencia, se tiene la misma situación que anteriormente y el primer coeficiente $a_1 - b_1$ es cero.

Entonces, $a_1 = b_1$. Mediante $(n - 1)$ repeticiones del procedimiento se puede demostrar que $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, $\cdots$, $a_n = b_n$ y con ello el teorema queda demostrado

12.18 LA ECUACION DE TERCER GRADO*

Se considerará ahora la ecuación general de tercer grado

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0 \tag{12.24}$$

Si se considera

$$x = y - \frac{b_1}{3}$$

se tiene

$$\left(y - \frac{b_1}{3}\right)^3 + b_1\left(y - \frac{b_1}{3}\right)^2 + b_2\left(y - \frac{b_1}{3}\right) + b_3 = 0 \tag{12.25}$$

o

$$y^3 + \left(b_2 - \frac{b_1^2}{3}\right)y + \frac{2b_1^3}{27} - \frac{b_1b_2}{3} + b_3 = 0 \tag{12.26}$$

ecuación cúbica reducida

ecuación en la que se ha suprimido el término de segundo grado y que se conoce como ecuación reducida de tercer grado. Esta ecuación se puede simplificar más aún haciendo la sustitución siguiente

$$b_2 - \frac{b_1^2}{3} = p \qquad \text{y} \qquad \frac{2b_1^3}{27} - \frac{b_1b_2}{3} + b_3 = q \tag{12.27}$$

Con lo cual, (12.26) queda

$$y^3 + py + q = 0 \tag{12.28}$$

* Para una discusión más completa de la ecuación de tercer grado se puede consultar el capítulo V de Dickson, New First Course in the Theory of Equations.

Para resolver la ecuación reducida de tercer grado (12.28), se introducen dos nuevas variables, u y v, cuya suma es raíz de (12.28). En consecuencia se tiene

$$y = u + v \tag{12.29}$$

y sustituyendo en (12.28), se tiene $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$,

o bien $$u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u + v) + q = 0 \tag{12.30}$$

Obteniéndose así una ecuación en u y en v. Sin embargo, para determinar los valores únicos de u y de v se necesita otra ecuación.
Esta se puede obtener, y además con ello simplificar (12.30), si se exige que u y v satisfagan la ecuación siguiente.

$$p + 3uv = 0 \tag{12.31}$$

Por tanto, (12.30) se convierte en

$$u^3 + v^3 + q = 0 \tag{12.32}$$

Si se elimina v a partir de (12.31) y de (12.32), resolviendo la primera para v en términos de u y de p y sustituyendo en (12.32) se obtiene

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$$

o bien

$$27u^6 + 27qu^3 - p^3 = 0 \tag{12.33}$$

Esta es una ecuación de segundo grado en u^3 y sus soluciones son

$$\begin{aligned} u^3 &= \frac{-27q \pm \sqrt{729q^2 + 108p^3}}{54} \\ &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2} \\ &= \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ &= \frac{-q}{2} \pm \sqrt{R} \end{aligned} \tag{12.34}$$

En donde

$$R = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \tag{12.35}$$

Haciendo

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{R} = A \tag{12.36}$$

por tanto, de (12.32)

$$v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{R} = B \tag{12.37}$$

Además, si se hiciera $u^3 = -q/2 - \sqrt{R}$, se obtendría $v^3 = -q/2 + \sqrt{R}$. Por tanto, se podrían intercambiar los valores de u y de v. Puesto que $u^3 = A$ y v^3 y en donde $= B$, los valores de u y de v son

$$u = \sqrt[3]{A},\ \omega\sqrt[3]{A},\ \omega^2\sqrt[3]{A} \tag{12.38}$$

y

$$v = \sqrt[3]{B},\ \omega\sqrt[3]{B},\ \omega^2\sqrt[3]{B} \tag{12.39}$$

donde

$$\omega = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad \omega^2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

Considerando $w^3 = 1$, se observa que $\sqrt[3]{A}$ y $\sqrt[3]{B}$, $\omega\sqrt[3]{A}$ y $\omega^2\sqrt[3]{B}$, y $\omega^2\sqrt[3]{A}$ y $\omega\sqrt[3]{B}$

son los únicos pares de valores de u y de v que satisfacen la condición (12.31). Si se sustituyen estos pares de valores de u y de v en (12.29) se obtiene

$$y_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$
$$y_2 = \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B}$$
$$y_3 = \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B}$$

Ya que $x = -\dfrac{b_1}{3}$, se observa que las raíces de (12.24) son

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} - \frac{b_1}{3} \\ x_2 &= \omega\sqrt[3]{A} + \omega^2\sqrt[3]{B} - \frac{b_1}{3} \\ x_3 &= \omega^2\sqrt[3]{A} + \omega\sqrt[3]{B} - \frac{b_1}{3} \end{aligned} \tag{12.40}$$

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 + 21x - 19 = 0$.

Solución: En la ecuación $x^3 - 3x^2 + 21x - 19 = 0$, $b_1 = 3$, $b_2 = 21$, $b_3 = -19$. Por tanto, según (12.27), $p = 21 - 3 = 18$, y $q = -2 + 21 - 19 = 0$. Además, según (12.35) $R = 216$. Entonces, según (12.36) y (12.37) $A = \sqrt{216}$ y $B = -\sqrt{216}$ finalmente $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\sqrt{216}} = \sqrt{\sqrt[3]{216}} = \sqrt{6}$, y $\sqrt[3]{B} = -\sqrt{6}$.

Por tanto, de acuerdo con (12.40) se tiene

$$x_1 = \sqrt{6} - \sqrt{6} + 1 = 1$$
$$x_2 = \omega\sqrt{6} + \omega^2(-\sqrt{6}) + 1 = 3\sqrt{2}i + 1$$
$$x_3 = \omega^2\sqrt{6} + \omega(-\sqrt{6}) + 1 = -3\sqrt{2}i + 1$$

Si R es negativo, $\sqrt{R}$ es imaginario y A y B son números complejos conjugados. En este caso se emplea el teorema de De Moivre para encontrar las raíces cúbicas de A y B y se escogen estas raíces de tal modo que también sean números imaginarios conjugados.

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 - 24x + 26 = 0$.

Solución. En la ecuación $x^3 - 3x^2 - 24x + 26 = 0$, $b_1 = -3$, $b_2 = -24$, $b_3 = -26$. Sustituyendo estos valores en (12.27) se tiene $p = -27$ y $q = 0$. Por tanto, según (12.35) $R = -729$, y en consecuencia $A = 27i$ y $B = -27i$. Para encontrar la raíz cúbica de A, se escribe

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{A} = A^{1/3} &= [27(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)]^{1/3} \\ &= 3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) \\ &= \tfrac{1}{2}(3\sqrt{3} + 3i)\end{aligned}$$

Análogamente

$$\sqrt[3]{B} = \tfrac{1}{2}(3\sqrt{3} - 3i)$$

Sustituyendo estos valores en (12.40) se tiene, $x = 1 + 3\sqrt{3}$, $x = 1 - 3\sqrt{3}$, y $x = 1$.

12.19 LA ECUACION DE CUARTO GRADO

Se considerará ahora la ecuación general de cuarto grado

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \tag{12.41}$$

Trasladando los tres últimos términos, (12.41) se tiene

$$x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e$$

El término de la izquierda contiene dos términos del cuadrado de $(x^2 + \frac{1}{2} bx)$ y se puede completar este cuadrado sumando $\frac{1}{4} b^2 x^2$. De este modo

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}bx)^2 = (\tfrac{1}{4}b^2 - c)x^2 - dx - e$$

Luego, se suma $(x^2 + \frac{1}{2}bx)y + \frac{1}{4}y^2$ a cada miembro y se obtiene

$$\begin{aligned}(x^2 + \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{1}{2}y)^2 = (\tfrac{1}{4}b^2 - c + y)x^2 \\ + (-d + \tfrac{1}{2}by)x - e + \tfrac{1}{4}y^2\end{aligned} \tag{12.42}$$

El miembro de la izquierda es un cuadrado perfecto y, en consecuencia, el miembro de la derecha también debe serlo. Por tanto, su discriminante es cero, esto es

$$(-d + \tfrac{1}{2}by)^2 - 4(\tfrac{1}{4}b^2 - c + y)(-e + \tfrac{1}{4}y^2) = 0$$

o desarrollando los binomios, sumando términos semejantes y cambiando de signo

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0 \tag{12.43}$$

ecuación resolvente de tercer grado

Ecuación conocida como *ecuación resolvente de tercer grado*. Si se escoje cualquier raíz y de (12.43) y se sustituye en (12.42), el miembro de la derecha se convierte en el cuadrado perfecto de una función de primer grado de x, tal como $mx + n$. Por tanto,

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{1}{2}y)^2 = (mx + n)^2$$

esto es

$$x^2 + \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{1}{2}y = mx + n \tag{12.44}$$

y

$$x^2 + \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{1}{2}y = -mx - n$$

De ese modo, la resolución de la ecuación de cuarto grado (12.41), se reduce a resolver las dos ecuaciones de segundo grado mostradas en (12.44).

EJEMPLO Resolver

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + x + \tfrac{1}{4} = 0 \tag{1}$$

Solución: Trasladando los tres últimos términos, se tiene

$$x^4 + 2x^3 = x^2 - x - \tfrac{1}{4}$$

Completando el cuadrado del miembro de la izquierda mediante la suma de x^2, se tiene

$$(x^2 + x)^2 = 2x^2 - x - \tfrac{1}{4}$$

Ahora, sumando a cada miembro $(x^2 + x)\ y + \tfrac{1}{4}y^2$, se tiene

$$(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)y + \tfrac{1}{4}y^2 = 2x^2 - x - \tfrac{1}{4} + (x^2 + x)y + \tfrac{1}{4}y^2$$

o

$$(x^2 + x + \tfrac{1}{2}y)^2 = x^2(2 + y) + x(-1 + y) - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}y^2 \tag{2}$$

Puesto que el miembro de la izquierda es un cuadrado perfecto, también debe serlo el de la derecha. Por tanto, su discriminante es cero. Así

$$(-1 + y)^2 - 4(2 + y)(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}y^2) = 0$$
$$1 - 2y + y^2 + 2 + y - 2y^2 - y^3 = -y^3 - y^2 - y + 3 = 0$$

Una solución de esta ecuación es 1. Por tanto, $y = 1$ en (2) debe hacer que el miembro de la derecha sea un cuadrado perfecto. Sustituyendo $y = 1$ en (2), da

$$(x^2 + x + \tfrac{1}{2})^2 = 3x^2$$

Tomando la raíz de cada miembro

$$x^2 + x + \tfrac{1}{2} = \sqrt{3}x \qquad \text{y} \qquad x^2 + x + \tfrac{1}{2} = -\sqrt{3}x$$

En consecuencia, las raíces de (1), son las raíces de

$$x^2 + (1 - \sqrt{3})x + \tfrac{1}{2} = 0 \qquad \text{y} \qquad x^2 + (1 + \sqrt{3})x + \tfrac{1}{2} = 0$$

De ese modo

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3 - 2}}{2} \qquad \text{y}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2 - 2\sqrt{3}}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{3}}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{3}}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2}$$

EJERCICIO 60: SOLUCION DE ECUACIONES DE TERCERO Y CUARTO GRADOS

Resuélvanse las ecuaciones de los problemas 1 a 16 según el método del Pr. 12.18.

1: $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$
2: $x^3 - 3x^2 + 12x - 10 = 0$
3: $x^3 - 6x^2 + 16x - 16 = 0$
4: $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$
5: $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$
6: $x^3 + 6x^2 + 39x + 62 = 0$
7: $x^3 + 9x^2 + 39x + 63 = 0$
8: $x^3 + 9x^2 + 35x + 51 = 0$
9: $x^3 - 6x^2 + 6x + 8 = 0$
10: $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$
11: $x^3 - 9x^2 + 21x - 13 = 0$
12: $x^3 - 12x^2 + 42x - 44 = 0$
13: $x^3 + 9x^2 + 15x - 9 = 0$
14: $x^3 - 6x^2 + 16 = 0$
15: $x^3 - 9x^2 + 54 = 0$
16: $x^3 - 9x^2 + 15x + 9 = 0$

Resuélvanse las ecuaciones siguientes por medio del método del Pr. 12.19.

17: $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$
18: $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$
19: $2x^4 - x^3 - 14x^2 + 19x - 6 = 0$

NOTA. Divídase entre el coeficiente de x^4 antes de aplicar el Pr. 12.19.

20: $2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6 = 0$
21: $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6 = 0$
22: $x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 6 = 0$
23: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 2 = 0$
24: $x^4 - 4x^3 - x^2 + 12x - 6 = 0$
25: $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$
26: $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5 = 0$
27: $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4 = 0$
28: $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 12 = 0$

13 DESIGUALDADES

EN VARIOS de los capítulos anteriores se han estudiado ecuaciones las cuales consisten en la igualdad de dos expresiones. Sin embargo, es natural que exista la posibilidad de que dos expresiones no sean iguales sino que una sea mayor que la otra. Es posible escribir las proposiciones que expresan desigualdad en forma simbólica y encontrar condiciones para la validez de dichas proposiciones mediante procesos que en muchos aspectos son semejantes a los ya empleados para resolver ecuaciones.

13.1 DEFINICIONES Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

En el Párrafo 8.9 se demostró que una ecuación de segundo grado tiene raíces reales y desiguales, únicamente si su descriminante es mayor que cero. Por ejemplo, las raíces de $x^2 + kx - 1 = 0$ son reales y desiguales, únicamente si

$$k^2 + 4 > 0 \tag{13.1}$$

De igual manera, las raíces de $x^2 + 2x + k = 0$ son reales y desiguales, únicamente si

$$4 - 4k < 0 \tag{13.2}$$

Los signos que se introdujeron en (13.1) y (13.2) indican las relaciones *mayor que* y *menor que*, respectivamente. Puede observarse que el signo de la desigualdad se dirige siempre hacia la cantidad más pequeña.

Las proposiciones (13.1) y (13.2) son ejemplos de situaciones en las que es necesario determinar los valores de las variables para los cuales la función es mayor o menor que otra. Tales situaciones se presentan frecuentemente en Matemáticas y en este capítulo se estudiarán métodos referente a ellas. Una *desigualdad* es una proposición de acuerdo con la cual una cantidad real es mayor o menor que otra.

Dos desigualdades tienen el *mismo sentido* o *sentido opuesto* según los signos de ellas se dirijan en igual o en opuesta dirección.

desigualdad absoluta

desigualdad condicional

En (13.1), k^2 nunca es negativo para valores reales de k. Por tanto, $k^2 + 4$ es positivo para todo valor real de k. En cambio, el miembro de la izquierda de (13.2) es mayor que cero solamente cuando k es menor que uno. De ese modo las proposiciones (13.1) y (13.2) ilustran las definiciones siguientes. Una desigualdad que es válida para todos los valores reales de la variable es una *desigualdad absoluta*. Una desigualdad que es válida para algunos de los valores reales de la variable, pero no lo es para otros, es una *desigualdad condicional*.

La solución de una desigualdad es el conjunto de valores de la variable para los cuales la desigualdad es válida. El procedimiento para resolver desigualdades se basa en los teorema siguientes.

teoremas sobre la adición sustracción, multiplicación y división de desigualdades

El sentido de una desigualdad no se altera, si a cada miembro se suma o se resta un mismo número.

El sentido de una desigualdad no se altera, si cada miembro se multiplica o se divide por un mismo número positivo.

El sentido de una desigualdad se invierte si cada miembro se multiplica o se divide por un mismo número negativo.

La demostración de estos teoremas comprende aplicaciones repetidas de un razonamiento similar al que se indica a continuación.

Se considerará que $a < b$ y se demostrará

$$a + c < b + c \tag{13.3}$$
$$ap < bp \qquad p > 0 \tag{13.4}$$
$$am > bm \qquad m < 0 \tag{13.5}$$

Si $a < b$, entonces

$$a - b = n \qquad n < 0 \tag{13.6}$$

Sumando $c - c$ $(= 0)$ al miembro de la izquierda de (13.6), se tiene

$$a - b + c - c = n$$

o

$$(a + c) - (b + c) = n \qquad n < 0$$

Por tanto

$$a + c < b + c$$

Si se multiplica cada miembro de (13.6) por $p > 0$, se tiene

$$ap - bp = pn$$

Además, puesto que $p > 0$ y $n < 0$, se concluye que $pn < 0$.
Por tanto, $ap < bp$.

De manera semejante, si se multiplica cada miembro de (13.6) por $m < 0$, se obtiene $am - bm = mn$. En este caso mn es positivo, puesto que $m < 0$ y $n < 0$. Por tanto, $am > bm$.

Los pasos necesarios para completar la demostración de estos teoremas aparecen en los cuatro primeros problemas del Ejercicio 61.

teoremas sobre potencias de desigualdades

Si a y b son números positivos desiguales y n es entero positivo, entonces a^n y b^n, y $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$(*) son desiguales en el mismo sentido en que lo sean a y b.

Según (2.13), en el Pr. 2.4 se tiene

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{13.7}$$

$$\begin{aligned} a - b &= (\sqrt[n]{a})^n - (\sqrt[n]{b})^n \\ &= (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})[(\sqrt[n]{a})^{n-1} + (\sqrt[n]{a})^{n-2}(\sqrt[n]{b}) + \cdots \\ &\qquad + (\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b})^{n-2} + (\sqrt[n]{b})^{n-1}] \end{aligned} \tag{13.8}$$

Puesto que a y b son positivos, el segundo factor del segundo miembro de (13.7) y (13.8) es positivo. Por tanto, $a^n - b^n$, $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$, y $a - b$ tienen el mismo signo algebraico.

EJEMPLO Como ejemplo para ilustrar el uso de los teoremas anteriores, se demostrará que que si $x \neq y$, entonces $x^2 + y^2 > 2xy$.

Solución. Puesto que $x \neq y$, entonces ambos son diferentes de cero. Por tanto, $x - y = n$, siendo $n \neq 0$. En consecuencia, $(x - y)^2 = n^2$.
Ahora bien, puesto que n^2 es positivo, se tiene

$$\begin{aligned} (x - y)^2 &> 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 &> 0 \\ x^2 + y^2 &> 2xy \qquad \textit{según el teorema.} \end{aligned}$$

EJERCICIO 61: DEMOSTRACIONES DE PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Demuéstrense las proposiciones de los problemas 1 a 8.

1: Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$. para $a - c < b - c$.
2: Si $a < b$, entonces $a/p < b/p$ para $p > 0$.
3: Si $a < b$, entonces $a/m > b/m$ para $m < 0$.
4: Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$.
5: Si $a > b$, entonces $ap > bp$ para $p > 0$.
6: Si $a > b$, entonces $am < bm$ para $m < 0$.
7: Si $a > b$, entonces $a/p > b/p$ para $p > 0$.
8: Si $a > b$, entonces $a/m < b/m$ para $m < 0$.
9: Demuéstrese que $x/y + y/x > 2$ para $0 < x < y$.

* Recuerdese que $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ indican las raíces principales de a y b respectivamente y que si a y b son positivas, sus raíces son también positivas.

10: Demuéstrese que $x/y + y/x > 2$ para $x < y < 0$.

11: Demuéstrese que $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$ para $0 < x < y$.

12: Demuéstrese que $x + x^{-1} > 2$ para $x > 0$ y $x \neq 1$.

13: Demuéstrese que $(x+1)/(y+1) > x/y$ para $0 < x < y$.

14: Demuéstrese que $(x-1)(x+1) < (x^2-1)(x^2+1)$ para $x > 1$.

15: Demuéstrese que $x < x^2$ para $x > 1$.

16: Demuéstrese que $x^2 < x$ para $0 < x < 1$.

17: Demuéstrese que $x^2 > y^2$ para $x > y > 0$.

18: Demuéstrese que $x^2 - y^2 > (x-y)^2$ para $x > y > 0$.

19: Demuéstrese que $x^3 > y^3$ para $x > y > 0$.

20: Demuéstrese que $x^3 - y^3 > (x-y)^3$ para $x > y > 0$.

13.2 DESIGUALDADES CONDICIONALES

Como se indicó en el párrafo anterior, la solución de una desigualdad condicional es el conjunto de valores de la variable para los cuales la desigualdad es válida. En este párrafo se presentarán dos métodos, uno gráfico y otro algebraico, para encontrar esa solución.

Método gráfico. Primero se ejemplificará el método y luego se indicarán los pasos para obtener gráficamente la solución de una desigualdad. Para resolver la desigualdad

$$6x^2 - 2 > -x \tag{13.9}$$

se traslada $-x$ y se obtiene

$$6x^2 + x - 2 > 0 \tag{13.10}$$

De acuerdo con el teorema 1, cualquier valor de x que satisface a (13.10), también satisface a (13.9). Haciendo ahora el miembro de la izquierda de (13.10), igual a y, se tiene

$$y = 6x^2 + x - 2 \tag{13.11}$$

y con ella se buscan los valores de x para los cuales $y > 0$. Se construye la gráfica de 13.11, empleando la tabla siguiente:

x	-2	-1	0	1	2
y	20	3	-2	5	24

La gráfica de la fig. 13.1 corta el eje de las X en los puntos cuyas abscisas son aproximadamente 0.5 y -0.7, respectivamente. Naturalmente y es positivo para todo valor de x mayor que 0.5 y menor que -0.7. Por tanto, las soluciones de (13.9) son

$$x > 0.5 \text{ y } x < -0.7.$$

Los pasos para obtener gráficamente la solución de una desigualdad, se muestran a continuación.

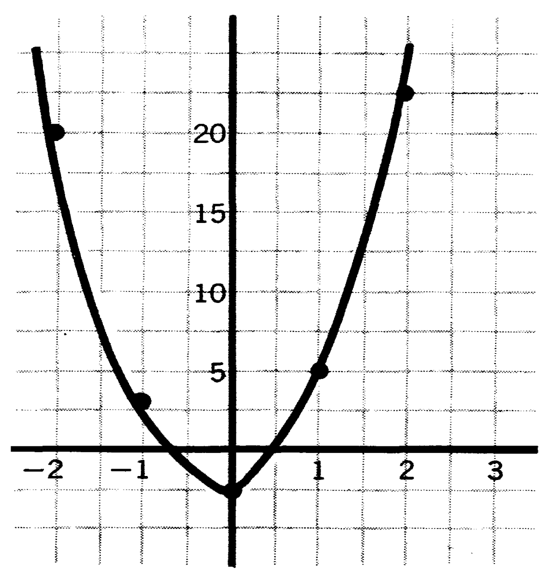


Figura 13.1

pasos para resolver gráficamente una desigualdad

1. Se trasladan todos los términos a un miembro.
2. Se iguala la expresión resultante con una nueva variable.
3. Se dibuja la gráfica de la ecuación obtenida en el paso anterior.
4. La solución consiste de aquellos valores de x para los cuales la gráfica está arriba o abajo del eje de las X, según sea positiva o negativa la expresión del paso 1.

Método algebraico. Los pasos que se presentan a continuación para resolver algebraicamente una desigualdad de primer grado son básicamente los mismos que se emplearon para resolver la ecuación de primer grado.

pasos para resolver algebraicamente una desigualdad

1. Se trasladan al miembro de la izquierda los términos que contienen la variable y al miembro de la derecha los términos constantes.
2. Se efectúa la suma de los términos en cada miembro.
3. Se dividen los dos miembros de la desigualdad obtenida en el paso anterior, entre el coeficiente de la variable, teniendo cuidado de que si dicho coeficiente es negativo debe cambiarse el signo de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Encontrar las condiciones para que la desigualdad $2x + 3 > 5x - 9$ sea verdadera.

Solución: La resolución de $2x + 3 > 5x - 9$ consiste de los pasos siguientes

$2x - 5x > -9 - 3$ *se han traspuesto los términos*

$-3x > -12$ *se han sumado los términos*

$x < 4$ *se han dividido los dos miembros entre -3 invirtiendo el signo de la desigualdad.*

En la solución de desigualdades de grado superior a uno se hace uso de la propiedad según la cual una función racional entera de x cambia de signo únicamente en los ceros de la función. Por ejemplo, si los ceros de $f(x)$ son r_1, r_2 y r_3 y siendo $r_1 < r_2 < r_3$, entonces $f(x)$ no cambiará de signo en ninguno de los intervalos $\infty < x < r_1$, $r_1 < x < r_2$, $r_2 < x < r_3$ y $r_3 < x < \infty$. El método se ilustrará con los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 2 Resolver $2x^2 < 2 - 3x$.

Solución: Para resolver $2x^2 < 2 - 3x$ (1)

se trasladan todos los términos a la izquierda, y se tiene $2x^2 + 3x - 2 < 0$ (2)

Se obtienen los ceros, -2 y $\frac{1}{2}$, de $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ resolviendo la ecuación de segundo grado $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

El siguiente paso consiste en determinar el signo de $f(x)$ en cada uno de los intervalos $-\infty < x < -2$, $-2 < x < \frac{1}{2}$, y $\frac{1}{2} < x < \infty$ asignando a x un valor en cada uno de ellos.

Siendo $-\infty < -3 < -2$, y

$$f(-3) = 2(-3)^2 + 3(-3) - 2 = 18 - 9 - 2 = 7$$

$f(x) > 0$ en el primer intervalo. Análogamente, $f(x) < 0$ en el segundo, puesto que $f(0) = -2$, y $f(x) > 0$ en el tercero, puesto que $f(1) = 3$. Por tanto ya que $f(x) < 0$ en el segundo intervalo, la solución de (1) es $-2 < x < \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 3 Resolver la desigualdad $x^3 + 3x^2 > x + 3$.

Solución. Para resolver la desigualdad

$x^3 + 3x^2 - x - 3 > 0$ *se ha transpuesto $x + 3$*

Los ceros de la función

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 3x^2 - x - 3 && \textit{agrupando y factorizando} \\
&= x^2(x + 3) - (x + 3) \\
&= (x^2 - 1)(x + 3) && \textit{sacando } (x + 3) \textit{ factor común} \\
&= (x + 1)(x - 1)(x + 3)
\end{aligned}
$$

son $x = -3$, $x = 1$, y $x = -1$.

Los intervalos por considerar son $-\infty < x < -3$, $-3 < x < -1$, $-1 < x < 1$ y $1 < x < \infty$.

En el primero, $f(x) < 0$, puesto que $f(-4) = -64 + 48 + 4 - 3 = -15$. En el segundo, $f(x) > 0$, puesto que $f(-2) = -8 + 12 + 2 - 3 = 3$. En el tercero, $f(x) < 0$, puesto que $f(0) = -3$. En el cuarto $f(x) > 0$, puesto que $f(2) = 15$.

Por tanto, la solución de la desigualdad dada es $-3 < x < -1$ y $1 < x < \infty$.

Los ejemplos anteriores sirven para ilustrar los pasos de la solución de desigualdades en grado superior a uno.

pasos para resolver una desigualdad no lineal

1. Se trasladan todos los términos al miembro de la izquierda.
2. Se determinan los ceros de la función obtenida en el paso anterior.
3. Se determina el signo de la función en los intervalos: (*a*) para todos los valores de x menores que el menor de los ceros. (*b*) para todos los valores de x entre dos ceros consecutivos. (*c*) para todos los valores de x mayores que el mayor de los ceros
4. Se seleccionan los intervalos del paso 3 que satisfagan la desigualdad dada.

13.3 DESIGUALDADES CONDICIONALES QUE COMPRENDEN VALORES ABSOLUTOS

Si se usa la definición de valor absoluto dada en el Pr. 1.1, se observa que la desigualdad del tipo

$$|ax + b| < c \qquad c > 0 \tag{13.12}$$

requiere que $ax + b$ esté entre c y $-c$ como se indica en la siguiente línea *

* Al manejar desigualdades condicionales de este tipo conviene recordar que una de las posibles interpretaciones del valor absoluto es que equivale a una distancia medida desde el origen de la escala numérica (figura 11.1) e *independiente de la dirección*. Por tanto, $ax + b$ representa dos puntos, uno a la derecha y otro a la izquierda del origen de la escala numérica y equidistantes de dicho origen. Entonces la ecuación (13.12) puede interpretarse diciendo que $\pm c$ cae a mayor distancia del origen que $\pm (ax + b)$ o que $+ (ax + b)$ y $- (ax + b)$ caen entre $-c$ y $+c$.

Por tanto, si un valor de x satisface tanto a $ax + b < c$, como a $ax + b > -c$, satisface también a (13.12).

Además, la desigualdad $|rx + t| > c$ requiere que $rx + t$ represente un punto que esté a la derecha de c o uno que esté a la izquierda de $-c$. Por tanto, un valor de x satisface a $|rx + t| > c$, si satisface a $rx + t > c$, o si satisface a $rx + 1 < -c$.

EJEMPLO 1 Resolver

$$\left| \frac{x}{3} + 2 \right| < 4$$

Solución: La desigualdad se satisface únicamente si se satisfacen las dos desigualdades

$$\frac{x}{3} + 2 < 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{3} + 2 > -4$$

Trasladando 2 en cada una de ellas, se tienen

$$\frac{x}{3} < 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{3} > -6$$

Por tanto, multiplicando por 3 en cada caso se observa que la desigualdad original se satisface para valores de x que sean $x < 6$ y $x > -18$. Entonces, la solución de la desigualdad es $-18 < x < 6$.

EJEMPLO 2 Resolver

$$\left| \frac{4x}{5} - 1 \right| > 3$$

Solución: Esta desigualdad se satisface si se satisfacen cualquiera de las dos desigualdades siguientes

$$\frac{4x}{5} - 1 > 3 \qquad \text{o} \qquad \frac{4x}{5} - 1 < -3$$

Trasladando -1 en cada una de ellas, se tiene

$$\frac{4x}{5} > 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{4x}{5} < -2$$

Por tanto, multiplicando cada una por $\frac{5}{4}$ se observa que la desigualdad original se satisface para valores de x mayores que 5 y para valores de x menores que $-\frac{5}{2}$, esto es, para $x > 5$ y para $x < -\frac{5}{2}$.

EJERCICIO 62: SOLUCION DE DESIGUALDADES

Resuélvanse gráficamente las desigualdades de los problemas 1 a 16.

1: $3x - 1 > x - 2$
2: $4x + 3 > x + 7$
3: $2x + 4 < -x + 9$
4: $5x + 2 < 2x - 5$
5: $2x - 1 < 4x - 3$
6: $3x + 5 < 7x - 1$
7: $1 - x > 3x - 5$
8: $3 - 2x > 2x - 5$

9: $x^2 - 3x < 1$

10: $x^2 - 6 < 2x$

11: $x^2 > -3x + 8$

12: $x^2 + 6 > 6x$

13: $x^3 + 5 > x^2 + 5x$

14: $x^3 - 2x + 2 > x^2$

15: $x^3 - x < 2 - 2x^2$

16: $x^3 - 2x^2 < 3x - 6$

Resuélvanse algebraicamente las desigualdades de los problemas 17 a 56.

17: $x + 1 > 3$

18: $x + 5 > 1$

19: $x - 1 < 1$

20: $x - 3 < -4$

21: $3x - 1 < x + 3$

22: $4x - 5 < x - 2$

23: $5x + 2 > 3x + 3$

24: $6x - 3 > 4x - 6$

25: $2x + 7 > 3x + 5$

26: $3x - 5 > 7x + 2$

27: $-2x + 1 < x + 3$

28: $-x + 2 < 3x - 7$

29: $\dfrac{2x - 1}{3} + 1 > \dfrac{x + 1}{2}$

30: $\dfrac{x + 3}{4} - 2 > \dfrac{x - 1}{3}$

31: $\dfrac{3x - 2}{2} - 1 < \dfrac{2x - 1}{4}$

32: $\dfrac{2x - 1}{3} < 1 - \dfrac{x - 2}{5}$

33: $(x - 1)(2x + 1) < 0$

34: $(x - 2)(-3x + 2) < 0$

35: $(2x - 3)(3x + 2) > 0$

36: $(5x - 4)(4x - 1) > 0$

37: $3x^2 - 5x + 2 > 0$

38: $-2x^2 - 5x + 3 > 0$

39: $-6x^2 + x + 2 < 0$

40: $2x^2 + x - 3 < 0$

41: $(x - 1)(x - 2)(2x + 1) < 0$

42: $(2x - 3)(x + 1)(x - 2) < 0$

43: $(2x - 5)(x + 1)(-3x + 2) > 0$

44: $(3x - 7)(x + 3)(x - 4) > 0$

45: $|x - 1| < 2$

46: $|x + 2| < 1$

47: $|x - 3| > 1$

48: $|x - 4| < 2$

49: $|2x - 5| < 1$

50: $|3x - 1| < 3$

51: $|-2x + 1| < 4$

52: $|-5x + 3| < 2$

53: $|2x - 1| > 3$

54: $|3x + 2| > 8$

55: $|5x + 3| > 2$

56: $|2x - 3| > 3$

Encuéntrense los valores reales de x para los cuales las siguientes expresiones representan números reales.

57: $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$

58: $\sqrt{-x^2 - a^2}$, a real

59: $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a < 0$

60: $\sqrt{x^2 + a^2}$, a real

61: $\dfrac{\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x + 2}}$

62: $\dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 3}}$

63: $\sqrt{\dfrac{x - 3}{x + 1}}$

64: $\sqrt{\dfrac{x - 2}{x + 2}}$

14 LOGARITMOS

UN DESCUBRIMIENTO MATEMÁTICO del siglo diecisiete, basado en las propiedades de los exponentes, estaba destinado a convertirse en una herramienta de valor incalculable en la reducción del trabajo en operaciones aritméticas. En épocas más recientes los conceptos matemáticos en que descansa este descubrimiento han llegado a ser de gran importancia en las matemáticas avanzadas y en la ciencia en general. El mencionado descubrimiento se llama teoría de los logaritmos y sus fundamentos y aplicaciones serán el tema del presente capítulo.

14.1 DEFINICIONES

En la proposición

$$2^3 = 8 \tag{14.1}$$

el término exponente se usa para indicar la relación que existe entre 2 y 3. Sin embargo, en (14.1), 3 también está relacionado con 8 y para indicar esa relación se usa el término logaritmo. En otras palabras, en (14.1) 3 es exponente de 2 y además logaritmo de 8, o con mayor precisión, logaritmo de base 2 de 8. En consecuencia, este capítulo será una continuación de la discusión acerca de exponentes. En particular, se mostrará cómo los exponentes o logaritmos, se pueden emplear para simplificar cálculos numéricos o para resolver ciertos tipos de ecuaciones que no se pueden resolver por métodos más elementales. En virtud de que se emplearán las definiciones y las leyes del capítulo 7 es conveniente que el lector revise ese capítulo antes de continuar más adelante.

Como base de la discusión subsecuente se expondrá la definición siguiente: El *logaritmo* de un número, para una base dada, es el exponente que indica la potencia a la que debe elevarse la base para obtener el número.

logaritmo

La forma abreviada de esa proposición es: *el logaritmo de base b de N es L* o bien $\log_b N = L$. Si se usa esta notación, la definición se puede expresar simbólicamente como sigue

definición simbólica de logaritmo

$$\log_b N = L \quad \text{implica que} \quad b^L = N \qquad (14.2)$$

Puede observarse que la abreviatura log se escribe sin poner punto a su terminación y que el símbolo para la base aparece como subíndice como se ve en los ejemplos siguientes.

$\log_8 64 = 2$ ya que $8^2 = 64$
$\log_4 64 = 3$ ya que $4^3 = 64$
$\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$ ya que $81^{1/2} = 9$
$\log_a 1 = 0$ ya que $a^0 = 1$

En estos ejemplos puede advertirse que el logaritmo puede ser entero, fraccionario o cero.
Además, en muchos casos, si se conocen dos de las tres letras de (14.2) la tercera se puede encontrar fácilmente.

EJEMPLO 1 Encontrar el valor de N si $\log_7 N = 2$.

Solución. Si se convierte la expresión logarítmica anterior a la forma exponencial, se tiene $7^2 = N$ entonces, es obvio que $N = 49$.

EJEMPLO 2 Si $\log_b 125 = 3$, encontrar el valor de b.

Solución. Empleando (14.2) se tiene

$b^3 = 125$.

Por tanto,

$b = \sqrt[3]{125} = 5$.

EJEMPLO 3 Encontrar a si $\log_{27} 3 = a$.

Solución. De nuevo, empleando (14.2), se tiene

$27^a = 3$.

Por tanto, puesto que $27^{\frac{1}{3}} = 3$, se concluye que

$a = \frac{1}{3}$.

EJERCICIO 63: EXPRESIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Mediante el uso de la ecuación (14.2), exprésense en forma exponencial las proposiciones de los problemas 1 a 20.

1: $\log_3 9 = 2$
2: $\log_6 36 = 2$
3: $\log_2 8 = 3$
4: $\log_2 16 = 4$

5: $\log_2 \frac{1}{4} = -2$
6: $\log_3 \frac{1}{27} = -3$
7: $\log_4 \frac{1}{64} = -3$
8: $\log_5 \frac{1}{625} = -4$
9: $\log_4 32 = \frac{5}{2}$
10: $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$
11: $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$
12: $\log_{64} 16 = \frac{2}{3}$
13: $\log_{1/4} \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$
14: $\log_{8/27} \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$
15: $\log_{9/16} \frac{243}{32} = \frac{5}{2}$
16: $\log_{1/64} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
17: $\log_{a^2} a^6 = 3$
18: $\log_{a^{1/3}} a^2 = 6$
19: $\log_{a^3} a^2 = \frac{2}{3}$
20: $\log_{a^4} a^6 = \frac{3}{2}$

Mediante el uso de la ecuación (14.2), exprésense en forma logarítmica las proposiciones de los problemas 19 a 36.

21: $7^2 = 49$
22: $3^4 = 81$
23: $2^5 = 32$
24: $5^3 = 125$
25: $25^{1/2} = 5$
26: $16^{1/4} = 2$
27: $27^{2/3} = 9$
28: $32^{3/5} = 8$
29: $2^{-4} = \frac{1}{16}$
30: $3^{-2} = \frac{1}{9}$
31: $(\frac{1}{8})^{-1/3} = 2$
32: $(\frac{1}{25})^{-1/2} = 5$
33: $(\frac{1}{27})^{-2/3} = 9$
34: $(\frac{9}{16})^{-1/2} = \frac{4}{3}$
35: $(\frac{16}{81})^{-3/4} = \frac{27}{8}$
36: $(\frac{1}{64})^{-5/6} = 32$

Encuéntrense los valores de los logaritmos de los problemas 37 a 56.

37: $\log_8 64$
38: $\log_5 25$
39: $\log_4 16$
40: $\log_{10} 100$
41: $\log_2 64$
42: $\log_4 64$
43: $\log_5 625$
44: $\log_{10} 10{,}000$
45: $\log_{225} 15$
46: $\log_{121} 11$
47: $\log_{144} 12$
48: $\log_{625} 25$
49: $\log_{343} 7$
50: $\log_{243} 3$
51: $\log_{128} 2$
52: $\log_{1000} 10$
53: $\log_{b^2} b^8$
54: $\log_{b^6} b^4$
55: $\log_{b^{3/5}} b^6$
56: $\log_{b^{5/6}} b^{1/2}$

Encuéntrense los valores de las literales indicadas en los problemas 57 a 72.

57: $\log_6 n = 3$
58: $\log_4 n = 4$
59: $\log_2 n = 8$
60: $\log_3 n = 5$
61: $\log_b 49 = 2$
62: $\log_b 125 = 3$
63: $\log_b 27 = 3$
64: $\log_b 1000 = 3$
65: $\log_b 9 = \frac{1}{2}$
66: $\log_b 3 = \frac{1}{4}$
67: $\log_b 6 = \frac{1}{3}$
68: $\log_b 5 = \frac{1}{4}$
69: $\log_b 4 = \frac{2}{3}$
70: $\log_b 27 = \frac{3}{4}$
71: $\log_b 16 = \frac{4}{5}$
72: $\log_b 125 = \frac{3}{4}$

14.2 LOGARITMOS COMUNES O DE BRIGGS

Los ejemplos 1, 2, 3, 4 y 7 del párrafo anterior, ilustran situaciones en las cuales es posible determinar el logaritmo de un número a simple vista. En general, esto no es posible. Por ejemplo, no se puede determinar por métodos elementales el valor de L en la expresión $\log_{10} 32.71 = L$. Sin embargo, puesto que $10 < 32.71. < 10^2$, se sabe entonces que el valor de L está entre 1 y 2. Existen tablas en las cuales se puede encontrar el logaritmo de base diez de cualquier número. Recíprocamente, estas tablas se pueden usar para encontrar un número cuando se conoce su logaritmo de base diez. El método para usar dichas tablas se expondrá en los tres párrafos siguientes.

Si la base es 10, el logaritmo de un número se llama logaritmo común o de Briggs. Al trabajar con este tipo de logaritmos se acostumbra omitir el símbolo de la base. Por tanto, en la proposición $\log N = L$ se sobrentiende que la base es 10.

14.3 CARACTERISTICA Y MANTISA

Como se indicó en el párrafo anterior, el log. 32.71 está entre 1 y 2. En realidad este logaritmo es irracional y no puede expresarse exactamente en forma decimal, pero con aproximación de cuatro cifras decimales es 1.5146. De esta manera, log 32.71 = 1.5146, y, por tanto, de acuerdo con (14.2), $32.71 = 10^{1.5146}$. Evidentemente,

$$3271 = 32.71(10)^2 = (10^{1.5146})(10^2) = 10^{1.5146+2} = 10^{3.5146}$$

Por tanto, log 3271 = 3.5146. Análogamente,

$$3.271 = \frac{32.71}{10} = \frac{10^{1.5146}}{10} = 10^{1.5146-1} = 10^{0.5146}$$

y

$$.03271 = \frac{32.71}{10^3} = \frac{10^{1.5146}}{10^3} = 10^{1.5146-3} = 10^{-2+.5146}$$

Por tanto

$$\log 3.271 = 0.5146$$

y

$$\log .03271 = -2 + .5146$$

La razón para emplear esta notación en vez del número equivalente negativo — 1.4853. se explicará más adelante.

Los ejemplos anteriores ilustran la definición siguiente:

característica
mantisa

El logaritmo común de un número se puede expresar aproximadamente como la suma de un entero, positivo, cero o negativo, más una fracción decimal positiva. Cuando el logaritmo se escribe en esta forma, el entero se llama *característica* y la fracción positiva *mantisa.*

La mantisa de un logaritmo se obtiene de una tabla de acuerdo con el método que se explicará en el Pr. (14.5).

Si la característica de un logaritmo es positiva, entonces la característica y la mantisa se escriben como un solo número, por ejemplo, en el caso de log 32.71 = 1.5146. Sin embargo, cuando la característica es negativa, como en el caso de log 0.03271 = —2 + 0.5146, la característica y la mantisa no se pueden expresar como un solo número, ya que el primero es negativo y mayor que el segundo, que es positivo. En virtud de que es conveniente conservar positiva la parte fraccionaria del logaritmo, se acostumbra escribir el logaritmo anterior —2 + 0.5146 como 8.5146 — 10.* En general, si la característica de un logaritmo es —c, se acostumbra expresar —c en la forma n — 10 y luego escribir la mantisa precedida de un punto decimal a la derecha de n.

* Un logaritmo del tipo —2 + 0.5146 se escribe algunas veces como $\bar{2}.5146$. Sin embargo, en este libro no se usará esa notación.

Cuando se corre el punto decimal de un número a la derecha o a la izquierda, el número queda multiplicado por una potencia entera de diez, positiva o negativa. De ese modo, el logaritmo del número crece o decrece en un entero y la operación afecta sólo a la característica. Así, la característica del logaritmo de un número depende sólo de la posición del punto decimal, en tanto que la mantisa depende de los dígitos del número y de la ordenación que tengan en éste.

El punto decimal de un número que está entre uno y diez queda a la derecha del primer dígito. Puesto que tal número está entre 10^0 y 10^1, la característica de su logaritmo común es cero. Si el punto decimal se desplaza n cifras a la derecha, el número se multiplica por 10^n, y entonces la característica de su logaritmo es $0 + n$. De manera análoga, si el punto decimal se desplaza n lugares a la izquierda, la característica del logaritmo es

$$0 - n = - n.$$

posición de referencia

De ese modo, se definirá la *posición de referencia* con relación al punto decimal de un número, como la posición que ocupe el punto inmediatamente a la derecha del primer dígito diferente de cero que aparezca en el número. Por ejemplo, la posición de referencia en 6234 está entre 6 y 2 y la posición de referencia en 0.003621 está entre 3 y 6. Empleando esta terminología se puede dar la siguiente regla para determinar la caractrística del logaritmo común de cualquier número.

regla para obtener la característica

La característica del logaritmo común de un número es numéricamente igual al número de dígitos que hay entre la posición de referencia y el punto decimal. Esta es positiva o negativa, según sea que el punto decimal esté a la derecha o a la izquierda de la posición de referencia. Los ejemplos siguientes ilustran este método.

1. La posición de referencia en 236.78 está entre 2 y 3. Por tanto hay dos dígitos, 3 y 6, entre la posición de referencia y el punto decimal. Además, el punto decimal está a la derecha de la posición de referencia. Por tanto, la característica del logaritmo de 236.78. es 2.

2. La característica del logaritmo de 3.124 es cero, puesto que el punto decimal está en la posición de referencia.

3. El punto decimal en el número 0.003271 está tres lugares a la izquierda de la posición de referencia. Por tanto, la característica del logaritmo de 0.003271 es —3. Como se ha indicado con anterioridad, esta característica se acostumbra escribir como 7 — 10.

14.4 REDONDEAR UN NUMERO

Las tablas que se dan en este libro permiten calcular la mantisa de un logaritmo sólo son cuatro cifras. Empleando dichas tablas se pueden obte-

ner, pues, resultados que son correctos únicamente con cuatro cifras.* De aquí que sea frecuente recurrir a la práctica de *redondear un número,* o con mayor precisión, de redondear un número hasta n cifras. Tal práctica consiste de los pasos siguientes:

redondear un número

1. Se reemplazan por cero todos los dígitos que estén después del enésimo. Cuando el número es una fracción decimal, no se toman en cuenta los ceros entre el punto decimal y el primer dígito diferente de cero.

2. Se considera la fracción decimal formada colocando un punto decimal antes del número formado con los dígitos que se reemplazaron. Si este número es mayor que 0.5, el enésimo dígito se incrementa en uno. Si la fracción es menor que 0.5, el enésimo dígito permanece invariable.

Los ejemplos siguientes ilustran el modo de emplear los pasos anteriores.

1. 63276 redondeado a tres cifras es 63 300, puesto que $0.76 > 0.5$.

2. 8142183 redondeado a cuatro cifras es 8 142 000, puesto que $0.183 < 0.5$.

3. 10.365 redondeado a cuatro cifras es 10.37.

4. 0.006258461 redondeado a dos cifras es 0.0063, puesto que $0.58461 > 0.5$.

14.5 USO DE LA TABLA PARA OBTENER LA MANTISA

En este párrafo se explicará el método para encontrar la mantisa de un logaritmo usando la Tabla I del Apéndice. Primero se discutirán números de sólo tres dígitos, como por ejemplo, 3.27.* Como se indicó en el párrafo anterior, la mantisa del logaritmo de un número es independiente de la posición del punto decimal en el número. Por tanto, por el momento se prescindirá del punto decimal. En la Tabla I del Apéndice se buscan los dos primeros dígitos, 32, del número 327, en la columna encabezada por la letra N y que está al lado izquierdo de la página. Luego, en línea horizontal de izquierda a derecha se va hasta la columna encabezada por 7, el tercer dígito, y ahí se encuentra 5145. Excepto en lo que respecta al punto decimal, esta es la mantisa.** Considerando que en 3.27 la posición de referencia es la misma que la del punto decimal, la característica del logaritmo es cero y por tanto, $\log 3.27 = 0.5145$.

Como segundo ejemplo se considerará 0.00634. De nuevo se prescinde

* Se publican tablas de logaritmos con mantisas de más de cuatro cifras; pero debido a que no es posible que la exactitud de los resultados sea mayor que el número de cifras que da la tabla, no hay interés en conservar más dígitos en el número (es decir, aumentar su exactitud) que los que tienen los números de la tabla.

* En este párrafo, al contar el número de dígitos en una fracción decimal, se parte del primer dígito diferente de cero.

** En las tablas de mantisas no se imprimen los puntos decimales. Por tanto, cuando se obtiene una mantisa de la tabla es necesario precederla de cero, punto.

por el momento del punto decimal y se busca 63 en la columna encabezada por N. En línea con este número, y en el cruce con la columna encabezada por 4, se encuentra 8021. De acuerdo con la regla del Pr. 118, la característica del logaritmo 0.00634 es —3 y debe escribirse 7 — 10. Por tanto, log 0.00634 = 7.8021 — 10.

Si un número está formado por menos de tres dígitos, se puede mentalmente agregarle uno o dos ceros a la derecha y proceder como en los ejemplos anteriores. Por ejemplo, para obtener la mantisa del logaritmo 72 se busca la de 720, y para obtener la mantisa de 3, se busca la de 300.

Si en un número todos los dígitos después del tercero son ceros, se descartan éstos al obtener la mantisa.

En lo que sigue será necesario usar frecuentemente la expresión *la mantisa del logaritmo de N*. Para simplificar se usará la expresión abreviada ml N.

interpolación lineal

Si un número está formado por cuatro dígitos, la mantisa se obtiene mediante el método conocido como interpolación lineal. Este método se explicará y se ilustrará mediante los dos ejemplos que siguen.

EJEMPLO 1 Encontrar ml 412.8.

Solución. Ya que el número sólo tiene cuatro dígitos se usará el método de interpolación para encontrar ml 412.8. Puesto que 412.8 está entre 412 y 413, ml 412.8 está entre ml 412 y ml 413. Además, 413 difiere en 1 de 412 y 412.8 difiere en 0.8 de 412. Por tanto, 412.8 difiere de 412 en 0.8 de la diferencia entre 413 y 412. Se supondrá ahora que ml 412.8 difiere de ml 412 en 0.8 de la diferencia entre ml 413 y ml 412. En la tabla se encuentra que ml 413 = 0.6160 y que ml 412 = 0.6149.

Por tanto, puesto que 0.660 — 0.6149 = 0.0011, entonces ml 412.8 difiere de ml 412 en

$.8 \times 0.0011 = 0.00088 = 0.0009$ *redondeando una cifra.*

En consecuencia ml 412.8 = 0.6149 + 0.0009 = 0.6158.

El procedimiento anterior se puede resumir en la forma siguiente, en la cual se pueden efectuar los cálculos fácilmente.

$$1\left[\begin{array}{ll} & \text{ml } 413 \;\; = .6160 \\ .8 & \left[\begin{array}{l}\text{ml } 412.8 = \\ \text{ml } 412 \;\; = .6149\end{array}\right.\end{array}\right]{.0011}$$

$$.8 \times .0011 = .00088 = .0009 \qquad \textit{redondeando a una cifra}$$

$$\text{ml } 412.8 = .6149 + .0009 = .6158$$

Por tanto, puesto que el punto decimal en 412.8 está dos cifras a la derecha de la posición de referencia, se tiene log 412.8 = 2.6158.

EJEMPLO 2 Encontrar ml 0.006324.

Solución. Puesto que la posición del punto decimal no influye en el valor de la derecha de la posición de referencia, se tiene

ml 0,006324 = ml 632.4

Con ello el procedimiento para obtener la mantisa es el mismo que el empleado en el ejemplo 1. Se observa que 632.4 está entre 633 y 632 y se tiene

$$1\left[\begin{array}{l} \text{ml } 633 \quad = .8014 \\ .4\left[\begin{array}{l}\text{ml } 632.4 = \\ \text{ml } 632 \quad = .8007\end{array}\right] \end{array}\right].0007$$

$.4 \times .0007 = .00028 = .0003$ *redondeando a una cifra.*

En consecuencia,

ml $632.4 = .8007 + .0003 = .8010$

Puesto que en 0.006324 el punto decimal está tres cifras a la izquierda de la posición de referencia, se obtiene log $0.006324 = 7.8010 - 10$.

El procedimiento de interpolación consta de operaciones tan simples que después de cierta práctica se pueden efectuar mentalmente con el consiguiente ahorro de tiempo. Se sugieren los siguientes pasos para trabajar más rápidamente.

pasos en la interpolación

1. Se sitúa momentáneamente el punto decimal entre la tercera y la cuarta cifras.
2. Se sustraen las mantisas de los logaritmos de los números entre los cuales está comprendido el número anterior.
3. Se multiplica esta diferencia por el cuarto dígito del número dado, pero precedido de un punto decimal.
4. Se suman el producto anterior con la menor de las mantisas del paso 2.

Si un número tiene mas de cuatro dígitos se redondea a cuatro cifras, como antes se ha explicado. Por ejemplo, redondear ml 17.6352; obtenemos 17.64*

EJERCICIO 64: LOGARITMOS DE NUMEROS

Determínense las características de los logaritmos comunes de los números de los problemas 1 a 16.

1: 47	2: 2.9	3: 27.6	4: 3.98
5: 986.3	6: 67.49	7: 7.321	8: 1066
9: 219.57	10: .596	11: .089	12: .634
13: .0715	14: .0039	15: .00016	16: 65,000

Encuéntrense los logaritmos comunes de los problemas siguientes:

17: 36.1	18: 3.14	19: 6.23	20: 351
21: .789	22: .026	23: 4.18	24: .983
25: .003	26: .611	27: .059	28: .0075
29: .049	30: 30.5	31: 5.07	32: .0602
33: 1280	34: 69,700	35: 31,000	36: 905,000
37: 21,000,000	38: 618,000	39: 40,900	40: 66,000
41: 6706	42: 19.23	43: 3.202	44: 798.8
45: .1211	46: .07646	47: 299.9	48: .06344
49: .009218	50: .0004975	51: 79,360	52: 81.92
53: .04071	54: 559.6	55: 6.117	56: .003143
57: 24.613	58: 391.107	59: 10.188	60: 711.436

* Véase la nota de la página 271

14.6 USO DE LAS TABLAS PARA ENCONTRAR N CUANDO SE CONOCE LOG N

El problema recíproco al manejar las tablas es el procedimiento para encontrar un número cuando se conoce su logaritmo. Se ilustrará este procedimiento con varios ejemplos y en el curso de los mismos se explicará cada paso.

EJEMPLO 1 Encontrar N si $\log N = 1.6191$.

Solución. El primer paso es encontrar la mantisa 0.6191 en las tablas. Para ello se busca el número en las tablas empezando por localizar 61 y siguiendo luego hasta encontrar 6191. Se observa que está en la línea 41 (de la columna N) y en la columna 6. Así, N está formado por los dígitos 416 y se requiere ahora colocar el punto decimal. Puesto que la característica de $\log N$ es 1, el punto decimal debe estar una cifra a la derecha de la posición de referencia esto es, entré 1 y 6; por tanto el número es $N = 41.6$.

Si ml N no está en las tablas se le puede encontrar por interpolación. Sin embargo, mediante el uso de una tabla de cuatro cifras no se pueden obtener con exactitud más que los cuatro primeros dígitos del número N. Se demostrará en la discusión siguiente que de la tabla se obtienen los tres primeros dígitos y que el cuarto se obtiene por interpolación. Si la característica de $\log N$. indica que N contiene más de cuatro dígitos, entonces se agregan ceros después del cuarto.

EJEMPLO 2 Encontrar N si $\log N = 5.4978$.

Solución. Para obtener N, sabiendo que $\log N = 5.4978$ se representará por T el número formado por los primeros cuatro dígitos de N y se determinará T. Por último, se considera la colocación del punto decimal de acuerdo con la característica y se obtendrá así N. La mantisa 0.4978 no aparece enlistada en la tablà, pero las dos más próximas a ella son 0.4969 y 0.4983. Estas dos mantisas son ml 3140 y ml 3150, respectivamente. (En cada caso se ha agregado un cero para obtener cuatro cifras al emplear la interpolación). Luego, puesto que $4983 - 4969 = 14$, y $4978 - 4969 = 9$, se concluye que 4978 es $\frac{9}{14}$ de la diferencia de 4969 a 4983. Por tanto, T es aproximadamente, $\frac{9}{14}$ de la diferencia de 3140 a 3150.
En consecuencia,

$\frac{9}{14} \times 10 = \frac{90}{14} = 6.4 = 6$ *a un dígito debido a que el límite de exactitud es el cuarto lugar.*

y $3140 + 6 = 3146$. Por tanto, $T = 3146$. Puesto que la característica de $\log N$ es 5, el punto decimal en N está 5 cifras a la derecha de la posición de referencia. Por tanto, $N = 314\,600$.

Los pasos del procedimiento anterior se muestran en la forma abreviada siguiente.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad \log N = 5.4978 \\ 14\left[\begin{array}{l} \quad 4983 = \text{ml } 3150 \\ 9\left[\begin{array}{l} 4978 = \text{ml } T \\ 4969 = \text{ml } 3140 \end{array}\right. \end{array}\right]10 \\ \quad \frac{9}{14} \times 10 = 6.4 = 6 \qquad \textit{redondeando a una cifra} \\ \quad 3140 + 6 = 3146 = T \end{array}$$

En consecuencia,

$$N = 314600$$

ya que la característica de log N es 5.

EJEMPLO 3 Encontrar N, si $\log N = 8.6736 - 10$

Solución. Se determinará N si $\log N = 8.6736 - 10$. Se usará nuevamente T para representar el número formado por los primeros cuatro dígitos de N. Las dos cantidades en la tabla más próxima a 6736 son $6730 = \text{ml}\ 4710$ y $6739 = \text{ml}\ 4720$. Empleando éstas en el procedimiento de interpolación se tiene

$$9\left[\begin{array}{l} 6739 = \text{ml}\ 4720 \\ 6\left[\begin{array}{l} 6736 = \text{ml}\ T \\ 6730 = \text{ml}\ 4710 \end{array}\right. \end{array}\right]10$$

$\frac{6}{9} \times 10 = 6.6 = 7$ *redondeando a una cifra*

Por tanto,

$$4710 + 7 = 4717 = T$$

entonces

$$N = .04717$$

ya que la característica de log N es $8 - 10 = -2$.

EJERCICIO 65: OBTENCION DE NUMEROS A PARTIR DE SUS LOGARITMOS

Encuéntrense el valor de N si log N está dado según los problemas 1 a 16.

1: 2.7505	2: 3.9042	3: 9.3541 − 10
4: 1.9375	5: 5.4133	6: 8.6085 − 10
7: 2.3962	8: 9.9974 − 10	9: 0.8035
10: 2.5623	11: 5.9299 − 10	12: 4.6776
13: 6.6609 − 10	14: 2.9058	15: 3.4440
16: 0.8482		

Si los datos de los problemas 17 a 32 son valores de log N, encuéntrense los valores de N con tres cifras, usando la mantisa más próxima que aparezca en la tabla.

17: 2.8776	18: 1.4863	19: 3.9048
20: 0.6511	21: 1.3950	22: 2.8499
23: 8.2519 − 10	24: 9.6218 − 10	25: 7.4293 − 10
26: 9.5021 − 10	27: 8.8081 − 10	28: 6.6163 − 10
29: 0.1728	30: 2.5881	31: 8.7057 − 10
32: 9.8347 − 10		

Encuéntrese el valor de N con cuatro dígitos, mediante el proceso de interpolación, para los valores de log N dados en los problemas 33 a 48.

33: 2.1923	34: 1.6175	35: 3.9017
36: 0.3251	37: 9.7191 − 10	38: 8.6014 − 10
39: 0.7221	40: 2.8193	41: 1.2011
42: 6.4215 − 10	43: 2.0134	44: 7.5013 − 10
45: 8.9676 − 10	46: 2.7646	47: 7.1237
48: 2.5643		

14.7 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

En este párrafo se emplearán las leyes de los exponentes (véase capítulo 7) y la definición de logaritmo, para derivar tres importantes propiedades de los logaritmos. En el párrafo siguiente se mostrará cómo usar esas propiedades en operaciones numéricas.

Se mostrará primero cómo encontrar el logaritmo del producto de dos números en función de los logaritmos de los números. Si se da

$$\log_b M = m \qquad \text{y} \qquad \log_b N = n \tag{14.3}$$

entonces, según (14.2) se tiene

$$M = b^m \qquad \text{y} \qquad N = b^n \tag{14.4}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} MN &= (b^m)(b^n) \\ &= b^{m+n} && \textit{según } (7.2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \log_b MN &= m + n && \textit{según } (14.2) \\ &= \log_b M + \log_b N && \textit{según } (14.3) \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene:

logaritmo de un producto

1. *El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los números.*

EJEMPLO 1 Calcular el logaritmo del producto de 3 por 4

Solución.

$$\begin{aligned} \log (3 \times 4) &= \log 3 + \log 4 \\ &= .4771 + .6021 \\ &= 1.0792 \end{aligned}$$

La propiedad 1 puede hacerse extensiva a tres o más números de acuerdo con el siguiente procedimiento:

$$\begin{aligned} \log_b MNP &= \log_b (MN)(P) \\ &= \log_b M + \log_b N + \log_b P \end{aligned}$$

De nuevo, usando la relación (14.4) de este párrafo,

$$\begin{aligned} \frac{M}{N} &= \frac{b^m}{b^n} \\ &= b^{m-n} && \textit{según } (7.5) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \log_b \frac{M}{N} &= m - n && \textit{según } (14.2) \\ &= \log_b M - \log_b N && \textit{según } (14.3) \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene:

logaritmo de la cociente 2. *El logaritmo del cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

EJEMPLO 2 Calcular el logaritmo de $3 \div 2$.

Solución.

$$\begin{aligned} \log(3 \div 2) &= \log \tfrac{3}{2} \\ &= \log 3 - \log 2 \\ &= .4771 - .3010 \\ &= .1761 \end{aligned}$$

Por último, si los dos miembros de $M = b^m$ se elevan a la potencia k, se tiene

$$\begin{aligned} M^k &= (b^m)^k \\ &= b^{km} \qquad \textit{según } (7.4) \end{aligned}$$

De ese modo, se tiene:

$$\begin{aligned} \log_b M^k &= km \qquad \textit{según } (14.2) \\ &= k \log_b M \qquad \textit{según } (14.3) \end{aligned}$$

logaritmo de una potencia 3. *El logaritmo de la potencia de un número es igual al producto del exponente de la potencia por el logaritmo del número.*

EJEMPLO 3 Calcular el logaritmo del cuadrado de 3.

Solución.

$$\begin{aligned} \log 3^2 &= 2 \log 3 \\ &= 2(.4771) \\ &= .9542 \end{aligned}$$

NOTA. Puesto que la raíz de un número se puede expresar como una potencia fraccionaria, la propiedad 3 se puede usar para encontrar el logaritmo de una raíz. De este modo

$$\log_b \sqrt[r]{M} = \log_b (M)^{1/r} = \frac{1}{r} \log_b M$$

EJEMPLO 4 Calcular el logaritmo de la raíz cúbica de 2.

Solución.

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{2} &= \log 2^{1/3} \\ &= \tfrac{1}{3} \log 2 \\ &= \tfrac{1}{3}(.3010) \\ &= .1003 \end{aligned}$$

Para conveniencia del lector, se escribirán nuevamente en forma simbólica, las propiedades anteriores.

▶ $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$ *propiedad 1* (14.5)

▶ $\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$ *propiedad 2* (14.6)

$$\log_b M^k = k \log_b M \qquad \textit{propiedad 3} \qquad (14.7)$$

14.8 OPERACIONES NUMERICAS CON LOGARITMOS

Como se indicó anteriormente, una de las aplicaciones más útiles de los logaritmos se halla en el campo de las operaciones numéricas. A continuación se expondrán los métodos necesarios a través de varios ejemplos. Sin embargo, antes de considerar problemas particulares debe recordarse que los resultados obtenidos mediante el uso de tablas de cuatro cifras son correctas cuando más con aproximación de cuatro cifras. Si los números en un problema de computación contienen únicamente tres cifras, el resultado es seguro sólo a tres cifras. Si un problema contiene una mezcla de números de tres y de cuatro cifras, no se puede esperar que más de tres cifras del resultado estén correctas y así se redondeará a tres cifras. Por tanto, en los problemas que siguen no se obtendrán respuestas de más de cuatro cifras diferentes de cero y en algunos casos ni eso.* Existen tablas de las cuales se pueden obtener logaritmos de cinco, seis, siete y más cifras. Si se desean resultados correctos con más de cuatro cifras se deben usar tablas como las citadas. Los métodos hasta ahora presentados se pueden aplicar a cualquier tabla.

Se presentarán ahora varios ejemplos con las explicaciones necesarias para ilustrar los métodos para obtener, mediante el uso de logaritmos: (1), productos y cocientes; (2), potencias y raíces; (3), miscelánea de problemas de operaciones numéricas.

En los problemas de operaciones numéricas se usarán las propiedades de los logaritmos dadas en el Pr. 14.7 para encontrar el logaritmo del resultado. Después, el valor del resultado se puede obtener de las tablas.
Productos y cocientes.

EJEMPLO 1 Encontrar mediante el uso de logaritmos el valor de R si $R = (8.56)\ (3.47)\ (198)$,

Solución: Puesto que R es igual al producto de tres números, por (14.5), el log R es igual a la suma de los logaritmos de los tres factores. Por tanto, se obtendrá el logaritmo de cada uno de los factores y se efectuará la suma de ellos obteniéndose log R. Luego, se puede usar la tabla para obtener R. Antes de ir a la tabla es conveniente hacer un esquema con espacios en blanco en donde colocar los logaritmos que se vayan encontrando. Es igualmente adecuado ordenar el esquema de tal modo que los logaritmos por sumar queden en columna. Se sugiere el siguiente

$$\begin{aligned}
\log 8.56 &= \\
\log 3.47 &= \\
\underline{\log\ 198} &= \underline{\qquad\qquad} \\
\log R &= \quad \textit{poner suma aquí} \\
R &=
\end{aligned}$$

* Las consideraciones anteriores se basan en la teoría de las cifras significativas. La discusión de esta teoría se encuentra en la mayor parte de las trigonometrías, por ejemplo, Sparks and Rees. "Plane Trigonometry" 3a. Ed., Prentice Hall. New York, 1952, p. 20.

Después se colocan las características en los espacios en blanco, y se tiene

$$
\begin{array}{rl}
\log 8.56 &= 0. \\
\log 3.47 &= 0. \\
\log\ 198 &= 2. \\
\hline
\log R &= \\
R &=
\end{array}
$$

Consultando las tablas se obtienen las mantisas que se van colocando en el lugar adecuado del esquema a medida que se vayan encontrando. Se efectúa luego la suma, y por último, se determina R de acuerdo con el método del Pr. 14.6. La solución completa aparece entonces como sigue

$$
\begin{array}{rl}
\log 8.56 &= 0.9325 \\
\log 3.47 &= 0.5403 \\
\log 198 &= 2.2967 \\
\hline
\log R &= 3.7695 \\
R &= 5880
\end{array}
$$

NOTA: Cada uno de los números del problema contiene sólo tres dígitos. Por tanto, se pueden determinar solamente tres dígitos de R. Puesto que la mantisa 7695 está entre las mantisas 7694 y 7701, y más cerca de la primera que de la última,* los tres primeros dígitos de R son 588, es decir, el número que corresponde a la mantisa 0.7694. La característica de log R es 3. Por tanto, el punto decimal está tres cifras a la derecha de la posición de referencia. En consecuencia, se agrega un cero y se pone el punto decimal.

El esquema de la solución se ha escrito tres veces con objeto de mostrar cómo aparece al terminar cada paso. En la práctica sólo es necesario escribir el esquema una vez, puesto que cada operación se satisface llenando diferentes espacios en blanco.

EJEMPLO 2 Emplear los logaritmos para determinar el cociente

$$R = \frac{(337)\ (2.68)}{(521)\ (0.763)}.$$

Solución: En este problema, R es un cociente en el cual tanto el dividendo como el divisor son el producto de dos números. Por tanto, se sumarán los logaritmos de los dos números del dividendo y se sumarán también los de los dos números del divisor, luego se sustraerá la segunda suma de la primera, obteniéndose así log R. Se sugiere el siguiente esquema para la solución

$$
\begin{array}{rll}
\log 337 &= & \\
\log 2.68 &= & \\
\hline
\log \text{dividend} &= & \textit{suma} \\
\log 521 &= & \\
\log .763 &= & \\
\hline
\log \text{divisor} &= & \textit{suma} \\
\log R &= & \textit{diferencia de las dos sumas} \\
R &= &
\end{array}
$$

Después de colocar las características y de haber colocado adecuadamente las mantisas halladas en la tabla, el problema se completa como sigue.

* Esto es, el cuarto dígito es menor que 5 y, por esta razón se descarta.

$$\begin{array}{rl}
\log 337 = & 2.5276 \\
\log 2.68 = & 0.4281 \\
\hline
\log \text{dividend} = & 2.9557 \\
\log 521 = & 2.7168 \\
\log .763 = & 9.8825 - 10 \\
\hline
\log \text{divisor} = & 12.5993 - 10 \\
\log R = & 0.3564 \\
R = & 2.27
\end{array}$$

NOTA: El logaritmo del divisor se ha escrito como 12.5993 — 10. Por tanto, la característica es 2. Por consiguiente, se pueden cancelar 10 y el primer dígito de 12 antes de terminar la solución.

EJEMPLO 3 Emplear logaritmos para evaluar $R = \dfrac{2.68}{33.2}$

Solución.

$$\begin{array}{rl}
\log 2.68 = & 0.4281 \\
\log 33.2 = & 1.5211 \\
\hline
\log R = &
\end{array}$$

en donde $\log R$ se obtiene sustrayendo el segundo logaritmo del primero. Al efectuar la sustracción, se tiene, $\log R = -1.0930$. Este valor es correcto para $\log R$, pero puesto que la parte fraccionaria 0930 es negativa, no es mantisa, y el valor de R no se puede encontrar en la tabla. Se evita esta dificultad sumando 10 — 10 a log 2.68 antes de efectuar la sustracción. De este modo se tiene

$$\begin{array}{rl}
\log 2.68 = & 10.4281 - 10 \\
\log 33.2 = & 1.5211 \\
\hline
\log R = & 8.9070 - 10 \\
R = & .0807
\end{array}$$

El recurso mostrado en el ejemplo 3 se usa cuando la sustracción de un logaritmo de otro conduce a un resultado negativo. Así, para sustraer 9.2368 — 10 de 2.6841, se suma 10 — 10 al segundo y se tiene

$$\begin{array}{r}
12.6841 - 10 \\
9.2368 - 10 \\
\hline
3.4473
\end{array}$$

Análogamente, al efectuar la sustracción (7.3264 — 10) — (9.4631 — 10), se puede obtener también un número negativo, —2.1367. Por tanto, se suma 10 — 10 a 7.3264 — 10 y se procede a la sustracción como se indica.

$$\begin{array}{r}
17.3264 - 20 \\
9.4631 - 10 \\
\hline
7.8633 - 10
\end{array}$$

Potencias y raíces.

EJEMPLO 4 Obtener el valor de $R = (3.74)^5$ mediante el uso de logaritmos.

Solución: Se emplea la ecuación (14.7) y se tiene

$$
\begin{aligned}
\log R &= \log (3.74)^5 \\
&= 5(\log 3.74) \\
&= 5(0.5729) \\
&= 2.8645 \\
R &= 732 \qquad \textit{de tabla I, Apéndice}
\end{aligned}
$$

También se puede emplear la ecuación (14.7) para obtener la raíz de un número mediante el uso de logaritmos. El método se ilustra en el ejemplo siguiente

EJEMPLO 5 Calcular de raíz cúbica de 62.3 empleando logaritmos.

Solución: Si $R = \sqrt[3]{62.3}$ se escribe el problema en forma exponencial y se tiene

$$
\begin{aligned}
R &= (62.3)^{1/3} \\
\log R &= \tfrac{1}{3} \log 62.3 \qquad \textit{por ec. (14.7)} \\
&= \tfrac{1}{3}(1.7945) \\
&= 0.5982 \\
R &= 3.96 \qquad \textit{de tabla I, Apéndice}
\end{aligned}
$$

Al aplicar la ecuación (14.7) al problema de extraer raíz a una fracción decimal, se emplea un recurso análogo al descrito en el ejemplo 3, con objeto de evitar cualquier situación ambigua.

EJEMPLO 6 Calcular la raíz sexta de 0.0628 usando logaritmos.

Solución: Si $R = \sqrt[6]{.0628}$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\log R &= \tfrac{1}{6} \log .0628 \\
&= \frac{8.7980 - 10}{6}
\end{aligned}
$$

Si se efectúa la división indicada, se tiene

$$
\begin{aligned}
\log R &= 1.4663 - 1.6667 \\
&= -.2004
\end{aligned}
$$

De esta manera se tiene un logaritmo negativo y no se puede determinar R en las tablas. Se evita esta situación sumando $50 - 50$ a log 0.0628, obteniéndose log $0.0628 = 58.7980 - 60$. Se tiene

$$
\begin{aligned}
\log R &= \frac{58.7980 - 60}{6} \\
&= 9.7997 - 10
\end{aligned}
$$

Puesto que el último logaritmo está en la forma acostumbrada, en las tablas se puede encontrar que $R = .631$

Problemas varios.

Muchos problemas de operaciones numéricas requieren combinaciones de los procesos de multiplicación, división, exponenciación y extracción de raíces. Se ilustrará mediante un ejemplo el procedimiento general para resolver tal tipo de problemas.

EJEMPLO 7 Encontrar el valor de R empleando logaritmos

$$
R = \sqrt[5]{\frac{\sqrt{2.689}(3.478)}{(52.18)^2(51.67)}}
$$

Solución:

Puesto que todos los números del problema contienen cuatro dígitos se debe encontrar el valor de R con cuatro cifras. En consecuencia, se empleará la interpolación para obtener las mantisas. Los pasos de la solución se indican en el esquema siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
\log \sqrt{2.689} = \frac{1}{2} \log 2.689 = \frac{1}{2}(\quad) = & \\
\log 3.478 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = & \\
\hline
\log \text{dividend} = & \qquad \textit{suma} \\
\log (52.18)^2 = 2 \log 52.18 = 2(\quad) = & \\
\log 51.67 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = & \\
\hline
\log \text{divisor} = & \qquad \textit{suma} \\
& \qquad 5\underline{|\qquad\quad} \ \textit{diferencia} \\
\log R = & \\
R = &
\end{array}
$$

Se colocan ahora las características en los lugares apropiados, se buscan las mantisas en las tablas colocándolas en los espacios a la izquierda, y se completa la solución. El esquema queda como sigue.

$$
\begin{array}{rl}
\log \sqrt{2.689} = \frac{1}{2} \log 2.689 = \frac{1}{2}(0.4296) = & 0.2148 \\
\log 3.478 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = & 0.5413 \\
\hline
\log \text{dividend} = & 10.7561^{*} - 10 \\
\log (52.18)^2 = 2 \log 52.08 = 2(1.7175) = & 3.4350 \\
\log 51.67 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = & 1.7132 \\
\hline
\log \text{divisor} = & 5.1482 \\
5| & \underline{45.6079 - 50^{\dagger}} \\
\log R = & 9.1216 - 10 \\
R = & .1323
\end{array}
$$

EJERCICIO 66: OPERACIONES NUMERICAS CON LOGARITMOS

Empleando logaritmos efectúense las operaciones indicadas en los problemas 1 a 48. En los problemas 1 a 32 obténganse las respuestas con tres cifras. En los otros obténganse las respuestas con cuatro cifras.

1: $(29.1)(3.06)(.143)$

2: $(5.11)(.603)(1.79)$

3: $(9.98)(.426)(.715)$

4: $(88.3)(.113)(10.7)$

5: $(.693)(.0451)(.00917)$

6: $(.0935)(.614)(1.12)$

7: $(.00991)(.491)(.829)$

8: $(.0113)(.0217)(.901)$

9: $\dfrac{(69.3)(1.15)}{10.1}$

10: $\dfrac{(5.18)(6.65)}{.992}$

11: $\dfrac{(701)(.223)}{8.05}$

12: $\dfrac{(6.11)(.0352)}{88.1}$

13: $\dfrac{15.3}{(5.14)(.761)}$

14: $\dfrac{.665}{(20.9)(3.11)}$

15: $\dfrac{80.5}{(392)(.616)}$

16: $\dfrac{1.01}{(49.5)(3.18)}$

17: $\sqrt[3]{496}$

18: $\sqrt{61.5}$

19: $\sqrt[4]{.801}$

20: $\sqrt[3]{(3.03)^2}$

* Nótese que al sumar aquí $10 - 10$ se puede sustraer 5.1482.

† Se suma aquí $40 - 40$ para poder dividir entre 5.

21: $\sqrt{\dfrac{(1.46)(26.8)}{(2.01)(3.15)}}$

22: $\left[\dfrac{(56.9)(.917)}{(3.98)(2.64)}\right]^2$

23: $\sqrt[3]{\dfrac{(77.6)(66.5)}{(44.3)(33.2)}}$

24: $\sqrt{\left[\dfrac{(7.11)(.695)}{(93.4)(8.15)}\right]^3}$

25: $\sqrt{6.16}\,\sqrt[3]{81.2}$

26: $\sqrt[3]{2.75}\,\sqrt{93.9}$

27: $\sqrt{77.1}\,\sqrt[3]{1.41}$

28: $\sqrt[4]{.915}\,\sqrt{.112}$

29: $\dfrac{\sqrt{615}}{\sqrt[3]{401}}$

30: $\dfrac{\sqrt[3]{71.7}}{\sqrt{36.2}}$

31: $\dfrac{(215)^{2/3}}{(16.2)\sqrt{41.1}}$

32: $\dfrac{457}{\sqrt[3]{228}\,\sqrt{16.5}}$

33: $(10.66)^6$

34: $\sqrt[3]{.1495}$

35: $\sqrt[4]{.1081}$

36: $\sqrt[3]{(71.43)^2}$

37: $\dfrac{1.906}{\sqrt{23.41}}$

38: $\dfrac{\sqrt{62.41}}{10.14}$

39: $\dfrac{\sqrt{375.6}}{\sqrt[3]{64.51}}$

40: $\dfrac{(681.4)^{2/3}}{(469.1)^{3/4}}$

41: $\dfrac{(21.71)(28.65)}{(396.4)(1.401)}$

42: $\dfrac{(791.5)(9.653)}{(6.171)(32.41)}$

43: $\dfrac{(11.41)(2.864)}{(396.5)(22.88)}$

44: $\dfrac{(46.91)(3.905)}{(571.8)(.6606)}$

45: $\sqrt{\dfrac{(673.3)(2.151)}{(64.44)^2}}$

46: $\left[\dfrac{(.6717)(81.41)}{\sqrt[3]{9015}}\right]^2$

47: $\sqrt[3]{\dfrac{(.03154)^2}{\sqrt{2675}(10.11)}}$

48: $\sqrt{\dfrac{(.3151)\sqrt{6194}}{(6356)(1.753)^3}}$

Mediante el uso de los teoremas estudiados exprésense las funciones de los problemas 49 a 56 como suma o diferencia de logaritmos de primeras potencias de cantidades.

49: $y = \log \dfrac{cx}{x-3}$

50: $y = \log \dfrac{cx^3}{x+1}$

51: $y = \log cx^2\sqrt[3]{x+3}$

52: $z = \log \dfrac{\sqrt{x+y}}{(x-2y)^c}$

53: $z = \log \dfrac{c(x+y)^3}{\sqrt{x-y}}$

54: $z = \log \dfrac{cx^2y^3}{(x+y)^2}$

55: $z = \log \dfrac{c\sqrt[3]{x}}{x(x-y)^3}$

56: $z = \log \dfrac{y^2c}{x^2\sqrt[3]{y-3x}}$

Mediante el uso de los teoremas estudiados exprésense las funciones de los problemas siguientes como logaritmos de productos, cocientes o potencias.

57: $\log c + \log x$
58: $\log c + 2\log x - \log(x-1)$
59: $\log c - \log x + 3\log(x+1)$
60: $2\log c - 3\log x$
61: $\frac{1}{2}\log(x-y) - \frac{1}{3}\log c$
62: $2\log c - \frac{1}{2}\log(x-2y)$
63: $2\log x - 3\log c + \log(2x+y)$
64: $3\log y + \frac{1}{4}\log(x-c) - \frac{1}{3}\log(x+y-c)$

14.9 LOGARITMOS DE BASES DIFERENTES DE 10.

Como se indicó en el primer párrafo de este capítulo, se puede usar cualquier número real como base de un sistema de logaritmos. Sin embargo, sólo dos son de uso común: el sistema de Briggs y el sistema natural o de Napier. El primero es el sistema más adecuado para operaciones numéricas, en tanto que el segundo es más importante en temas más avanzados de matemáticas y en las aplicaciones de éstos. Las tablas de logaritmos neperianos se pueden encontrar en la mayor parte de los manuales técnicos, así como en los manuales de tablas matemáticas. Sin embargo, el logaritmo de cualquier base de un número se puede expresar en términos del logaritmo de otra base del número. En particular, el logaritmo de cualquier base de un número se puede obtener usando una tabla de logaritmos comunes y el propósito de este párrafo es explicar el procedimiento para hacerlo.

logaritmos de cualquier base.

Si a y b son dos bases cualesquiera, entonces

$$\blacktriangleright \quad \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \tag{14.8}$$

sea

$$N = a^y$$

entonces

$$\begin{aligned} \log_a N &= \log_a a^y \\ &= y \qquad \textit{por ecuación (14.2)} \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \log_b N &= \log_b a^y \\ &= y \log_b a \qquad \textit{según la ecuación (14.7)} \\ &= \log_a N \log_b a \qquad \textit{puesto que } y = \log_a N. \end{aligned}$$

Luego, resolviendo esta ecuación para $\log_a N$, se tiene

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

relación entre logaritmos de bases distintas

Como corolario de lo anterior tendremos

La relación entre $\log_{10} N$ y $\log_e N$, está dada por

$$\blacktriangleright \quad \log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e} \tag{14.9}$$

Si en (14.8) se hace $a = e$ y $b = 10$, se tiene la ecuación expuesta en el corolario.

Puesto que $\log_{10} e = 0.4343$ y además $1/0.4343 = 2.3025$, se puede expresar (14.9) en la forma

$$\blacktriangleright \quad \log_e N = 2.3026 \log_{10} N$$

EJEMPLO Encontrar el valor de $\log_7 236$ empleando (14.8).

Solución: Sustituyendo en (14.8), se tiene

$$\log_7 236 = \frac{\log_{10} 236}{\log_{10} 7}$$
$$= \frac{2.3729}{.8451} = 2.808$$

EJERCICIO 67: LOGARITMOS DE BASES DIFERENTES DE 10

Mediante el uso de una tabla de logaritmos comunes encuéntrense con tres cifras los valores pedidos en los problemas siguientes:

1: $\log_e 23.4$
2: $\log_e 5.18$
3: $\log_e 9.04$
4: $\log_e 492$
5: $\log_3 13.1$
6: $\log_3 7.03$
7: $\log_3 8.63$
8: $\log_3 44.2$
9: $\log_2 1.12$
10: $\log_2 91.6$
11: $\log_4 616$
12: $\log_4 392$
13: $\log_8 542$
14: $\log_8 1.02$
15: $\log_{12} 352$
16: $\log_{12} 613$
17: $\log_{12} 1492$
18: $\log_4 1923$
19: $\log_4 2959$
20: $\log_{12} 1894$
21: $\log_{e^2} 1865$
22: $\log_{e^2} 1806$
23: $\log_{e^2} 1545$
24: $\log_{e^2} 1955$

14.10 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

Una ecuación exponencial es una ecuación en la cual la variable concurre como exponente o como término de un exponente. *Una ecuación logarítmica* es una ecuación que comprende el logaritmo de una función de la variable.

En los ejemplos siguientes (1) y (2) son ecuaciones exponenciales, y (3) es ecuación logarítmica.

$$3^x = 7 \tag{1}$$
$$3^{x+1} = 5^{x-2} \tag{2}$$
$$\log x + \log (x - 1) = 2. \tag{3}$$

En general, las ecuaciones exponenciales y las ecuaciones logarítmicas no se pueden resolver por los métodos hasta ahora expuestos, pero muchas de ellas se pueden resolver mediante el uso de las propiedades de los logaritmos. Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento.

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $3^{x+4} = 5^{x+2}$

Solución: Si se toman los logaritmos comunes en ambos miembros de la ecuación, se tiene (14.7), $(x + 4) \log 3 = (x + 2) \log 5$, y la solución se completa como sigue

$$
\begin{aligned}
x \log 3 + 4 \log 3 &= x \log 5 + 2 \log 5 \\
x(\log 3 - \log 5) &= 2 \log 5 - 4 \log 3 && \textit{se ha transpuesto y sumado} \\
&= \log 25 - \log 81 && \textit{según ecuación (14.7)} \\
x &= \frac{\log 25 - \log 81}{\log 3 - \log 5} && \textit{resolviendo para } x \\
&= \frac{1.3979 - 1.9085}{.4771 - .6990} \\
&= \frac{-.5106}{-.2219} \\
&= 2.301
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 2 Resolver $\log_6 (x + 3) + \log_6 (x - 2) = 1$.

Solución: Aplicando (14.5) al miembro de la izquierda de la ecuación dada, se tiene

$$
\begin{aligned}
\log_6 (x + 3)(x - 2) &= 1 \\
(x + 3)(x - 2) &= 6^1 && \textit{según ec. (14.2)} \\
x^2 + x - 6 &= 6 && \textit{se han efectuado las operaciones indicadas} \\
x^2 + x - 12 &= 0 && \textit{se han transpuesto y sumado términos} \\
(x + 4)(x - 3) &= 0 \\
x &= -4 && \textit{haciendo cero por separado a los factores} \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $x = -4$ en la ecuación dada tenemos $\log_6 (-1) + \log_6 (-6) = 1$. Como no se han definido logaritmos de números negativos hay que descartar $x = -4$. La única solución coherente con la definición de logaritmos es $x = 3$.

EJEMPLO 3 Resolver para x $y = \log_e (x + \sqrt{x^2 + 1})$

Solución: Mediante el uso de la (14.2), se puede cambiar a la forma exponencial la ecuación dada.

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Se racionaliza la ecuación anterior y se resuelve para x efectuando los siguientes pasos.

$$
\begin{aligned}
e^y - x &= \sqrt{x^2 + 1} && \textit{se ha aislado el radical} \\
e^{2y} - 2e^y x + x^2 &= x^2 + 1 && \textit{se ha elevado al cuadrado cada miembro} \\
-2e^y x + x^2 - x^2 &= -e^{2y} + 1 && \textit{se han transpuesto y sumado términos} \\
x &= \frac{-e^{2y} + 1}{-2e^y} \\
&= \frac{e^y - e^{-y}}{2} && \textit{se ha dividido cada miembro de la fracción entre } -e^y.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 4 Resolver para x y para y las ecuaciones

$$5^{x-2y} = 100 \quad (1)$$
$$3^{2x-y} = 10 \quad (2)$$

Solución: Si en (1) y en (2) se toma el logaritmo de cada miembro, se tiene

$$(x - 2y) \log 5 = 2 \quad (3)$$
$$(2x - y) \log 3 = 1 \quad (4)$$

En consecuencia,

$$x - 2y = \frac{2}{\log 5} = \frac{2}{.6990} \tag{3'}$$

$$2x - y = \frac{1}{\log 3} = \frac{1}{.4771} \tag{4'}$$

Si se efectúan las operaciones numéricas indicadas en los miembros de la derecha se tiene

$$x - 2y = 2.86 \tag{3''}$$
$$2x - y = 2.10 \tag{4''}$$

Multiplicando por 2 cada miembro de (4″) y sustrayendo de (3″) miembro a miembro se obtiene

$$-3x = -1.34$$
$$x = .447$$

Sustituyendo este valor de x en (3″) y resolviendo para y se tiene

$$-2y = 2.86 - .447$$
$$= 2.413$$
$$y = -1.206$$

De ese modo la solución del sistema es $x = 0.447$, y $y = -1.206$.

EJERCICIO 68. ECUACIONES LOGARITMICAS

Resuélvanse para x o para n las ecuaciones de los problemas 1 a 12.

1: $y = 2e^x$
2: $y = ae^{-x}$
3: $y = e^{-bx}$
4: $y = 3e^{-2x}$
5: $y = \frac{r^n}{a}$
6: $y = ar^{n+1}$
7: $y = 2(c + r)^n$
8: $y = 3(c + r)^{-n}$
9: $y = \log_e(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$
10: $y = \log_e\sqrt{(x - 2)(x + 1)}, x > 2$
11: $y = \log_e\sqrt{\frac{x + 2}{2 - x}}, -2 < x < 2$
12: $y = \log_e[x + \sqrt{(x - 1)(x + 2)}], x \geq 1$

Resuélvanse las ecuaciones de los problemas 13 a 32.

13: $4^x = 64 = 4^3$
14: $7^{x-1} = 343$
15: $3^{2x-1} = 27$
16: $5^{3x-2} = 625$
17: $e^{-2x}e^{3x} = e^4$
18: $2^{x^2+1} = 2^{2x}$
19: $5^{x^2-3} = 5^{2x}$
20: $4^{x^2+3x} = 4^4$
21: $(195)^x = 2.68$
22: $(3.02)^x = .00739$
23: $(53.7)^x = 6.95$
24: $(87.1)^x = .0163$
25: $\log_6 3 + \log_6 (x + 6) = 2$
26: $\log_4 8 + \log_4 (x + 5) = 3$
27: $\log_{12} 4 + \log_{12} (x + 6) = 2$
28: $\log_8 16 + \log_8 (x - 2) = 2$
29: $\log_3 (x + 2) - \log_3 (x - 6) = 2$
30: $\log_5 (3x + 7) - \log_5 (x - 5) = 2$
31: $\log_2 (x^2 - 3x + 6) - \log_2 (x - 1) = 2$
32: $\log_6 (x^2 + 2x + 15) - \log_6 (x + 2) = 1$

Resuélvanse los siguientes pares de ecuaciones simultáneas.

33: $2^{x-y} = 5$
$x + 2y = 3$

34: $9^{2x-y} = 3$
$6x + 2y = 5$

35: $2^{2x-3y} = 32$
$x + 2y = 6$

36: $4^{x+2y} = 64$
$2x + 5y = 5$

37: $10^{x-3y} = 3$
$\log 2x - \log y = 1$

38: $8^{x-y} = 3^x$
$8^y = 2^{x-3}$

39: $\log x + \log y = 4$
$\log 2x - \log 5y = 1$

40: $e^{x-y} = e^3$
$e^{x+2y} = 2$

14.11 GRAFICAS DE LOG$_a$ x Y DE a^x

Las gráficas de $\log_a x$ y de a^x revelan algunas propiedades importantes de esta función. Además, el método gráfico se aplica a aquellas ecuaciones logarítmicas o exponenciales que no tienen solución algebraica. Por tanto,

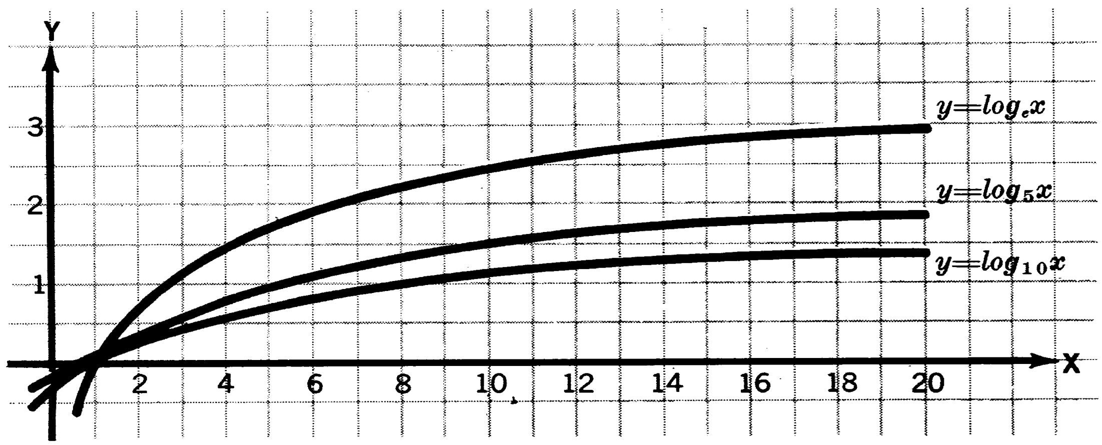


Figura 14.1

es importante la habilidad para trazar rápidamente las gráficas de las funciones de esa clase. En la fig. 14.1 se muestra la gráfica de la función $y = \log_a x$ para $a = 10$, $a = e$, y $a = 5$.

Para la construcción de la gráfica se usó la siguiente tabla de valores, calculada con aproximación de una cifra decimal. Estos valores se obtuvieron mediante el uso de una tabla de logaritmos comunes y sus fórmulas (14.10) y (14.8).

x	.2	.4	.6	.8	1	2	4	6	8	10	20
$\log_{10} x$	$-.7$	$-.4$	$-.2$	$-.1$	0	.3	.6	.8	.9	1	1.3
$\log_e x$	-1.6	$-.9$	$-.5$	$-.2$	0	.7	1.4	1.8	2.1	2.3	3.0
$\log_5 x$	-1	$-.6$	$-.3$	$-.14$	0	.4	.9	1.1	1.3	1.4	1.8

Las gráficas mencionadas revelan las siguientes propiedades de la función $\log_a x$:

1. La función no está definida para valores negativos de x.
2. La función es negativa para valores de x menores que uno y positiva para valores de x mayores que uno.
3. La función es igual a cero cuando x es igual a uno.

4. El valor de la función se incrementa cuando x aumenta.

5. Cuando mayor sea el valor de a más próxima está la curva al eje de las X para un valor dado de x.

Con el fin de ilustrar el método para obtener la gráfica de la función exponencial, se mostrará cómo calcular una tabla de valores correspondientes para la ecuación $y = e^x$, usando una tabla de logaritmos comunes, y se construirá luego la gráfica de esta función.

Por ejemplo, si $x = 1.5$, entonces

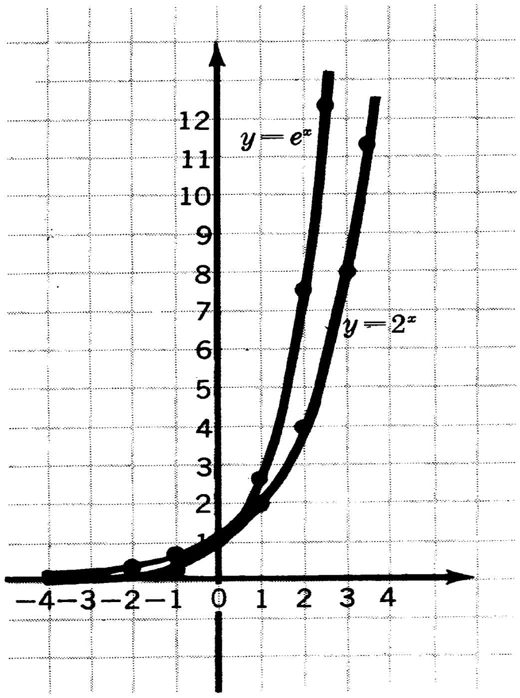


Figura 14.2

$$y = e^{1.5}$$

y

$$\begin{aligned}\log y &= 1.5(\log e)\\ &= 1.5(\log 2.718)\\ &= 1.5(.4343)\\ &= .6514\end{aligned}$$

Por tanto,

$$y = 4.5$$

Análogamente, si $x = -2$.

$$\begin{aligned}\log y &= -2(\log e)\\ &= -2(.4343)\\ &= -.8686\\ &= 9.1314 - 10\end{aligned}$$

Entonces

$$y = 0.14$$

ó 0.1 para la construcción de la gráfica.

De modo semejante se obtuvo la siguiente tabla en la cual se construyó la gráfica de la fig. 14.2. En la misma figura se muestra la gráfica de $y = 2^x$.

x	-4	-2	-1	0	1	1.5	2	2.5	3
e^x	.02	.1	.4	1	2.7	4.5	7.4	12.2	20

Los ejemplos siguientes ilustran la aplicación de los métodos gráficos a sistemas de ecuaciones que comprenden logaritmos.

EJEMPLO Resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned}y &= \log x\\ 3x + 2y &= 6\end{aligned}$$

Solución: Las ecuaciones no se pueden resolver simultáneamente por métodos algebraicos. Sin embargo, si se construyen las gráficas de las dos ecuaciones (Fig.

14.3), se puede estimar ese punto de intersección y de ese modo obtener su solución aproximada. En la (fig. 14.3), la abscisa del punto de intersección está entre 1.8 y 1.9. En la primera ecuación, cuando $x = 1.8$, $y = 0.26$ y cuando $x = 1.9$, $y = 0.28$. En consecuencia, entre estos dos puntos la gráfica es, aproximadamente, una línea recta. En la segunda ecuación, si $x = 1.8$, $y = 0.3$, y si $x = 1.9$, $y = 0.15$. Se puede ahora ampliar la escala, localizar los dos puntos y unir los correspondientes pares con líneas rectas. (Fig. 14.4). Estas dos líneas se cortan en un punto cuyas coordenadas son, aproximadamente, $x = 1.83$, $y = 0.26$. Sustituyendo estos

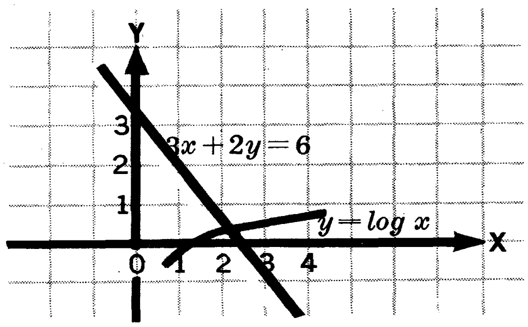


Figura 14.3

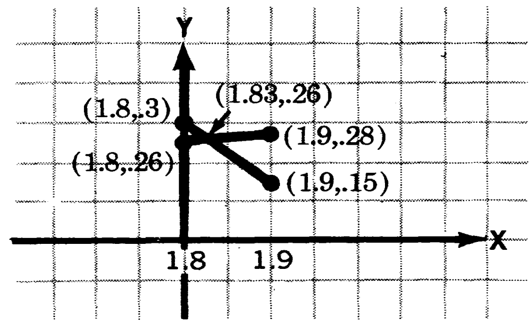


Figura 14.4

valores en las ecuaciones originales se puede comprobar que este par de valores es la solución aproximada.

EJERCICIO 69 GRAFICAS DE ECUACIONES LOGARITMICAS

Constrúyanse las gráficas de las ecuaciones de los problemas 1 a 12.

1: $y = \log_8 x$
2: $y = \log_{11} x$
3: $y = \log_6 x$
4: $y = \log_4 x$
5: $y = \log_{10} 3x$
6: $y = \log_{10} 5x$
7: $y = \log_{10} x^2$
8: $y = \log_{10} x^3$
9: $y = 2^x$
10: $y = 6^x$
11: $y = 4^x$
12: $y = 3^{2x}$

Empleando el método gráfico encuéntrense, con aproximación de una cifra decimal, las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones.

13: $y = 1'$
$x + y$
14: $y = 10^x$
$x + y = 5$
15: $y = 10^x$
$y = x^2 - 2x + 1$
16: $y = 10^x$
$y = x^2$
17: $y = \log_{10} x$
$x + y = 4$
18: $y = \log_{10} x$
$x + y = 6$
19: $y = \log_7 x$
$y^2 = x$
20: $y = \log_5 x$
$3x + y = 5$

15 PROGRESIONES

SE CUENTA QUE el inventor del ajedrez pidió como recompensa un grano de trigo por el primer cuadro del tablero, dos granos por el segundo, cuatro por el tercero y así sucesivamente hasta completar los sesenta y cuatro cuadros del tablero. Afortunadamente, este deseo de aspecto modesto fue analizado antes de ser concedido, pues al llegar al vigésimo cuadro la recompensa habría ascendido a más de un millón de granos de trigo y para el sexagésimo cuarto cuadro, el número resultante representaría una cantidad astronómica que hubiera excedido en mucho el total de granos de trigo en aquel reino oriental.

La base de esta leyenda, que es una secuencia de números relacionados de una manera especial, tiene aplicaciones importantes. Muchas de estas caen fuera del alcance de este libro; sin embargo, podrán discutirse algunos de los problemas de este tipo, que son tan prácticos como amenos.

15.1 DEFINICION DE PROGRESIONES

progresión

En Matemáticas se trabaja frecuentemente con secuencias de números, cada uno de los cuales se puede obtener del que le precede mediante la aplicación de alguna ley. Las secuencias de este tipo se llaman progresiones y se ilustran en los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1 Las diferencias en metros que recorre un cuerpo cada segundo al caer libremente partiendo del reposo son para los primeros cinco segundos.

$$5.36, \quad 16.09, \quad 26.83, \quad 37.56, \quad 26.29.$$

¿Cuál es la base de esta secuencia?

Solución: Si se suma 10.73 a cualquier número de esta secuencia se obtiene el número que le sigue.

EJEMPLO 2 Cada persona tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, etc. Por tanto, la lista del número de antecesores que una persona tiene en las cinco generaciones que le preceden es la secuencia

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32.$$

¿Cuál es la base de esta secuencia?

Solución: En ésta cada término es doble del que le precede.

Las dos secuencias anteriores ejemplifican las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. Estas dos progresiones son usuales en Matemáticas y en sus campos de aplicación y se dedicará el resto de este capítulo a la discusión de ellas.

15.2 PROGRESION ARITMETICA

diferencia común

Una progresión aritmética es una secuencia de números relacionados de tal manera que cada uno, después del primero, se pueden obtener del que le precede sumando a éste una cantidad fija llamada *diferencia común.*

En los ejemplos siguientes se ilustra la significación y aplicación de estos términos.

1. Si el primer término es 2 y la diferencia común es 5, entonces los primeros ocho términos de la progresión aritmética son

$$2, \quad 7, \quad 12, \quad 17, \quad 22, \quad 27, \quad 32, \quad 37.$$

2. En la secuencia

$$16, \quad 14\tfrac{1}{2}, \quad 13, \quad 11\tfrac{1}{2}, \quad 10, \quad 8\tfrac{1}{2}$$

cada término, después del primero, es $1\frac{1}{2}$ menor que el que le precede. Por tanto, ésta es una progresión aritmética y su diferencia común es $-1\frac{1}{2}$.

Muchos problemas relativos a progresiones aritméticas, tienen que ver con tres o más de las cinco cantidades siguientes: el primer término, el último, el número de términos, la diferencia común y la suma de todos los términos. Por tanto, es necesario obtener fórmulas que permitan determinar cualquiera de esas cinco cantidades si se conocen los valores de otras tres.

Se considerará que

a = primer término de la progresión
l = último término
d = diferencia común.
n = número de términos
s = suma de todos los términos

15.3 ULTIMO TERMINO DE UNA PROGRESION ARITMETICA

De acuerdo con la notación anterior, los cuatro primeros términos de una progresión aritmética son

$$a \quad a + d \quad a + 2d \quad a + 3d$$

Debe notarse que en el segundo término el coeficiente de d es uno y que dicho coeficiente se incrementa en uno cuando se pasa de un término al que le sigue. Por tanto, el coeficiente de d en cualquier término es igual al número de orden del término de la progresión, menos uno. De ese modo el sexto término es $a + 5d$ y el noveno $a + 8d$ y el último o enésimo término es $a + (n - 1)d$. Por consiguiente, se tiene la fórmula siguiente

$$l = a + (n - 1)d \tag{15.1}$$

EJEMPLO 1 Si 2, 6 y 10 son los tres primeros términos de una progresión aritmética, encontrar el octavo término.

Solución: Puesto que el primero y segundo de los términos, así como el segundo y el tercero, difieren en 4, se concluye que $d = 4$. Además, $a = 2$, $n = 8$. Por tanto, sustituyendo estos valores en (15.1), se tiene

$$\begin{aligned} l &= 2 + (8 - 1)4 \\ &= 2 + 28 \\ &= 30 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Si el primer término de una progresión aritmética es -3, y el octavo término es 11, encontrar d y escribir los ocho términos de la progresión.

Solución: En este problema $a = -3$, $n = 8$, $l = 11$. Si se sustituyen estos valores en (15.1), se tiene

$$\begin{aligned} 11 &= -3 + (8 - 1)d \\ 11 &= -3 + 7d && \textit{haciendo operaciones} \\ -7d &= -14 && \textit{transponiendo} \\ d &= 2 && \textit{resolviendo para } d \end{aligned}$$

De donde, puesto que $a = -3$, los ocho primeros términos de la progresión son $-3, -1, 3, 5, 7, 9, 11$.

15.4 SUMA DE UNA PROGRESION ARITMETICA

Para obtener la suma s de n términos de una progresión aritmética en la que el primer término es a y la diferencia común es d, se observa que los términos de la progresión son a, $a + d$, $a + 2d$ y así sucesivamente hasta llegar al último término, que de acuerdo con (15.1), es $l = a + (n - 1)d$. Por tanto,

$$s = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] \tag{15.2}$$

Considerando que en (15.1) hay n términos y que a aparece en todos ellos, se pueden ordenar de otro modo dichos términos y escribir

$$s = na + [d + 2d + \cdots + (n - 1)d] \tag{15.3}$$

Ahora se puede invertir el orden de los términos escribiendo l como primer término, con lo cual $l - d$ es el segundo, $l - 2d$ el tercero y así sucesivamente hasta el enésimo término, que de acuerdo con (15.1), es $l + (n - 1)(-d)$.
Por tanto, la suma se puede escribir

$$s = l + (l - d) + (l - 2d) + \cdots + [l + (n - 1)(-d)]$$

o bien, sumando las l y las d

$$s = nl - [d + 2d + \cdots + (n - 1)d] \tag{15.4}$$

Por último, sumando miembro a miembro (15.3) y (15.4), se observa que se cancelan los términos que contienen a d, esto es

$$\begin{aligned} 2s &= na + nl \\ &= n(a + l) \end{aligned}$$

Por tanto, dividiendo entre 2, se tiene la fórmula

$$\blacktriangleright\ s = \frac{n}{2}(a + l) \tag{15.5}$$

Se puede obtener una segunda forma para la suma de los términos de una progresión aritmética, sustituyendo en (15.5) el valor que tiene l en la fórmula (15.1). Se tiene así

$$s = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d]$$

o

$$\blacktriangleright\ s = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \tag{15.6}$$

EJEMPLO 1 Encontrar la suma de todos los enteros pares de 2 a 1 000, ambos inclusive.

Solución: Puesto que los enteros pares considerados, 2, 4, 6, etc., forman una progresión aritmética con $d = 2$, se puede emplear (15.5) con $a = 2$, $n = 500$ y $l = 1\,000$, para obtener la suma propuesta. La sustitución de esos valores en (15.5) da

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{500}{2}(2 + 1000) \\ &= 250(1002) = 250{,}500 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Una persona compra un automóvil usado en \$6 000.00 y acepta pagar \$1 000.00 al contado y \$1 000.00 al mes con interés de 6 por ciento anual sobre saldos insolutos. ¿Cuál es la erogación total que realiza?

Solución: El interés de 6 por ciento anual equivale a 0.5 por ciento mensual. Por tanto, después de hacer el primer pago, la deuda se incrementa en el interés

que corresponde a \$5 000.00 en un mes

$$(0.005)\ (\$5\,000.00) = \$25.00.$$

Puesto que paga \$1 000.00 al mes, el interés se va reduciendo mes a mes en 0.5 por ciento de \$1 000.00 ó, lo que es lo mismo, en \$5.00 por mes. El pago final será \$1 000.00 más el interés de \$1 000.00 en un mes, esto es, \$1 005.00. Por tanto, los pagos sucesivos forman una progresión aritmética con $a = \$1\,025.00$, $l = \$1\,005.00$ y $n = 5$. Entonces, según (15.5), la suma de los pagos es

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{5}{2}(\$102.50 + \$100.50) \\ &= \tfrac{5}{2}(\$203) = \$507.50 \end{aligned}$$

De ese modo, el costo del automóvil es \$6 075.00.

15.5 USO SIMULTANEO DE LAS FORMULAS DE l Y DE s

Si de las cantidades l, a, n, d, s se conocen tres, cualesquiera que sean, se pueden encontrar las otras dos mediante el uso de las fórmulas (15.1), y (15.5) ó (15.6). Si las tres cantidades conocidas aparecen en cualquiera de las dos fórmulas, las otras dos pueden encontrarse usando las fórmulas separadamente. Sin embargo, si en una de las fórmulas aparecen sólo dos de las tres cantidades conocidas, las dos no conocidas se pueden hallar resolviendo simultáneamente (15.1) y (15.5).

EJEMPLO 1 Si $a = 4$, $n = 10$ y $l = 49$, encontrar d y s.

Solución: Puesto que tanto (15.1), como (15.5), contienen a n y l, se pueden encontrar d y s usando las fórmulas separadamente. Si se sustituyen en (15.1), a, n y l, se tiene

$$\begin{aligned} 49 &= 4 + (10 - 1)d \\ 49 &= 4 + 9d && \textit{realizando las operaciones indicadas} \\ 9d &= 45 && \textit{transponiendo} \\ d &= 5 && \textit{resolviendo para } d \end{aligned}$$

Análogamente, sustituyendo en (15.5), se tiene

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{10}{2}(4 + 49) \\ &= 5(53) \\ &= 265 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Si $l = 23$, $d = 3$ y $s = 98$, encontrar a y n.

Solución: Si se sustituyen estos valores en (15.1) y en (15.5), se obtiene para la primera

$$23 = a + (n - 1)3 \tag{1}$$

y para la segunda

$$98 = \frac{n}{2}(a + 23) \tag{2}$$

Cada una de estas ecuaciones contiene las dos cantidades deseadas a y n. Por tanto, se puede completar la solución resolviendo simultáneamente (1) y (2). Si se resuelve (1) para a, se tiene

$$\begin{aligned} a &= 23 - (n - 1)3 \\ &= 26 - 3n \end{aligned} \tag{3}$$

Sustituyendo en (2) ese valor de a, se tiene

$$\begin{aligned} 98 &= \frac{n}{2}(26 - 3n + 23) && \\ 196 &= n(49 - 3n) && \textit{se han eliminado y operado las fracciones} \\ 196 &= 49n - 3n^2 && \textit{se han efectuado las operaciones indicadas} \\ 3n^2 - 49n + 196 &= 0 && \textit{se han transpuesto} \\ n &= 9\tfrac{1}{3} \text{ and } 7 && \textit{según la ecuación de segundo grado} \end{aligned}$$

Puesto que n no puede ser fraccionario, se descarta $9\frac{1}{3}$, y se tiene

$$n = 7$$

Sustituyendo en (3) este valor de 7 por n, se tiene

$$\begin{aligned} a &= 26 - 3(7) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por tanto, la progresión consiste de siete términos: 5, 8, 11, 14, 17, 20 y 23.

15.6 MEDIOS ARITMETICOS

Los términos entre el primero y el último de una progresión aritmética se llaman *medios aritméticos*. Si la progresión contiene solamente tres términos, el término intermedio se llama *medio aritmético* del primero y del último término. Se pueden encontrar los medios aritméticos entre dos números, usando primero (15.1) para determinar d. Con este valor se calculan los medios. Si la progresión consiste de tres términos a, m y l, entonces, de acuerdo con la fórmula (15.)

$$l = a + (3 - 1)d = a + 2d$$

Por tanto,

$$d = \frac{l - a}{2}$$

y

$$m = a + \frac{l - a}{2} = \frac{a + l}{2}$$

regla para determinar el medio aritmético

Por tanto, el medio aritmético de dos números es igual a la mitad de su suma.

EJEMPLO 1 Colocar cinco medios aritméticos entre 6 y -10.

Solución: Puesto que se trata de colocar cinco medios entre 6 y -10, se tendrán en total siete términos. Por tanto, $n = 7$, $a = 6$ y $l = -10$. Así, de acuerdo con (15.1), se tiene

$$\begin{aligned} -10 &= 6 + (7 - 1)d && \\ 6d &= -16 && \textit{realizando las operaciones indicadas y transponiendo} \\ d &= -\tfrac{16}{6} = -\tfrac{8}{3} && \textit{resolviendo para } d \end{aligned}$$

y de ese modo la progresión consiste de los términos 6, $\frac{10}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{3}$, $-\frac{14}{3}$, $-\frac{22}{3}$, $-\frac{30}{3}$.

EJERCICIO 70. PROGRESIONES ARITMETICAS

Escríbanse los n primeros términos de las progresiones aritméticas que contienen los elementos dados en los problemas 1 a 12.

1: $a = 3, d = 3, n = 5$
2: $a = 6, d = -2, n = 6$
3: $a = -4, d = 2, n = 7$
4: $a = -1, d = 2, n = 5$
5: $a = 7$; segundo término, 5; $n = 8$
6: $a = -6$; tercer término, -2; $n = 5$
7: $a = 8$; segundo término, 5; $n = 7$
8: $a = -5$; tercer término, -1, $n = 6$
9: Segundo término, 9; cuarto término, 7; $n = 9$
10: Tercer término, 10; sexto término, 4; $n = 7$
11: Cuarto término, 6; segundo término, 12; $n = 8$
12: Quinto término, 2; segundo término, 11; $n = 6$

Encuéntrense los enésimos términos de las progresiones aritméticas descritas en los problemas 13 a 20.

13: $a = 2, d = 2, n = 5$
14: $a = -5, d = 2, n = 6$
15: $a = -1, d = 3, n = 6$
16: $a = 3, d = 1, n = 8$
17: $a = 9, d = -2, n = 7$
18: $a = 12, d = -3, n = 5$
19: $a = -6, d = -1, n = 8$
20: $a = 8, d = -2, n = 7$

Encuéntrense las sumas de los términos de las progresiones aritméticas descritas en los problemas 21 a 28.

21: $a = 5, l = 9, n = 9$
22: $a = 1, l = 7, n = 8$
23: $a = 7, l = -3, n = 7$
24: $a = -3, l = 9, n = 7$
25: $a = 6, n = 5, d = 3$
26: $a = 7, n = 6, d = -2$
27: $a = -7, n = 7, d = -2$
28: $a = -8, n = 11, d = 3$

Encuéntrense dos de las cinco cantidades l, a, n, d y s que no aparecen en los datos de los problemas 29 a 48.

29: $a = 2, n = 8, d = -1$
30: $a = 7, n = 6, d = -2$
31: $l = 15, a = 3, n = 7$
32: $l = 20, a = -4, n = 9$
33: $l = -11, n = 8, s = -32$
34: $l = 5, n = 10, s = 5$
35: $l = 29, a = 5, s = 153$
36: $l = 9, a = -7, s = 9$
37: $l = -14, a = 2, d = -2$
38: $l = -7, a = 9, d = -2$
39: $a = 4, n = 11, s = -11$
40: $a = -5, n = 9, s = 27$
41: $l = 3, n = 8, d = -2$
42: $l = -11, n = 11, d = -3$
43: $a = 19, d = -3, s = 63$
44: $a = 4, d = 2, s = 88$
45: $l = 1, d = -1, s = 78$
46: $l = -1, d = 1, s = -45$
47: $n = 9, d = -2, s = 45$
48: $n = 9, d = 2, s = 27$

49: Colóquense tres medios aritméticos entre 2 y 14.
50: Colóquense cuatro medios aritméticos entre 1 y 21.
51: Colóquense cinco medios aritméticos entre 37 y 19.
52: Colóquense cinco medios aritméticos entre 21 y -3.
53: Encuéntrese la suma de todos los enteros pares comprendidos entre 9 y 35.
54: Encuéntrese la suma de todos los enteros impares comprendidos entre 6 y 32.
55: Encuéntrese la suma de todos los múltiplos de 3, de 9 a 27, ambos inclusive.
56: Encuéntrese la suma de todos los múltiplos de 6, comprendidos entre 11 y 58.
57: Una persona ganó \$20.70 el primero de julio y luego recibió un aumento

diario de \$1.90 por el resto del mes. Calcúlese cuánto ganó durante ese mes.
58: Un mensajero recibió \$1.20 por el primer paquete entregado en cierto día y luego recibió 30 centavos de aumento por cada paquete siguiente. Calcúlese cuánto ganó en ese día, si en total entregó 19 paquetes.
59: Un herrero cobró 10 centavos por colocar el primer clavo para herrar un caballo y luego cobró por cada clavo adicional 20 centavos más que por el anterior. Calcúlese cuánto recibió, si en total empleó 24 clavos.
60: Un cuerpo que cae desde el reposo recorre 490 centímetros en el primer segundo y en cada segundo siguiente recorre 980 centímetros más que en el segundo inmediatamente anterior. Calcúlese cuánto recorrerá el cuerpo en nueve segundos.
61: La calificación de un estudiante fue de 41 puntos en el primero de siete exámenes de álgebra y en cada examen siguiente obtuvo 8 puntos más que en el examen inmediatamente anterior. ¿Cuál fue su calificación en el último examen?
62: En una maderería hay un montón de postes con 31 postes en la hilera del suelo y con un poste menos en cada hilera que en la hilera inmediatamente anterior. Calcúlese cuántos postes hay en la hilera superior si el total de postes es 286.
63: Una máquina cuesta \$3 200.00 y se deprecia 25% el primer año, 21% del valor original el segundo año, 17% del valor original el tercer año y así sucesivamente. ¿Cuál será su valor después de seis años?
64: Los tres dígitos de un número, en su orden original, forman una progresión aritmética cuya suma es 15. Encuéntrese el número si éste decrece 198 unidades al invertir el orden de los dígitos.
65: Una familia compró un acondicionador de aire pagando una parte al contado y \$100.00 mensuales, más el interés correspondiente, durante ocho meses. Calcúlese el interés pagado si la tasa fue 6%.
66: Un estudiante compró un radio en \$163.90, para fin de rifarlo. Los valores de los boletos fueron los de los 12 primeros múltiplos positivos de \$2.50. Calcúlese cuánto ganó en la operación.
67: Encuéntrese el valor de x, si $x + 1$, $4x + 1$ y $8x - 1$ son términos consecutivos de una progresión aritmética.
68: Encuéntrese el valor de x si $x + 1$, $2x$ y $2x + 2$ son términos consecutivos de una progresión aritmética.

15.7 PROGRESIONES GEOMETRICAS

Una *progresión geométrica* es una secuencia de números relacionados de tal manera que cada uno, después del primero, se puede obtener del que le precede multiplicando a éste por una cantidad fija llamada razón común.

Las secuencias que se muestran a continuación son progresiones geométricas, cuya razón se indica a la derecha

$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162$ *razón* 3
$3,\ -3,\ 3,\ -3,\ 3$ *razón* -1
$96,\ 24,\ 6,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{8}$ *razón* $\frac{1}{4}$

Para obtener las fórmulas concernientes a progresiones geométricas se considerará que

a = primer término
l = último término
r = razón
n = número de términos
y
s = suma de los términos

15.8 ULTIMO TERMINO DE UNA PROGRESION GEOMETRICA

De acuerdo con la notación anterior, los seis primeros términos de una progresión geométrica, en la que a es el primer término y r es la razón, son

$$a \quad ar \quad ar^2 \quad ar^3 \quad ar^4 \quad ar^5$$

y en donde se observa que el exponente de r en el segundo término es uno y que dicho exponente se incrementa en uno al pasar de un término al inmediatamente siguiente. Por tanto, el exponente de r en cualquier término de la progresión es igual al número de orden del término menos uno. En consecuencia, el enésimo término es ar^{n-1}. De ese modo se tiene la fórmula:

$$\blacktriangleright\ l = ar^{n-1} \tag{15.7}$$

EJEMPLO Encontrar el séptimo término de la progresión geométrica 36, —12, 4, . . .

Solución: En esta progresión cada término, después del primero, se obtiene multiplicando el que le precede por $-\frac{1}{3}$.* Por tanto, $r = -\frac{1}{3}$. Evidentemente, $a = 36$, $n = 7$, y el séptimo término es 1. Por tanto, sustituyendo estos valores en (1), se tiene

$$\begin{aligned} l &= 36(-\tfrac{1}{3})^{7-1} \\ &= \frac{36}{(-3)^6} \\ &= \tfrac{36}{729} \\ &= \tfrac{4}{81} \end{aligned}$$

15.9 SUMA DE UNA PROGRESION GEOMETRICA

Si se suman los términos de una progresión geométrica $a, ar, ar^2, . .,$ $ar^{n-2}, ar^{n-1},$ se tiene

$$s = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \tag{15.8}$$

Esta expresión se puede escribir en forma abreviada empleando un

* Dados dos términos consecutivos de una progresión geométrica se calcula dividiendo el segundo término por el primero: en este caso $-12 \div 36 = -\frac{1}{3}$.

recurso matemático. Primero, se multiplica cada miembro de (15.8) por r, y se tiene

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \tag{15.9}$$

Luego se observa que si se sustrae miembro a miembro (15.9) de (15.8) se anulan todos los términos del miembro de la derecha, excepción hecha del primer término de (15.8) y del último término de (15.9). De ese modo, se tiene

$$s - rs = a - ar^n$$

o

$$s(1 - r) = a - ar^n$$

resolviendo para s esta última ecuación, se tiene

$$\blacktriangleright\ s = \frac{a - ar^n}{1 - r} \qquad r \neq 1 \tag{15.10}$$

Si se multiplican los dos miembros de (15.7) por r, se obtiene $rl = ar^n$. Luego, si en (15.10) se sustituye ar^n por rl, se tiene

$$\blacktriangleright\ s = \frac{a - rl}{1 - r} \qquad r \neq 1 \tag{15.11}$$

EJEMPLO 1 Encontrar la suma de los seis primeros términos de la progresión 2, -6, 18 . . .

Solución:

En esta progresión, $a = 2$, $r = -3$, y $n = 6$. Por tanto, sustituyendo estos valores en (15.10), se tiene

$$\begin{aligned} s &= \frac{2 - 2(-3)^6}{1 - (-3)} \\ &= \frac{2 - 2(729)}{1 + 3} \\ &= -364 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 El primer término de una progresión geométrica es 3 y el cuarto 24. Encontrar el décimo término y la suma de los diez primeros términos.

Solución: Tanto para encontrar la suma como para encontrar el décimo término se requiere conocer el valor de r. Este valor se obtiene considerando la progresión que puede formarse con los cuatro primeros términos que hay entre 3 y 24, ambos inclusive. De ese modo, se tiene $a = 3$, $l = 24$, y $n = 4$. Sustituyendo estos valores en (15.7) se tiene

$$24 = 3r^{4-1}$$

$3r^3 = 24$ *realizando operaciones y transponiendo*

$r^3 = 8$ *dividiendo ambos miembros por 3*

$r = 2$ *resolviendo para r*

Luego, usando de nuevo (15.7), para $a = 3$, $r = 2$, y $n = 10$, se tiene

$$\begin{aligned} l &= 3(2^{10-1}) \\ &= 3(512) \\ &= 1536 \end{aligned}$$

Por tanto, el décimo término es 1536.

Para obtener s, se emplea (15.10) para $a = 3$, $r = 2$, $n = 10$, y se obtiene

$$s = \frac{3 - 3(2)^{10}}{1 - 2} = \frac{3 - 3(1024)}{-1} = \frac{3 - 3072}{-1} = 3069$$

15.10 USO SIMULTANEO DE LAS FORMULAS DE l Y DE s

Si se dan tres de los cinco cantidades s, n, a, r y l, se pueden conocer las otras dos mediante el ejemplo de la fórmula (15.7), y de las fórmulas (15.10) ó (15.11). Por ejemplo, si se dan a, l y s, se puede encontrar r empleando (15.11) y después se puede obtener n empleando (15.7).

EJEMPLO 1 Si $a = 3$, $l = 192$ y $s = 129$, encontrar n

Solución: Si $a = 3$, $l = 192$ y $s = 129$, se tiene de acuerdo con (15.11).

$$\begin{aligned} 129 &= \frac{3 - r(192)}{1 - r} \\ 129 - 129r &= 3 - 192r && \textit{se han eliminado las fracciones} \\ -129r + 192r &= 3 - 129 && \textit{se han transpuesto} \\ 63r &= -126 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

Sustituyendo luego los valores de a, l y r en (15.7), se tiene

$$\begin{aligned} 192 &= 3(-2)^{n-1} \\ (-2)^{n-1} &= 64 \\ &= (-2)^6 \\ n - 1 &= 6 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Si se dan s, l y n no es posible encontrar a y r empleando una sola de estas tres fórmulas. Por tanto, se sustituyen los valores conocidos en dos de ellas y se resuelven simultáneamente, para a y para r, las ecuaciones obtenidas.

EJEMPLO 2 Si $s = 61$, $l = 81$ y $n = 5$ encontrar a y r.

Solución: Si $s = 61$, $l = 81$ y $n = 5$, se pueden encontrar a y r empleando dos de las tres fórmulas, cualesquiera que sean. Sin embargo, el trabajo se facilita si se emplean precisamente (15.7) y (15.11). Sustituyendo valores, se tiene

$$81 = ar^4 \qquad (1)$$

$$61 = \frac{a - 81r}{1 - r} \qquad (2)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver simultáneamente resolviendo primero (2) para a en términos de r, y sustituyendo luego en (1).

$$61 - 61r = a - 81r \qquad \textit{se han eliminado las fracciones} \qquad (3)$$
$$a = 61 + 20r \qquad \textit{se ha resuelto para } a$$
$$81 = (61 + 20r)r^4 \qquad \textit{se ha sustituido } a \textit{ en } (1)$$
$$20r^5 + 61r^4 - 81 = 0 \qquad \textit{se han efectuado las operaciones indicadas}$$

Después se encuentran las raíces racionales empleando el método del Pr. (12.11) y resultan ser -3 y 1. La solución $r = 1$ se tiene que descartar en virtud de que para este valor (2) carece de significado. Sin embargo, si $r = -3$, entonces, sustituyendo en (3), $a = 1$. Por tanto, la solución es $a = 1$, $r = -3$.

15.11 MEDIOS GEOMETRICOS

Los términos de una progresión geométrica, situados entre el primero y el último, se llaman medios geométricos. Si la progresión contiene solamente tres términos, el término intermedio se llama *medio geométrico* de los otros dos. Para obtener los medios geométricos entre a y l se emplea la fórmula (15.7) para encontrar el valor de r. Con este valor se calculan los medios. Si en la progresión hay únicamente tres términos, entonces, según (15.7)

$$l = ar^2$$

Por tanto,

$$r = \pm\sqrt{\frac{l}{a}}$$

De ese modo el segundo término o medio geométrico entre a y l, es

$$a\left(\pm\sqrt{\frac{l}{a}}\right) = \pm\sqrt{\frac{a^2l}{a}} = \pm\sqrt{al}$$

regla para determinar el medio geométrico

Por tanto, el *medio geométrico entre dos cantidades es igual a más o menos la raíz cuadrada de su producto.*

EJEMPLO 1 Encontrar cinco medios geométricos entre 3 y 192.

Solución: Se considera que la progresión tiene 7 términos, puesto que se intercalan 5 entre el primero y el último. Por tanto, $n = 7$, $a = 3$ y $l = 192$. Entonces, según, (15.7),

$$192 = 3(r^{7-1})$$
$$r^6 = \tfrac{192}{3}$$
$$= 64$$
$$r = \pm\sqrt[6]{64} = \pm 2 \qquad \textit{resolviendo para } r$$

En consecuencia, los dos conjuntos de cinco medios geométricos entre 3 y 192 son 6, 12, 24, 48, 96 y -6, 12, -24, 48, -96.

EJEMPLO 2 Encontrar el medio geométrico de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$.

Solución: De acuerdo con la proposición dada inmediatamente antes del ejemplo 1, el medio geométrico de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$ es $\pm\sqrt{(\frac{1}{2})(\frac{1}{8})} = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{4}$.

EJERCICIO 71. PROGRESIONES GEOMETRICAS

Escríbanse los primeros n términos de las progresiones geométricas que contienen los elementos dados en los problemas 1 a 12.

1: $a = 3, r = 2, n = 5$

2: $a = \frac{1}{2}, r = -2, n = 6$

3: $a = -4, r = 3, n = 4$

4: $a = -1, r = -3, n = 7$

5: $a = 8$; segundo término, 4; $n = 6$

6: $a = -\frac{1}{4}$; cuarto término, 2; $n = 7$.

7: $a = -16$; tercer término, -4; $n = 6$

8: $a = 27$; cuarto término, 1; $n = 8$

9: Segundo término, 8; tercer término, 4; $n = 7$

10: Segundo término, 1; quinto término, 125; $n = 6$

11: Sexto término, 162; tercer término, 6; $n = 7$

12: Séptimo término, $\frac{1}{4}$; quinto término, 1; $n = 7$

Encuéntrese el enésimo término de las progresiones geométricas descritas en los problemas 13 a 20.

13: $a = 2, r = 2, n = 5$

14: $a = 32, r = \frac{1}{2}, n = 6$

15: $a = \frac{1}{3}, r = 3, n = 6$

16: $a = 81, r = \frac{1}{3}, n = 7$

17: $a = 625, r = .2, n = 6$

18: $a = 343, r = \frac{1}{7}, n = 5$

19: $a = \frac{1}{27}, r = 3, n = 7$

20: $a = 64, r = \frac{1}{4}, n = 6$

Encuéntrese la suma de los términos de las progresiones geométricas, descritas en los problemas 21 a 28.

21: $a = 1, r = 2, n = 5$

22: $a = 81, r = \frac{1}{3}, n = 6$

23: $a = 625, r = .2, n = 6$

24: $a = \frac{1}{2}, r = 2, n = 7$

25: $a = 125, r = .2, l = .2$

26: $a = \frac{1}{9}, r = 3, l = 81$

27: $a = 128, r = \frac{1}{4}, l = .5$

28: $a = \frac{1}{25}, r = 5, l = 125$

Encuéntrense dos de las cinco cantidades s, a, n, r y l que no aparecen en los datos de los problemas 29 a 44.

29: $a = 2, r = 3, l = 162$

30: $a = 64, r = \frac{1}{2}, l = 2$

31: $n = 6, r = 3, l = 27$

32: $n = 5, r = .2, l = 1$

33: $n = 7, a = \frac{1}{8}, l = 8$

34: $n = 4, a = 343, l = 1$

35: $s = 511, r = \frac{1}{2}, l = 1$

36: $s = \frac{3906}{125}, r = 5, l = 25$

37: $s = 242, a = 2, r = 3$

38: $s = 126, a = 64, r = \frac{1}{2}$

39: $s = \frac{40}{9}, n = 4, l = 3$

40: $s = -\frac{5}{8}, n = 4, l = -1$

41: $s = \frac{127}{8}, n = 7, r = 2$

42: $s = 400, n = 4, r = \frac{1}{7}$

43: $s = 448, n = 3, a = 256$

44: $s = -\frac{104}{125}, n = 4, a = \frac{1}{125}$

En los problemas 45 a 52 colóquese entre los dos números dados el número de medios geométricos indicado.

45: Dos entre 3 y 24

46: Dos entre 1 y 125

47: Cuatro entre $\frac{1}{4}$ y 8

48: Cuatro entre $\frac{1}{27}$ y 9

49: Tres entre 2 y 32

50: Uno entre 8 y 128

51: Cinco entre $\frac{1}{8}$ y 8

52: Tres entre 3 y 243

53: ¿Cuántos ancestros tienen un par de gemelos en las siete generaciones inmediatas que les preceden?

54: El conductor de un camión carguero cobra ordinariamente \$3.90 por milla. Al hacer un viaje de 800 millas, de Houston a El Paso, se le da a escoger entre su paga ordinaria y \$12.50 por las primeras 100 millas, \$25.00 por las segundas 100 millas, \$50.00 por las terceras 100 millas y así sucesivamente. ¿Qué plan deberá escoger y cuánto ganará con esa mejor selección?

55: Once hombres pescan desde un muelle. El primero posee un capital de $2 000, el segundo de $4 000, el tercero de $8 000 y así sucesivamente. Calcúlese el número de millonarios que hay en el grupo.
56: Un herrero cobra 10 centavos por colocar el primer clavo al herrar una cebra y por cada clavo siguiente cobra el doble que por el inmediatamente anterior. Calcúlese cuánto cobra en total por los 24 clavos empleados en el trabajo.
57: Una persona deposita $2 000 cada primero del año en un banco que paga 4% anual de interés compuesto. Calcúlese el saldo a su favor al final del sexto año.
58: Un automóvil se deprecia 30% de su valor cada año. ¿Cuál será el valor de un automóvil que originalmente costó $30 000 al final del quinto año?
59: Una persona legó la tercera parte de su herencia al mayor de sus hijos, la tercera parte del resto al siguiente y así sucesivamente hasta el cuarto hijo, y los $16 000 restantes a su universidad. Encuentrese el monto total de la herencia.
60: Si los números 1, 4 y 19 se suman al primero, segundo y tercer términos, respectivamente, de una progresión aritmética con $d = 3$, se obtiene una progresión geométrica. Encuéntrese la progresión aritmética y también la razón común de la progresión geométrica.
61: Demuéstrese que el producto de los términos segundo y quinto de una progresión geométrica es igual al producto de los términos tercero y cuarto.
62: Demuéstrese que los productos de los términos que se corresponden en dos progresiones geométricas son términos de una nueva progresión geométrica.
63: Si $\frac{1}{y-x}$, $\frac{1}{2y}$ y $\frac{1}{y-z}$ forman una progresión aritmética demuéstrese que x, y y z forman una progresión geométrica.
64: Si p y q son dos números positivos diferentes, demuéstrese que su medio geométrico es menor que su medio aritmético.

15.12 PROGRESIONES GEOMETRICAS INFINITAS

Si en una progresión geométrica la razón está comprendida entre -1 y 1, los valores numéricos de los términos decrecen conforme se incrementa.

Por tanto, si el número de términos de la progresión es suficientemente grande se puede esperar que la adición de más términos no influya perceptiblemente en el valor de la suma de ellos. Se demostrará que si $-1 < r < 1$, la suma de los términos de una progresión geométrica se va aproximando a un número fijo, a medida que n se incrementa. La fórmula (15.10) se puede expresar en la forma

$$s = \frac{a}{1-r}(1 - r^n) \tag{15.12}$$

Si $-1 < r < 1$, entonces el valor numérico de r^n disminuye cuando n se incrementa y se puede hacer arbitrariamente pequeño escogiendo a n suficientemente grande. Por tanto, al incrementarse el valor de n la cantidad dentro del paréntesis en (15.12) se aproxima cada vez más a uno. De ese modo s se aproxima a $a/(1 - r)$. En otras palabras: cuanto mayor sea el valor de n más próximo está el valor de s al valor

de $a/(1 - r)$. En consecuencia, cuando en una progresión geométrica la razón está entre -1 y 1 y el número de términos es ilimitado, se puede escribir

$$s = \frac{a}{1 - r} \tag{15.13}$$

EJEMPLO 1 Encontrar la suma de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ en donde los puntos indican que la progresión no tiene fin.

Solución: En esta progresión, $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$. Por tanto, según (15.13)

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Una fracción decimal cuyos dígitos se repiten indefinidamente es ejemplo de una progresión geométrica infinita en la cual $-1 < r < 1$. Por ejemplo,

$$.232323 \cdots = .23 + .0023 + .000023 + \cdots$$

La secuencia de los términos de la derecha es una progresión geométrica en la cual $a = 0.23$ y $r = \frac{1}{100}$.
Mediante el uso de (15.13) se puede expresar cualquier fracción decimal con dígitos repetidos, como fracción común, de acuerdo con el método que se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Demostrar que $0.333 \ldots = \frac{1}{3}$.

Solución: La fracción decimal 0.333 . . . se puede expresar como la progresión

$$.3 + .03 + .003 + \cdots$$

en la cual $a = 0.3$, $r = 0.1$. Por tanto, de acuerdo con (15.13) la suma s es

$$s = \frac{.3}{1 - .1} = \frac{.3}{.9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

EJEMPLO 3 Expresar $3.2181818 \cdots$ como fracción común.

Solución. El número dado puede expresarse como 3.2 más una progresión geométrica infinita con $a = 0.018$ y $r = 0.01$. Por tanto, según (15.13)

$$\begin{aligned} 3.2181818 \cdots &= 3.2 + .018 + .00018 + .0000018 + \cdots \\ &= 3.2 + \frac{.018}{1 - .01} = 3.2 + \frac{.018}{.99} \\ &= 3.2 + \tfrac{1}{55} \\ &= 3\tfrac{12}{55} \end{aligned}$$

EJERCICIO 72. PROGRESIONES GEOMETRICAS INFINITAS

Considerando que el número de términos es ilimitado, encuéntrense las sumas de las progresiones geométricas cuyos elementos están dados en los problemas 1 a 12.

1: $a = 5$, $r = \frac{1}{2}$
2: $a = 3$, $r = \frac{1}{3}$
3: $a = 2$, $r = \frac{3}{5}$
4: $a = 15$, $r = \frac{1}{4}$

5: Primer término, 4; segundo término, 2.4.
6: Primer término, 30; segundo término, 6.
7: Primer término, 19; segundo término, .95.
8: Primer término, 9; segundo término, .9
9: Primer término, 4; cuarto término, $\frac{4}{125}$.
10: Primer término, 2; cuarto término, $\frac{2}{27}$.
11: Segundo término, 64; cuarto término, 4.
12: Tercer término, 9; quinto término, 1.

Exprésense las siguientes fracciones decimales de dígitos repetidos como fracciones comunes.

13: .333 · · · 14: .555 · · · 15: 7.77 · · ·
16: .444 · · · 17: .606060 · · · 18: .424242 · · ·
19: 7.57575 · · · 20: 2.12121 · · · 21: 4.7181818 · · ·
22: 4.5939393 · · · 23: .5261261 · · · 24: 1.5582582 · · ·

Encuéntrense las sumas de todos los números de la forma indicada en los problemas 25 a 28, siendo n un entero positivo.

25: $(\frac{2}{3})^n$ 26: $(\frac{3}{4})^n$ 27: 3^{-n} 28: 5^{-n}

29: Si una pelota rebota tres cuartos de la distancia recorrida en su caída calcúlese qué distancia total recorrerá antes de alcanzar un estado de reposo si se ha dejado caer de una altura de 2.6 metros.
30: El extremo inferior de un péndulo recorre un arco de 6 centímetros y en las siguientes oscilaciones cada arco es igual a los dos tercios del arco inmediatamente anterior. Cálculese cuanto recorre en total el extremo del péndulo hasta llegar al reposo.
31: Una bicicleta baja una pendiente frenando de tal modo que en cada segundo recorre tres cuartos de la distancia recorrida en el segundo anterior. Calcúlese cuánto recorre hasta pararse si avanzó 5 metros en el primer segundo.
32: 400 kilogramos de papas almacenadas pierden peso hasta llegar a 380 kilogramos en la primera semana. En cada semana siguiente la pérdida de peso es la mitad del peso perdido en la semana anterior. Calcúlese si el propietario del lote podrá compensar la pérdida vendiendo a \$2.40 el kilogramo de papa cuyo precio original fue de \$ 2.00 por kilogramo.
33: Un niño recibe \$5 000 durante el primer año de su vida de un fondo que le asegura un ingreso anual igual a la mitad del valor recibido el año anterior. Calcúlese el valor aproximado que llegará a recibir hasta que su primer nieto esté en segundo año de primaria.
34: Una universidad recibe un lote de acciones como donativo para su fondo, las cuales le producen \$7 100 como dividendo el primer año. Cada año el dividendo se reduce a los $\frac{9}{10}$ del valor que tuvo en el año anterior. ¿Cuál será la cantidad máxima total que la universidad pueda recibir por este concepto?
35: Se tiene un cuadrado cuya área es 36 centímetros cuadrados. Se traza luego un segundo cuadrado uniendo los puntos medios de los lados del primero; después, se traza otro uniendo los puntos medios de los lados del segundo y así sucesivamente. Encuéntrese la suma aproximada de las áreas.
36: Encuéntrese el valor aproximado de la suma de los perímetros de los cuadrados descritos en el problema 35.
37: Si $x >$ o $x < 1$ encuéntrese el valor de la siguiente suma

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{(2x-3)^2} + \frac{1}{(2x-3)^3} + \cdots$$

Dígase por qué es necesario limitar el intervalo de x en la forma indicada.

Encuéntrese el intervalo de valores de x para los cuales está definida la suma indicada en los problemas 38 a 40. Además, encuéntrese cada una de las sumas.

38: $\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{(2x+1)^2} + \dfrac{1}{(2x+1)^3} + \cdots$

39: $\dfrac{1}{3x+1} + \dfrac{2}{(3x+1)^2} + \dfrac{4}{(3x+1)^3} + \cdots$

40: $\dfrac{2}{3x+2} + \dfrac{6}{(3x+2)^2} + \dfrac{18}{(3x+2)^3} + \cdots$

15.13 PROGRESIONES ARMONICAS

regla para determinar el término n de una progresión armónica

Toda serie formada por los recíprocos de los términos de una progresión aritmética se llama *progresión armónica.** Por ejemplo, puesto que dos cantidades son recíprocas, únicamente si su producto es igual a la unidad, y puesto que $-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$ es una serie aritmética se concluye que $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{3} - 1, 1, \frac{1}{3}\, \frac{1}{5}\, \frac{1}{7}$, es una progresión armónica; *para determinar el enésimo término de una progresión armónica, se transforma ésta en una progresión aritmética, se calcula el término enésimo y se toma su recíproco.*

medio armónico

Los términos de una progresión armónica colocados entre cualesquiera otros dos se llaman *medios armónicos.*

EJEMPLO ¿Cuál es el décimo término de una progresión armónica cuyo primer y tercer término son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$ respectivamente?

Solución. El primero y el tercer término de la correspondiente progresión aritmética son 2 y 6. Por tanto, $1 = a + (3-1)d$, se convierte en $6 = 2 + 2d$ y, en consecuencia, $d = 2$. Entonces, cuando $n = 10$, $1 = 2 + (10-1)2 = 20$. Tomando el recíproco de 20 resulta que el décimo término de la progresión armónica es $\frac{1}{20}$.

EJERCICIO 73. PROGRESIONES ARMONICAS

Clasifíquense las progresiones de los problemas 1 a 16 y obténganse dos términos más de cada una de ellas.

1: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$	2: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}$	3: $1, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$
4: $\frac{1}{7}, \frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{5}$	5: $\frac{3}{2}, \frac{12}{11}, \frac{6}{7}, \frac{12}{17}$	6: $\frac{4}{3}, \frac{12}{13}, \frac{12}{17}, \frac{4}{7}$
7: $2, \frac{6}{5}, \frac{6}{7}, \frac{2}{3}$	8: $5, \frac{15}{8}, \frac{15}{13}, \frac{5}{6}$	9: $2, 5, 8, 11$
10: $3, -1, -5, -9$	11: $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$	12: $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}, \frac{5}{4}$
13: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$	14: $\frac{2}{3}, 1, 1.5, 2.25$	

15: $\dfrac{x+1}{x}, 1, \dfrac{x}{x+1}, \dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$

16: $\dfrac{x-1}{x+2}, 1, \dfrac{x+2}{x-1}, \dfrac{(x+2)^2}{(x-1)^2}$

* Vale la pena hacer notar que si cuerdas de igual peso se sujetan a iguales tensiones, producirán un sonido armonioso si sus longitudes forman una progresión armónica.

17: El segundo término de una progresión armónica es $\frac{1}{3}$ y el cuarto término es $\frac{1}{17}$. Encuéntrese el quinto término.

18: El tercer término de una progresión armónica es 3 y el quinto término es 4. Encuéntrense el octavo término.

19: El segudo término de una progresión armónica es 1.5 y el quinto término es —6. Encuéntrese el sexto término.

20: El cuarto término de una progresión armónica es $\frac{3}{7}$ y el séptimo término es 1.2 Encuéntrese el tercer término.

21: Colóquense dos medios armónicos entre 3 y $\frac{12}{13}$.

22: Colóquense dos medios armónicos entre 2.5 y $\frac{5}{7}$.

23: Colóquense cuatro medios armónicos entre 6 y $\frac{6}{7}$.

24: Colóquense cuatro medios armónicos entre .8 y 4.

16 INDUCCION MATEMATICA

TODAS LAS CIENCIAS, incluyendo las matemáticas, se desarrollan por medio del establecimiento de generalizaciones o leyes. La utilidad de la generalización radica en la posibilidad de liberarse de los casos particulares. Es posible manejar cada nuevo problema identificándolo simplemente como perteneciente al tipo de problemas cubiertos por la generalización.

Una manera de llegar a una generalización consiste en considerar, desde el principio, el caso general mismo. Eso fue lo que se hizo con respecto a la fórmula de la ecuación de segundo grado (8.2) en el Pr. 8.5. Para aplicar dicha fórmula solamente es necesario reconocer que la ecuación concuerda con la forma general de la ecuación de segundo grado. Es decir, se trabaja de lo general a lo particular, lo que constituye el método de la lógica llamado *deducción*.

Otra manera de llegar a una generalización consiste en examinar un cierto número de casos particulares para descubrir la forma en que están relacionados. Una vez que se encuentra la mencionada relación se le constituye en generalización o ley. Es decir, se trabaja de lo particular a lo general, lo cual forma el método de la lógica llamado *inducción*.

El peligro de la inducción reside en que los casos particulares, sin importar cuán grande sea su número, pueden tener características especiales que hagan que una generalización basada en ellos pueda resultar errónea.* Frecuentemente la ciencia debe conformarse a trabajar dentro

* El uso erróneo de la inducción es de frecuente ocurrencia en la vida diaria; por ejemplo, en los razonamientos de los mecánicos incompetentes, y es, además, uno de los factores que favorecen la adquisición de fobias y prejuicios.

de esta limitación, lo cual se llama *inducción incompleta*. En matemáticas es posible evitar este peligro mediante un método de demostración llamado *inducción matemática* o *inducción completa*.

16.1 METODO DE INDUCCION MATEMATICA

El método de inducción matemática se utilizará en el capítulo 17 para demostrar el teorema del binomio; en el presente capítulo se discutirá el método en sí. Por ejemplo, si en $q(n) = n^2 - n + 41$, se considera que $n = 0, 1, 2, 3$, se encuentra que $q(n)$ toma los valores 41, 41, 43 y 47, respectivamente. Estos números son primos, esto es, no son divisibles entre ningún número, excepto el número mismo o la unidad. Si se calcula el valor de $q(n)$ para cada valor entero de n hasta llegar a 40, se observa que $q(n)$ representa siempre números primos y esto sugiere, por tanto, que $q(n)$ representa un número primo por cada valor entero de n. Sin embargo, si $n = 41$, $q(n) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ que no es número primo.

En otro caso, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

Este resultado sugiere que la suma de los n primeros enteros impares es n^2, esto es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{16.1}$$

Puesto que la repetida verificación de la validez de (16.1) para valores particulares de n es una demostración de dicha validez, se deben emplear otros métodos para demostrarla en general. Frecuentemente se puede usar un método conocido como inducción matemática para probar que ciertas proposiciones en las que aparece n son válidas para todos los valores enteros positivos de n. El tipo de razonamiento implicado en la inducción matemática se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo hipotético. Supóngase que se puede alcanzar cierta meta mediante una sucesión de un cierto número de pasos no conocidos. Supóngase igualmente que a una persona puesta en el proceso de alcanzar dicha meta se le asegura que siempre le será posible dar el siguiente paso. Entonces, independientemente de cualquier otra circunstancia, la persona sabe que en última instancia puede llegar a la meta.

Para aplicar este razonamiento a la demostración de la proposición (16.1) se considera que la proposición es verdadera para algún valor entero, positivo, definido, pero no conocido de n, esto es, para $n = k$. Después se demostrará que con ello se concluye necesariamente que la proposición es válida para el siguiente entero positivo $k + 1$. Por tanto, si se puede comprobar que es válida para otro número, por ejemplo, $k = 3$, se sabe entonces que es válida para el siguiente entero $k = 4$ y así sucesivamente para todos los enteros positivos siguientes. En el ejemplo 1 se mostrará cómo puede efectuarse lo dicho anteriormente.

EJEMPLO 1 Demostrar, por inducción matemática, la fórmula (16.1)

Solución: Se considera primero que (16.1) es válida para $n = k$, y se obtiene

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \tag{2}$$

Se escribe luego la fórmula (16.1) con $n = k + 1$, y se tiene

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{3}$$

Se demostrará ahora que la validez de (3) se concluye necesariamente. El último término en el miembro de la izquierda de (3) es el término $(k + 1)$ de (16.1); por tanto, el inmediatamente anterior al último es el término k y, en consecuencia, es $(2k - 1)$. De ese modo se puede escribir (3) en la forma siguiente.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \tag{4}$$

Para demostrar que (4) es válida y con tal de que se suponga que (2) es válida, se observa que el miembro de la izquierda de (4) es el correspondiente miembro de (2), incrementando en $(2k + 1)$, esto es, en el término $(k + 1)$ de (16.1). Por tanto, se suma $2k + 1$ a cada miembro de (2), y se obtiene

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

que es igual a (4). Por tanto, si (2) es válida, (4) también lo es. Esto es, la fórmula (16.1) es válida para $n = k + 1$, si lo es para $n = k$

Evidentemente, (16.1) es válida para $n = 1$.

Ya que (4) ha sido probada si (16.1) es válida, (16.1) se satisface para $n = 1$, 2, 3, 4, 5 y así sucesivmente

El proceso general de una demostración por inducción matemática consiste de los cinco pasos siguientes:

pasos en la demostración de la inducción matemática

1. Se considera que la proposición o teorema por demostrar, es válida para n igual a un valor particular entero, positivo pero no especificado, k y se expresa esta consideración en forma simbólica.
2. Se obtiene una expresión simbólica del teorema para $n = k + 1$.
3. Se demuestra que si la ecuación en la proposición del paso l es válida, entonces también lo es la ecuación en la proposición del paso 2.
4. Se comprueba el teorema para el menor valor entero positivo de n, q, para el cual el teorema tenga significado.
5. Empleando la conclusión del paso 3, se demuestra en pasos sucesivos que el teorema es válido para $n = q + 1$, puesto que es válida para el entero q del paso 4; en seguida, que es válida para $n = q + 2$, puesto que lo es para $n = q + 1$; . . ., por último, que es válida para $n = q + m$, puesto que lo es para $n = q + (m - 1)$, independientemente del valor entero positivo de m.

Para efectuar el trabajo comprendido en el paso 3, no es posible dar indicaciones generales. Sin embargo, los siguientes ejemplos ilustran un procedimiento que frecuentemente se puede seguir.

EJEMPLO 2 Demostrar el teorema de De Moivre.

$$[r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta). \tag{1}$$

Solución: De acuerdo con el paso 1, se considera que (1) es válida para $n = k$, y se obtiene

$$[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^k = r^k(\cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta) \tag{2}$$

escribimos (1) con $n = k + 1$ y obtenemos:

$$[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^{k+1} = r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\,\mathrm{sen}\,(k+1)\theta] \tag{3}$$

Para demostrar que la validez de (3) se concluye de (2), se multiplica cada miembro de (2) por $r(\cos\theta + i\ \mathit{sen}\ \theta)$, puesto que esto dará una nueva igualdad, cuyo miembro de la izquierda será el mismo que el de (3). Se tiene así

$$\begin{aligned}[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^{k+1} &= [r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)][r^k(\cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta)]\\ &= r^{k+1}[\cos(k+1)\theta + i\,\mathrm{sen}\,(k+1)\theta] \qquad \textit{por } (11.8)\end{aligned}$$

Por tanto, (1) es válida para $n = k + 1$ si lo es para $n = k$.

Se verifica (2) para $k = 2$, y se obtiene

$$\begin{aligned}[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^2 &= r^2(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2\\ &= r^2[(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + i(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)]\\ &= r^2(\cos 2\theta + i\,\mathrm{sen}\,2\theta)\end{aligned}$$

Por tanto, de acuerdo con (3), (1) es válida para $n = 3, 4, 5$ y así sucesivamente.

EJEMPLO 3 Demostrar que $x^n - y^n$ es divisible entre $x - y$.

Solución: Se considera primero que $x^k - y^k$ es divisible por $x - y$, y se tiene

$$\frac{x^k - y^k}{x - y} = q(x,y) \tag{1}$$

en donde

$$q(x,y) = x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1} \tag{2}$$

Cuando $n = k + 1$, el cociente de $x^n - y^n$ entre $x - y$, se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}\frac{x^{k+1} - y^{k+1}}{x - y} &= \frac{x^{k+1} - xy^k + xy^k - y^{k+1}}{x - y} \qquad \textit{ya que } xy^k - xy^k = 0\\ &= \frac{x(x^k - y^k) + y^k(x - y)}{x - y}\\ &= x\left(\frac{x^k - y^k}{x - y}\right) + y^k\left(\frac{x - y}{x - y}\right)\\ &= x[q(x,y)] + y^k\\ &= x^k + x^{k-1}y + \cdots + x^2y^{k-2} + xy^{k-1} + y^k\end{aligned}$$

sustituyendo el valor que $q(x, y)$ tiene en (2).

Cuando $k = 2$, (1) se convierte en

$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y$$

Por tanto, $x^n - y^n$ es divisible entre $x - y$ cuando $n = 3, 4, 5$, etc

En la mayor parte de los problemas del ejercicio 74, el trabajo del paso 3 se puede efectuar sumando el término $(k + 1)$ de la fórmula en consideración a cada miembro de la ecuación obtenida en el paso 1.

EJERCICIO 74. INDUCCION MATEMATICA

Demuéstrense las siguientes proposiciones por medio de inducción matemática:

1: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2: $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

3: $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = n(n + 2)$

4: $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$

5: $4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1) = \frac{n}{2}(3n + 5)$

6: $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n - 1) = \frac{n}{2}(3n + 1)$

7: $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \frac{3n}{2}(n + 1)$

8: $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

9: $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

10: $2 + 6 + 18 + \cdots + 2(3^{n-1}) = 3^n - 1$

11: $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

12: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

13: $(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

14: $(2)(4) + (4)(6) + (6)(8) + \cdots + 2n(2n + 2) = \frac{4n(n + 1)(n + 2)}{3}$

15: $(1)(3) + (2)(4) + (3)(5) + \cdots + n(n + 2) = \frac{n(n + 1)(2n + 7)}{6}$

16: $\frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \frac{1}{(3)(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$

17: $1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$

18: $1 + 4 + 10 + \cdots + \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6} = \frac{(n)(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{24}$

19: $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$

20: $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = \frac{1}{2}n[2a + (n - 1)d]$

21: Demostrar que $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ es divisible entre $x + y$.

22: Demostrar que $x^{2n-1} - y^{2n-1}$ es divisible entre $x - y$.

17 EL TEOREMA DEL BINOMIO

EN EL CAPÍTULO 2 se analizó la expresión general para obtener el cuadrado de un binomio y posteriormente se empleó dicha expresión para resolver ecuaciones. Es obvio que un binomio no sólo puede ser elevado a la segunda potencia, sino también a cualquier otra potencia, para cuyo desarrollo habrá sin duda aplicaciones. El propósito del presente capítulo será construir una fórmula general para obtener potencias de un binomio.

17.1 LA FORMULA DEL BINOMIO

En este párrafo se desarrollará una fórmula que permite expresar como un polinomio cualquier potencia positiva entera de un binomio. Este polinomio recibe frecuentemente el nombre de desarrollo de la potencia de un binomio.

Por simple multiplicación se pueden obtener los siguientes desarrollos de la primera, segunda, cuarta y quinta potencias de $x + y$:

$$(x + y)^1 = x + y$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$
$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

propiedades del desarrollo $(x + y)^n$

Considerando las expresiones anteriores se puede comprobar fácilmente que existen las siguientes propidades de $(x + y)^n$, cuando $n = 1$, 2, 3, 4, y 5.

1. El primer término del desarrollo es x^n.

2. El segundo término es $nx^{n-1}y$.

3. El exponente de x disminuye en uno y el exponente de y se incremente en uno, cuando se pasa de un término a otro.

4. En el desarrollo hay $n + 1$ términos.

5. El término $(n + 1)$, o último término, es y^n.

6. El enésimo término, o penúltimo término, es nxy^{n-1}.

7. Si se multiplica el coeficiente de cualquier término por el exponente de x en ese término, y el resultado se divide entre el número de orden del término en el desarrollo, se obtiene el coeficiente del término que le sigue.

8. La suma de los exponentes de x y de y en cualquier término es n.

Si se considera que estas propiedades se satisfacen para cualquier potencia entera positiva de n, se pueden escribir los cinco primeros términos del desarrollo de $(x + y)^n$, como sigue:

Primer término $= x^n$ *por propiedad 1*

Segundo término $= nx^{n-1}y$ *por propiedad 2*

Tercer término $= \dfrac{n(n-1)}{2} x^{n-2}y^2$ *por propiedades 7 y 3*

Cuarto término $= \dfrac{n(n-1)(n-2)}{(3)(2)} x^{n-3}y^3$ *por propiedades 7 y 3*

Quinto término $= \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)(3)(2)} x^{n-4}y^4$ *por propiedades 7 y 3*

Este proceso se puede continuar hasta llegar al enésimo término, que es el penúltimo

nxy^{n-1} *por propiedad 6*

Y, por último, se alcanza el último término, o término $(n + 1)$

y^n *por propiedad 5*

A partir de lo anterior se puede formar la suma de esos términos y se puede obtener la fórmula del binomio. Sin embargo, introduciendo en este punto una nueva notación, se puede escribir el desarrollo de modo más abreviado.

El producto de cualquier entero positivo n por todos los enteros menores que n se llama factorial de n y se designa mediante el símbolo $n!$; por ejemplo,

factorial de n o n!

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ and $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

y que $2 = 2 \times 1 = 2!$, se puede escribir el desarrollo de $(x + y)^n$ como sigue

fórmula del binomio

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^{n-3}y^3$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^{n-4}y^4$$

$$+\cdots+nxy^{n-1}+y^n \tag{17.1}$$

La fórmula (17.1) se llama *fórmula del binomio* y la proposición establecida, *teorema del binomio.*

EJEMPLO 1 Emplear la fórmula del binomio para desarrollar $(2a+b)^6$.

Solución: Se aplica primero (17.1) para $x=2a$, $y=b$ y $n=6$. Después se simplifica cada término del desarrollo

$$(2a+b)^6=(2a)^6+6(2a)^5b+\frac{(6)(5)}{2!}(2a)^4b^2+\frac{(6)(5)(4)}{3!}(2a)^3b^3$$
$$+\frac{(6)(5)(4)(3)}{4!}(2a)^2b^4+\frac{(6)(5)(4)(3)(2)}{5!}(2a)b^5$$
$$+\frac{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{6!}b^6$$

Se efectúan las operaciones numéricas de los coeficientes, se eleva $2a$ a las potencias indicadas y se obtiene

$$(2a+b)^6=64a^6+6(32a^5)b+15(16a^4)b^2+20(8a^3)b^3$$
$$+15(4a^2)b^4+6(2a)b^5+b^6$$

Por último, se efectúan las multiplicaciones indicadas, y se tiene

$$(2a+b)^6=64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4+12ab^5+b^6$$

En muchos casos se pueden efectuar mentalmente las operaciones numéricas de los coeficientes aplicando la propiedad 7. De ese modo se puede evitar el tener que escribir el primer paso del desarrollo del ejemplo anterior.

EJEMPLO 2 Desarrollar $(a-3b)^5$.

Solución: El primer término del desarrollo es a^5 y el segundo es $5a^4(-3b)$. Para obtener el coeficiente del tercero se multiplica 5 por 4 y se divide el producto entre 2, obteniéndose 10. Por tanto, el tercer término es $10a^3(-3b)^2$. De análoga manera, el cuarto término es

$$\tfrac{30}{3}a^2(-3b)^3=10a^2(-3b)^3$$

Continuando este proceso se obtiene la expresión siguiente

$$\begin{aligned}(a-3b)^5&=a^5+5a^4(-3b)+10a^3(-3b)^2+10a^2(-3b)^3+5a(-3b)^4+(-3b)^5\\&=a^5-15a^4b+90a^3b^2-270a^2b^3+405ab^4-243b^5\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Desarrollar $(2x-5y)^4$.

Solución: El desarrollo se obtiene considerando $2x$ como primer término y $-5y$ como segundo. Se obtiene

$$\begin{aligned}(2x-5y)^4&=(2x)^4+4(2x)^3(-5y)+6(2x)^2(-5y)^2+4(2x)(-5y)^3+(-5y)^4\\&=16x^4+4(8x^3)(-5y)+6(4x^2)(25y^2)+4(2x)(-125y^3)+625y^4\\&=16x^4-160x^3y+600x^2y^2-1000xy^3+625y^4\end{aligned}$$

17.2 EL TERMINO r DE LA FORMULA DEL BINOMIO

En los ejemplos anteriores se explicó el método para obtener, a partir

del que le precede, cualquier término del desarrollo de un binomio. Sin embargo, de acuerdo con ese método es imposible obtener un término dado sin calcular previamente todos los términos que le preceden. En lo que sigue se obtendrá una fórmula que permita encontrar el término general r sin hacer referencia a los otros términos. Este trabajo es un ejemplo del método de razonamiento inductivo, (Cap. 16) método importante en toda investigación científica.

propiedades del quinto término

Si se considera el quinto término de (17.1), en el párrafo anterior, se notan las propiedades siguientes:

1. El exponente de y en el quinto término es una unidad menor que el número de orden, 5, del término en el desarrollo.
2. El exponente de x es n menos el exponente de y.
3. El denominador del coeficiente es el exponente de y seguido de un signo de admiración o factorial del exponente de y.
4. El primer factor del numerador es n y el último factor es n menos un número, que es igual al número de orden del término dos, o sea, $n - (5 - 2)$; y los factores intermedios son los enteros consecutivos entre el primero y el último factor.

Igualmente se puede comprobar que las propiedades anteriores son ciertas para los otros términos del desarrollo.

En consecuencia, se considera que dichas propiedades se satisfacen para *cualquier* término del desarrollo y, por tanto, para el término r, se tiene:

propiedades del término r

1. El exponente de y es $r - 1$
2. El exponente de x es $n - (r - 1) = n - r + 1$.
3. El denominador del coeficiente es $(r - 1)!$.
4. El último factor del numerador es

$$n - (r - 2) = n - r + 2,$$

y, por tanto, el numerador es

$$n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 2).$$

De ese modo se tiene la fórmula:

El término r en el desarrollo de $(x + y)^n$ es

$$\blacktriangleright \quad \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 2)}{(r - 1)!} x^{n-r+1} y^{r-1} \tag{17.2}$$

Debe observarse que esta fórmula se basa en la suposición de que las cuatro propiedades mencionadas son ciertas para todos los términos del desarrollo. La demostración de tal hecho es posible mediante el ejemplo de inducción matemática y se presentará en el párrafo siguiente

EJEMPLO Encontrar el sexto término en el desarrollo de $(2a - b)^9$.

Solución: En este problema, $x = 2a$, $y = -b$, $n = 9$, $r = 6$. Por tanto,

$r - 1 = 5$, $n - r + 1 = 9 - 6 + 1 - 4$, y $n - r + 2 = 5$ Por tanto, sustituyendo estos valores en (1), se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Sexto término } &= \frac{(9)(8)(7)(6)(5)}{(5)(4)(3)(2)(1)}(2a)^4(-b)^5 \\ &= 126(16a^4)(-b^5) \\ &= -2016a^4b^5 \end{aligned}$$

EJERCICIO 75. USO DE LA FORMULA DEL BINOMIO

Usese la fórmula del binomio para obtener los términos de los desarrollo de las potencias indicadas en los problemas 1 a 28.

1: $(a+b)^5$	2: $(b+d)^7$	3: $(u+v)^6$
4: $(a+w)^8$	5: $(p-q)^6$	6: $(a-y)^8$
7: $(p-x)^7$	8: $(b-t)^4$	9: $(x+2b)^7$
10: $(p+3q)^6$	11: $(2a+b)^8$	12: $(4b+c)^5$
13: $(2a-t)^6$	14: $(3c-d)^5$	15: $(x-5w)^4$
16: $(b-4h)^6$	17: $(a^3-b)^8$	18: $(2b-x^2)^6$
19: $(a^2-y^3)^7$	20: $(x^2-3y)^5$	21: $(a-1/a)^7$
22: $(2x-1/x)^5$	23: $(4/x^2-x/2)^5$	24: $(2/a^3-a^2/3)^6$
25: $(2a^2-3b^3)^4$	26: $(2x+y^2/2)^6$	27: $(a^{1/2}/3-6b)^5$
28: $(4c+\frac{1}{2}d^{1/2})^7$		

Encuéntrense los cuatro primeros términos de los desarrollos de las potencias de los binomios de los problema 29 a 36.

29: $(a+2b)^{14}$	30: $(x-3y)^{23}$	31: $(y-3c)^{19}$
32: $(b+4d)^{15}$	33: $(a^2-b)^{20}$	34: $(x^3+y)^{11}$
35: $(x^2+2a)^{12}$	36: $(b^4-y)^{18}$	

Usese la fórmula del binomio para obtener el valor de las potencias pedidas en los problemas 37 a 40.

37: $99^3 = (100-1)^3$	38: 102^4	39: 1.01^5
40: $.98^3$		

Encuéntrense los términos pedidos en los desarrollos de los siguientes problemas.

41: Sexto término de $(x-2y)^9$
42: Quinto término de $(2a+b)^8$
43: Décimo término de $(h+y)^{13}$
44: Séptimo término de $(h-2y)^{11}$
45: Octavo término de $(x^2-2)^{14}$
46: Cuarto término de $(x^3+3)^9$
47: Noveno término de $(x^{2/3}+3)^{17}$
48: Sexto término de $(a^{1/2}-2)^{10}$
49: Término central de $(2a+1/2a)^8$
50: Término central de $(3x^2+1/6x)^{10}$
51: Término central de $(2x-x2/8)^6$
52: Término central de $(3x^{-1}-x/3)^{12}$
53: Término que contiene y^3 en el desarrollo de $(3x-y)^6$
54: Término que contiene x^4 en el desarrollo de $(2a+x^2)^5$
55: Término que contiene a^5 en el desarrollo de $(2b-a)^9$
56: Término que contiene c^2 en el desarrollo de $(x+2c^{1/2})^7$

17.3 DEMOSTRACION DE LA FORMULA DEL BINOMIO

Se ha visto que la fórmula del binomio es cierta para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 y por inducción matemática se demostrará que es cierta para todo valor entero positvo de n. Para ello se considerará que es cierta para $n = k$ y se demostrará que también lo es para $n = k + 1$; por tanto, para todo valor entero positivo de n. En el supuesto de que es cierta para $n = k$, se tiene

$$(x + y)^k = x^k + kx^{k-1}y + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)x^{k-r+2}y^{r-2}}{(r-2)!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)x^{k-r+1}y^{r-1}}{(r-1)!} + \cdots + y^k \qquad (17.3)$$

Desarrollo que muestra el primero, el segundo, el $r - 1$, el r y el último término.

Multiplicando por $x + y$ los dos miembros de esta ecuación y omitiendo el primero y el último término, así como todos los que contienen y^{r-1} (éstos se obtienen multiplicando el término de la segunda línea de (17.3) por y y el término de la línea que sigue por x,) se tiene

$$(x + y)^{k+1} = x^{k+1} + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)x^{k-r+2}y^{r-1}}{(r-2)!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)x^{k-r+2}y^{r-1}}{(r-1)!} + \cdots + y^{k+1}$$

Sumando los coeficientes de $x^{k-r+2}y^{r-1}$, se tiene

$$\frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-2)!} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+2)}{(r-1)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)(r-1)}{(r-2)!(r-1)} + \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)(k-r+2)}{(r-1)!}$$

Dividiendo entre el factor $\dfrac{k(k-1)\cdots(k-r+3)}{(r-1)!}$, común se observa que el coeficiente es

$$\frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)[(r-1)+(k-r+2)]}{(r-1)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-r+3)(k+1)}{(r-1)!}$$

Por tanto, el término del producto de $x + y$ por $(x + y)^k$ que contiene y^{r-1} es

$$\frac{(k+1)k(k-1)\cdots(k-r+3)x^{k-r+2}y^{r-1}}{(r-1)!}$$

Empleando esta expresión como una fórmula para todos los términos, después del primero, se observa que el producto es

$$(x + y)^{k+1} = x^{k+1} + (k + 1)x^k y + \cdots + \frac{(k + 1)k(k - 1) \cdots (k - r + 3)x^{k-r+2}y^{r-1}}{(r - 1)!} + \cdots + y^{k+1} \tag{17.4}$$

Fácilmente se observa que esta ecuación es igual a la que se obtiene al sustituir k por $k + 1$ en (17.3). Por tanto, se ha demostrado que (17.3) es cierta para $n = k + 1$ si lo es para $n = k$. Este hecho, junto con el ya establecido de que también lo es para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5, permite afirmar que también es cierta para $n = 5 + 1 = 6$; por tanto, para $n = 6 + 1 = 7, \cdots$ y, en consecuencia, para todo entero positivo.

17.4 EL TEOREMA DEL BINOMIO PARA EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

La demostración de la fórmula del binomio para exponentes fraccionarios y negativos está más allá del propósito de este libro; sin embargo, se indicarán algunas aplicaciones elementales de ella. Debe notarse que el desarrollo de $(x + y)^n$ cuando n es fracción o es negativo no tiene último término, puesto que el coeficiente nunca es igual a cero; por tanto, es imposible completar la serie y sólo se puede obtener un número indicado o deseado de términos. Se dará sin demostración el siguiente hecho.

El desarrollo del binomio $x + y$ para exponentes fraccionarios o negativos, es válido únicamente si el valor de y está entre el de x y el de $-x$.

EJEMPLO 1 ¿Cuáles son los cuatro primeros términos del desarrollo de $(2 + x)^{1/2}$? ¿En qué intervalo es válido el desarrollo?

Solución:

$$\begin{aligned}(2 + x)^{1/2} &= 2^{1/2} + (\tfrac{1}{2})2^{-1/2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})2^{-3/2}x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})2^{-5/2}x^3}{3!} + \cdots \\ &= \sqrt{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}} - \frac{x^2}{16\sqrt{2}} + \frac{x^3}{64\sqrt{2}} - \cdots \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{128} - \cdots\right)\end{aligned}$$

El desarrollo es válido únicamente si $2 > x > -2$.

EJEMPLO 2 Determinar una aproximación a la raíz cuadrada de 10.

Solución:

$$\begin{aligned}\sqrt{10} &= 10^{1/2} = (9 + 1)^{1/2} = (3^2 + 1)^{1/2} \\ &= (3^2)^{1/2} + \frac{1}{2}(3^2)^{-1/2}(1) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(3^2)^{-3/2}(1)^2}{2}\end{aligned}$$

$$+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(3^2)^{-5/2}(1)^3}{(2)(3)}+\cdots$$

$$= 3 + \tfrac{1}{2}(3^{-1}) - \tfrac{1}{8}(3^{-3}) + \tfrac{1}{16}(3^{-5}) - \cdots$$
$$= 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{1}{3888}$$
$$= 3 + .16667 - .00463 + .00026$$
$$= 3.16230$$

Comparando los cuatro términos del desarrollo anterior, se observa que sus valores decrecen rápidamente. La rapidez de esta disminución se incrementa a medida que se amplia el desarrollo. De hecho, el quinto término es -0.0000178 y al sumarlo con los otros cuatro términos se obtiene $\sqrt{10} = 3.1622822$ o redondeando a cuatro cifras decimales 3.1623. Se concluye, por tanto, que éste es el valor corecto de $\sqrt{10}$ a cinco cifras. Evidentemente, el desarrollo se puede continuar hasta llegar al grado de exactitud que se desee.

EJERCICIO 76. USO DE LA FORMULA DEL BINOMIO PARA EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

Encuéntrense los cuatro primeros términos de los desarrollos de los problemas 1 a 20.

1: $(x + y)^{-2}$	**2:** $(a - b)^{-1}$	**3:** $(a - y)^{-3}$
4: $(x + b)^{-4}$	**5:** $(x - 3y)^{-1}$	**6:** $(2x + a)^{-2}$
7: $(3x + b)^{-2}$	**8:** $(a - 2b)^{-3}$	**9:** $(a - x)^{1/2}$
10: $(b + y)^{2/3}$	**11:** $(c + w)^{3/4}$	**12:** $(a - y)^{1/3}$
13: $(1 + x)^{-2/3}$	**14:** $(1 - y)^{-1/3}$	**15:** $(1 - t)^{-1/5}$
16: $(1 + s)^{-2/5}$	**17:** $(x - 1/x)^{-1}$	**18:** $(y + 1/y^2)^{-2}$
19: $(x^3 - 1/x)^{1/3}$	**20:** $(y^2 + 1/y)^{-1/2}$	

Encuéntrense valores aproximados para las operaciones indicadas en los problemas 21 a 28 empleando tres términos del desarrollo binomial. Compruébese cada resultado mediante el uso de logaritmos.

21: $\sqrt{122} = (11^2 + 1)^{1/2}$		**22:** $\sqrt[3]{126}$
23: $\sqrt[5]{31}$	**24:** $\sqrt[3]{63}$	**25:** 1.05^{-2}
26: 1.04^{-3}	**27:** 1.01^{-7}	**28:** 1.02^{-5}

18 INTERES COMPUESTO Y RENTAS

UNA DE LAS aplicaciones prácticas más frecuentes de las progresiones geométricas es su uso con relación a inversiones. Sin embargo, antes de estudiar esta aplicación se requieren algunas definiciones.

18.1 DEFINICIONES

interés

interés compuesto

período de capitalización

monto

tasa nominal

Lo que se paga por usar un capital se llama interés. Si el interés producido en una inversión se agrega al capital se dice que el *interés es compuesto*. La cantidad que se obtiene al sumar el interés y el capital se llama *monto* y se emplea como nuevo capital. El intervalo al final del cual se capitaliza el interés (esto es, se añade al capital) recibe el nombre de *período de capitalización*. Si el período de capitalización es diferente de un año la tasa anual establecida se llama *tasa nominal*.

Si se invierten \$100.00 al 5 por ciento anual, y el interés es capitalizable semestralmente, la tasa nominal es 5 por ciento, el período de capitalización es 6 meses, la tasa de interés por período de capitalización es $\frac{1}{2}$ (5 por ciento) $= 2\frac{1}{2}$ por ciento, el interés por 6 meses es 2.50 y el monto al final de los primeros seis meses es \$102.50. Por tanto, el interés para el segundo período de 6 meses es \$102.50(0.025) = \$2.56.

18.2 MONTO Y VALOR ACTUAL

Se considerará ahora que P pesos se invierten a una tasa, r, por período y que se desea determinar el monto al final de n períodos de capitali-

zación. El monto al final de cualquiera de esos períodos se obtiene multiplicando el capital invertido durante ese período por r y sumando este resultado al propio capital. Este valor se puede obtener fácilmente multiplicando por $1 + r$ el capital invertido durante ese período. Puesto que esta operación debe repetirse para cada período de capitalización, el monto S al final de n períodos es *

fórmula del monto

$$S = P(1 + r)^n \tag{18.1}$$

Esta fórmula es una ecuación que contiene 4 cantidades y puede resolverse para cualquiera de ellas si se conocen los valores de las otras tres. El trabajo requerido se puede reducir considerablemente mediante el uso de los valores de $(1 + r)^n$ y $(1 + r)^{-n}$ que se dan en las tablas IV y V del Apéndice.

EJEMPLO 1 ¿Cuál será el monto de \$150.00 después de siete años, capitalizando anualmente al 4 por ciento?

Solución: Sustituyendo $P = \$150.00$, $r = 0.04$, y $n = 7$ (en 18.1), se obtiene

$$S = \$150(1.04)^7$$

Si en la tabla IV, que proporciona los valores de $(1 + r)^n$, se observa para $n = 7$ la columna encabezada por 4 por ciento, se encuentra que $(1.04)^7 = 1.3159$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S &= \$150(1.3159) \\ &= \$197.39 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 ¿Cuánto tiempo será necesario para que \$250.00 se convierta en \$820.00 si se invierten al 5 por ciento, nominal anual, capitalizando semestralmente?

Solución: La tasa de interés por período de capitalización es la mitad del 5 por ciento. Por tanto, utilizando la fórmula para el monto se tiene

$$\begin{aligned} 820 &= 250(1.025)^n \\ 1.025^n &= \tfrac{820}{250} = 3.2800 \end{aligned}$$

Puesto que 3.2800 no se halla en la columna encabezada por $2\frac{1}{2}$ por ciento, se debe interpolar. Los números que pueden usarse en la interpolación son 3.2715 y 3.3533. Puesto que el primero corresponde a $n = 48$ el tiempo es

$$48 + \left(\frac{.0085}{.0818}\right) \text{ períodos de capitalización}$$

como puede verse de

$$\begin{array}{ll} n & (1 + r)^n \\ 48 & 3.2715 \\ & 3.2800 \\ 49 & 3.3533 \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3.2715 \\ 3.2800 \end{array}\right\} .0085 \\ \end{array}\right\} .0818$$

* La ecuación (18.1) puede establecerse escribiendo la secuencia P′, P″, P‴, . . . de los capitales sucesivos, cualquiera de los cuales puede ser el monto si se le considera como último término de la secuencia. De este modo se obtienen las ecuaciones $P' = P(1 + r)$, $P'' = P'(1 + r)$, y así sucesivamente. Esto permite justificar la validez de (18.1) mediante sustitución.

Simplificando este resultado y dividiéndolo entre dos, puesto que cada período de interés es de seis meses, se encuentra que el tiempo requerido es 24.052 años.

valor actual

La cantidad que debe ser invertida en un momento dado con el fin de producir un monto deseado a una tasa y en un tiempo especificados, se llama *valor actual.** La fórmula (18.1) es una relación entre el monto S, el valor actual P, la tasa r por período y el número de períodos n. Si se resuelve la fórmula para P. se obtiene

$$P = S(1 + r)^{-n} \tag{18.2}$$

EJEMPLO 3 ¿Cuál es el valor actual de $1 000.00 con vencimiento a nueve años, si la tasa de interés es 6 por ciento y la capitalización es anual?

Solución: Sustituyendo en la fórmula (18.2) las cantidades conocidas, se obtiene

$$P = \$1000(1.06)^{-9}$$

De donde, utilizando la Tabla V se encuentra

$$(1.06)^{-9} = .59190.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P &= (\$1000)(.59190) \\ &= \$591.90 \end{aligned}$$

18.3 TASA EFECTIVA DE INTERES

La tasa anual a la cual el capital se incrementa cuando la tasa nominal es j y la capitalización se hace m veces por año, se llama *tasa efectiva.*

Así, la relación entre la tasa nominal y la tasa efectiva es

relación entre tasa nominal y tasa efectiva

$$1 + i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m \tag{18.3}$$

puesto que, \$1.00 formará un monto de $\$(1 + i)$ en un año a la tasa efectiva i, y se acumulará a $\$\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$ en un año a la tasa nominal j, capitalizable m veces por año.

El valor de $\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m$ se puede obtener en la tabla de montos del Apéndice y después restarle 1 para obtener el valor de la tasa efectiva i.

EJEMPLO 1 Encontrar la tasa efectiva anual, si la tasa nominal es 8 por ciento, capitalizable trimestralmente.

Solución: Sustituyendo en la relación dada para tasas nominales y tasas efectivas, se obtiene

* En la fórmula (18.1) esta cantidad recibió el nombre de capital. La misma cantidad representa ahora al concepto de *valor actual*, el cual se introduce aquí debido a su utilidad en el estudio de las rentas, que constituyen una aplicación importante del interés compuesto.

$$1 + e = \left(1 + \frac{.08}{4}\right)^4$$
$$= (1.02)^4$$
$$= 1.0824$$

Por tanto, la tasa efectiva es

$$e = 1.0824 - 1 = .0824 = 8.24 \text{ por ciento}$$

Para encontrar ya sea el monto ya sea el valor actual correspondientes a una tasa nominal sólo es necesario emplear la fórmula que se obtiene de (18.1) remplazando la tasa r por la tasa j/m y el número de períodos en t años si hay m períodos por año. Haciendo estas sustituciones en (18.1), se obtiene

$$\blacktriangleright S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt} \tag{18.4}$$

y resolviendo para P, se obtiene

$$\blacktriangleright P = S\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-mt} \tag{18.5}$$

Obsérvese que los valores entre paréntesis en las expresiones (18.4) y (18.5) también pueden obtenerse mediante las Tablas IV y V, del Apéndice, respectivamente.

EJEMPLO 2 ¿Qué valor representan en la fecha actual \$720 pagaderos en 4 años empleando una tasa de 5% con capitalización semestral?

Solución: En este problema $S = \$720$, $t = 4$, $j = 5\%$, y $m = 2$. Sustituyendo en (18.5), se obtiene

$$P = 720\left(1 + \frac{.05}{2}\right)^{-(2)(4)} = 720(1 + .025)^{-8}$$
$$= 720(.82075) \quad \textit{según la Tabla V del Apéndice, columna del } 2\tfrac{1}{2}\% \textit{ y renglón con } n = 8$$
$$= \$590.94$$

EJERCICIO 77. INTERES COMPUESTO

Encuéntrese el valor de S, P, j, m o t que no aparece entre los datos de los problemas 1 a 24.

1: $P = \$400$, $j = 6$ por ciento $m = 1$, $t = 13$ años
2: $P = \$500$, $j = 5$ por ciento $m = 1$, $t = 8$ años
3: $P = \$240$, $j = 1.5$ por ciento $m = 1$, $t = 6$ años
4: $P = \$735$, $j = 3$ por ciento $m = 1$, $t = 4$ años
5: $S = \$3600$, $j = 4$ por ciento $m = 1$, $t = 37$ años
6: $S = \$5500$, $j = 2$ por ciento $m = 1$, $t = 26$ años
7: $S = \$460$, $j = 2.5$ por ciento $m = 1$, $t = 44$ años
8: $S = \$1270$, $j = 3$ por ciento $m = 1$, $t = 11$ años
9: $P = \$560$, $j = 6$ por ciento $m = 2$, $t = 17$ años
10: $P = \$2350$, $j = 5$ por ciento $m = 2$, $t = 20$ años

11: $P = \$4600, j = 6$ por ciento, $m = 4, t = 12$ años,
12: $P = \$7500, j = 8$ por ciento, $m = 4, t = 9$ años,
13: $S = \$5200, j = 5$ por ciento, $m = 2, t = 8$ años,
14: $S = \$2100, j = 8$ por ciento, $m = 2, t = 23$ años,
15: $S = \$1120, j = 6$ por ciento, $m = 4, t = 11$ años,
16: $S = \$480, j = 8$ por ciento, $m = 4, t = 7$ años,
17: $P = \$1000, S = \$1194.10, j = 6$ por ciento, $m = 2$
18: $P = \$1800, S = \$2771.10, j = 8$ por ciento, $m = 2$
19: $P = \$540, S = \$2836.78, j = 10$ por ciento, $m = 2$
20: $P = \$770, S = \$1768.84, j = 4$ por ciento, $m = 2$
21: $P = \$500, S = \$700, m = 1, t = 10$ años,
22: $P = \$300, S = \$461, m = 2, t = 9$ años,
23: $P = \$750, S = \$1010, m = 1, t = 7$ años,
24: $P = \$470, S = \$920, m = 2, t = 12$ años,

Encuéntrense las tasas efectivas equivalentes a las tasas nominales dadas en los problemas 25 a 32.

25: $j = 6$ por ciento, $m = 2$
26: $j = 4$ por ciento, $m = 2$
27: $j = 5$ por ciento, $m = 2$
28: $j = 3$ por ciento, $m = 2$
29: $j = 8$ por ciento, $m = 4$
30: $j = 6$ por ciento, $m = 4$
31: $j = 10$ por ciento, $m = 4$
32: $j = 9$ por ciento, $m = 3$

33: Un padre depositó \$1 000 a nombre de su hijo, el día de su nacimiento, en un Banco que paga el 4% con capitalización semestral. Calcúlese la cantidad que habrá a favor del hijo cuando entre a la universidad a la edad de dieciocho años.
34: Una persona le paga a un contratista dándole a escoger entre \$13 000 al contado y \$17 454 pagaderos en cinco años. ¿Qué selección debe hacer el contratista con base en una tasa de 6% con capitalización semestral y cuánto habrá ganado a los cinco años de la operación como resultado de esa mejor selección?
35: Una tienda ofrece un refrigerador por \$6 000 al contado o por \$6 380 a pagar en un año. ¿Qué plan debe escoger un comprador con base en una tasa de 6% con capitalización semestral y cuánto habrá ganado al final de un año como resultado de esa selección?
36: La familia A renta una casa propiedad de la familia B, pudiendo pagar \$1 080 al principio del año o bien \$1 169 al final del año. ¿Qué selección debe hacer la familia A si el valor del dinero es 8% capitalizable trimestralmente y qué utilidad se obtendrá al final del año como resultado de esa selección?
37: Un hacendado vendió su propiedad por \$8 000 de contado, \$7 000 pagaderos en cinco años y \$9 000 pagaderos en diez años. Calcúlese el valor equivalente de contado de la venta si el dinero vale 5%.
38: Para comprar un lote una persona deposita \$1 200 en un Banco de ahorro el primero de junio durante tres años consecutivos. Calcúlese de cuánto dispondrá un año después del último depósito si el Banco paga el 4%.
39: Una persona compró una propiedad pagando \$7 000 de contado y \$3 000 anuales por cuatro años consecutivos. Calcúlese el valor de contado de la propiedad si el dinero vale 4% capitalizable semestralmente.
40: Una granja se paga con \$8 000 de contado y \$5 000 anuales durante tres años. Calcúlese el pago total equivalente, al final de los tres años, si el valor del dinero es 6% capitalizable trimestralmente.
41: ¿Cuánto tiempo necesitará un capital para duplicarse con una tasa efectiva de 5%.
42: ¿Cuánto tiempo necesitará un capital para duplicarse al 4% capitalizable semestralmente?
43: ¿Cuánto tiempo más necesitará un capital para duplicarse con una tasa efec-

tiva de 6% que al 6% con $m = 4$?

44: ¿Cuánto tiempo más necesitará un capital para triplicarse al 5% que al 5% con $m = 2$?

45: ¿Qué tasa efectiva se requiere para que \$1 000 den un monto de \$1 670 en trece años?

46: ¿Qué tasa con capitalización semestral se requiere para que \$1 400 den un monto de \$1 750 en cinco años?

47: Una persona invirtió \$8 000 a nueve años, obteniendo un monto de \$11 700. Calcúlese la tasa efectiva empleada en la operación.

48: ¿Qué tasa con capitalización semestral debe emplearse para que \$1 600 den un monto de \$2 880 en once años?

18.4 RENTAS

Una inversión puede hacerse estipulando que el interés, o el interés más una parte del capital, se pague a intervalos regulares empezando en una fecha especificada. Originalmente dichos pagos se hacían anualmente, por lo cual se designaba al proceso con el nombre de *anualidad;* sin embargo, ahora resulta frecuente emplear cualquier intervalo regular, por lo que se refiere el nombre de renta para designar a la serie de pagos iguales. Por otra parte, las instituciones financieras facilitan, desde hace tiempo, que una persona establezca su propio fondo efectuando depósitos regulares, los que a su vez garantizan el pago posterior de una renta. Por tanto, ya sea con el propósito de establecer un fondo o bien de obtener pago de un fondo, se llamará renta a una serie de pagos iguales hechos a intervalos iguales.

renta

Existen varios planes de pagos de uso común que son rentas, como, por ejemplo, las compras en abonos y la amortización de hipotecas. Cualquiera que sea el propósito de los pagos la base matemática del sistema la constituye el interés compuesto. Uno de los problemas de rentas es el cálculo del pago que debe hacerse al final de cada intervalo durante un determinado número de años y con una tasa de interés conocida para que se produzca un monto fijado de antemano. Otro problema podría ser el de una persona que compra en abonos y desea conocer cuánto interés se le cargará en su serie de pagos. Como una aplicación más se tiene el caso de la persona que paga una hipoteca y desea conocer qué parte de uno de sus pagos se aplica al capital y qué parte del capital se ha pagado ya.

renta vencida
renta anticipada
período de la renta
pago periódico

Como se hizo notar, los pagos que forman una renta se hacen a intervalos regulares, pudiendo hacerse ya sea al principio o al final del intervalo; si se hacen al principio la renta se llama *renta anticipada,* y si se hacen al final, la renta se denomina *renta vencida.* El tiempo que transcurre entre cada pago se llama *período de la renta.* La cantidad invertida al final o al principio de cada período se llama *pago períodico.* El tiempo entre dos sumas sucesivas de intereses al capital se llama *período de capitalización.* El *término* de una renta se obtiene

multiplicando el número de pagos por el tiempo que transcurre entre dos pagos consecutivos. El monto de una renta es la suma de los montos de los diversos pagos, todos calculados hasta el final del término. Por ejemplo, si un inversionista obtiene un monto de \$ 853.30 depositando \$ 100.00 al final de cada trimestre, durante ocho trimestres, en un fondo que produce el 8% capitalizable trimestralmente, entonces el monto es \$ 853.30, el pago periódico es \$ 100.00, el período de la renta es tres meses, el término es (8) (tres meses) = dos años, el período de capitalización es tres meses y la tasa de interés por período es (¼) (8%) = 2%.

Se discutirán únicamente problemas de renta en los que el período de capitalización y el período de la renta coincidan, aunque en la práctica no es obligatorio que esto suceda.

18.5 MONTO DE UNA RENTA

Se determinará el monto para \$ 1.00, invertido al final de cada período de pago, durante un término de n períodos y suponiendo que el dinero vale i por cada período. El primer pago períodico se invierte durante $(n - 1)$ períodos, el segundo durante $(n - 2)$ períodos, el tercero durante $(n - 3)$ períodos, . . . , el último durante cero períodos.

De donde, empleando la fórmula para el monto a interés compuesto, resulta evidente que estos pagos se acumularán en $(1 + i)^{n-1}$, $(1 + i)^{n-2}$, . . . y 1, respectivamente, al final del término. Estas potencias de $1 + i$ forman una progresión geométrica de n términos. Invirtiendo su orden, se tiene $a = 1$, $r = 1 + i$, y $n = n$. Por tanto, el monto de una renta vencida puede obtenerse mediante la suma de esta progresión geométrica. En consecuencia, si se designa el monto de una renta por el símbolo $s_{\overline{n}|i}$ se tiene, (*)

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{1 - 1(1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = \frac{1 - (1 + i)^n}{-i} \text{ puésto que } s = \frac{a - ar^n}{1 - r} \qquad (18.6)$$

De donde, multiplicando el numerador y el denominador por -1, se observa que

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i} \qquad (18.7)$$

valor actual de una renta vencida

es el monto de una renta vencida de \$ 1.00 por período, durante un término de n períodos, siempre que el dinero valga i por período y siempre que coincidan el período de capitalización y el período de la renta.

Si el pago es R pesos por período, y si el monto se representa por S se tiene

* Este símbolo se lee s ángulo n a i y significa el valor acumulado de 1 al final de cada período para n períodos y a un interés i por período.

$$S = Rs_{\overline{n}|i} \qquad (18.8)$$

Existen tablas en las cuales se pueden obtener los valores de $s_{\overline{n}|i}$ para cualesquiera valores de n y de i que generalmente ocurren en las operaciones comerciales. La tabla VI en el apéndice es una tabla de esta clase abreviada y puede usarse para resolver los problemas de este libro.

EJEMPLO 1 ¿Cuál es el monto de una renta vencida, si el pago semestral es de \$100.00 durante un término de seis años y si el dinero vale 5 por ciento capitalizable semestralmente?

Solución: Puesto que el dinero vale 5 por ciento capitalizable semestralmente, la tasa por período es $2\frac{1}{2}$ por ciento; además, hay 12 períodos semestrales en los seis años. De donde, sustituyendo en la fórmula del monto de la venta ordinaria, se tiene

$$S = Rs_{\overline{12}|.025}$$

Si en la tabla VI, se busca en la columna encabezada por $2\frac{1}{2}$ por ciento, y en la línea que corresponde a $n = 12$, se encuentra 13.7956. Este es el monto de una renta vencida de \$1.00, por período, durante 12 períodos al $2\frac{1}{2}$ por ciento. De ahí que

$$S = \$100(13.7956) = \$1379.56$$

Si ésta hubiera sido una renta anticipada en lugar de una renta vencida, se hubiera encontrado el monto efectuando exactamente los mismos cálculos anteriores multiplicando el miembro de la derecha de (18.8) por $1 + i$; de aquí que el valor actual de una renta anticipada con vencimientos periódicos de, R por período, durante n períodos, a un interés de i por período, sea.

$$S(\text{anticipada}) = Rs_{\overline{n}|}(1 + i). \qquad (18.9)$$

EJEMPLO 2 Si se aplica al caso del ejemplo 1 una renta anticipada el resultado allí obtenido habrá que multiplicarlos por $1 + i = 1.025$.

$$\begin{aligned} S\ (\text{anticipada}) &= (\$1\,379.56)\ (1.025) \\ &= \$1\,414.05 \end{aligned}$$

18.6 VALOR ACTUAL DE UNA RENTA

El *valor actual de una renta* es el valor de contacto equivalente a la serie de pagos.

De donde, si el valor actual se acumula a la tasa dada por el término de la renta, se obtiene una cantidad igual al valor del monto, En consecuencia, si A y S representan, respectivamente, el valor actual y el valor del monto de una renta, entonces mediante el uso de la fórmula del monto compuesto, se tiene

$$S = A(1 + i)^n$$

Si esta ecuación se resuelve para A, se obtiene

$$A = S(1 + i)^{-n}$$

Reemplazando S por su valor dado en (18.8), párrafo anterior, se tiene

$$A = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^{-n}$$

Y, por tanto,

$$A = R\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] = Ra_{\overline{n}|i} \qquad (18.10)$$

valor actual de una renta

es el valor actual de una renta vencida de R pesos por período durante un término de n períodos, siempre que el dinero valga i por período y siempre que coincidan el período de capitalización y el período de la renta.

Los valores de $a_{\overline{n}|i}$ desde $n = 1$ hasta $n = 50$, y para i igual a $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5, y 6 por ciento, se pueden obtener en la tabla VII del apéndice.

La fórmula del valor actual de una renta anticipada se puede deducir de (18.10), multiplicando $1 + i$, puesto que cada pago es anterior en un período al correspondiente pago de una renta vencida.

EJEMPLO 1 ¿Cuál es el valor actual de una renta vencida de $50.00 trimestrales durante diez años si el dinero vale 8 por ciento capitalizable trimestralmente?

Solución: Puesto que el número de períodos es (10) 4 = 40, y la tasa es 2 por ciento por período, se tiene

$A = \$50a_{\overline{40}|.02}$.

Si se busca en la Tabla VII en la columna encabezada por 2 por ciento, y para $n = 40$, se encuentra 27.3555. Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= \$50(27.3555) \\ &= \$1367.78 \end{aligned}$$

valor actual de una renta anticipada

Si ésta hubiera sido una renta anticipada, se hubiera obtenido el valor actual efectuando las mismas operaciones anteriores y después multiplicando el resultado por $1 + i$, puesto que cada pago de una renta anticipada es anterior en un período al correspondiente pago de una renta vencida. Así,

$$A \text{ anticipada} = RA_{\overline{n}|i}(1+i) \qquad (18.11)$$

EJEMPLO 2 ¿Cuál es el valor actual de una renta anticipada de $50.000 trimestrales durante 10 años si el dinero vale 8 por ciento capitalizable trimestralmente?

Solución: Este caso difiere del expuesto en ejemplo 1 solamente multiplicar el valor allí obtenido por 1.02.

$$\begin{aligned} A \text{ anticipada} &= \$1367.78(1.02) \\ &= \$1395.14 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Encontrar el pago que debe hacerse al final de cada seis meses, durante nueve años, para formar un monto de $5 000.00 si el dinero vale 4 por ciento capitalizable semestralmente.

Solución: Puesto que cada pago se hace al final del intervalo, se trata de una renta vencida. Además, la tasa por período es $\frac{1}{2}$ (4 por ciento = 2 por ciento y hay

$9(2) = 18$ pagos. El valor acumulado S es \$5 000.00. Si se sustituyen estos valores en la fórmula (18.8), se obtiene

$$\begin{aligned} \$5000 &= Rs_{\overline{18}|.02} \\ &= 21.4123R && \textit{de la Tabla VI, bajo 2 por ciento parte a 18} \\ R &= \frac{\$5000}{21.4123} && \textit{resolviendo para } R \\ &= \$233.51 \end{aligned}$$

NOTA. Si ésta hubiera sido una renta anticipada, la fórmula para resolver R hubiera sido

$$\begin{aligned} \$5000 &= Rs_{\overline{18}|.02}(1.02) \\ R &= \frac{\$5000}{s_{\overline{18}|.02}(1.02)} \\ &= \$228.93 \end{aligned}$$

EJERCICIO 78. RENTAS

En los problemas 1 a 24, R representa el pago periódico; t, el término en años, y j, la tasa nominal de interés capitalizable m veces por año; además, el período de la renta y el período de capitalización coinciden.

Encuéntrense el monto y el valor actual de las rentas vencidas descritas en los problemas 1 a 12.

1: $R = \$500$, $t = 7$ años $j = 4$ por ciento, $m = 1$
2: $R = \$600$, $t = 5$ años $j = 5$ por ciento, $m = 1$
3: $R = \$300$, $t = 17$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 1$
4: $R = \$700$, $t = 25$ años, $j = 4$ por ciento, $m = 1$
5: $R = \$200$, $t = 19$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 2$
6: $R = \$720$, $t = 23$ años, $j = 5$ por ciento, $m = 2$
7: $R = \$1250$, $t = 24$ años, $j = 8$ por ciento, $m = 2$
8: $R = \$540$, $t = 16$ años, $j = 4$ por ciento $m = 2$
9: $R = \$860$, $t = 12$ años, $j = 6$ por ciento $m = 4$
10: $R = \$1130$, $t = 9$ años, $j = 8$ por ciento $m = 4$
11: $R = \$214$, $t = 8$ años, $j = 6$ por ciento $m = 4$
12: $R = \$570$, $t = 11$ años, $j = 10$ por ciento, $m = 4$

Encuéntrese el monto y el valor actual de las rentas anticipadas descritas en los problemas 13 a 24.

13: $R = \$800$, $t = 42$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 1$
14: $R = \$500$, $t = 29$ años, $j = 5$ por ciento, $m = 1$
15: $R = \$400$, $t = 38$ años, $j = 3$ por ciento, $m = 1$
16: $R = \$1250$, $t = 28$ años, $j = 4$ por ciento, $m = 1$
17: $R = \$350$, $t = 23$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 2$
18: $R = \$590$, $t = 17$ años, $j = 5$ por ciento, $m = 2$
19: $R = \$280$, $t = 9$ años, $j = 4$ por ciento, $m = 2$
20: $R = \$920$, $t = 18$ años, $j = 8$ por ciento, $m = 2$
21: $R = \$270$, $t = 11$ años, $j = 8$ por ciento, $m = 4$
22: $R = \$460$, $t = 7$ años, $j = 10$ por ciento, $m = 4$
23: $R = \$950$, $t = 12$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 4$
24: $R = \$180$, $t = 5$ años, $j = 8$ por ciento, $m = 4$

25: Una familia compra una casa mediante un pago inicial de \$30 000 y pagos

anuales de \$15 000 durante nueve años. Calcúlese el precio de contado equivalente si el valor del dinero es 6%.

26: Una persona hace un pago inicial de \$5 000 por un automóvil y luego paga \$2 500 por trimestre durante 2.5 años. Calcúlese el precio de contado del automóvil si el valor del dinero es 8% con capitalización trimestral.

27: El beneficiario de una póliza de seguro recibe un pago inicial de \$2 000 y luego recibe \$1 000 cada seis meses durante diez años. Calcúlese el valor de contado de la póliza si el valor del dinero es 5% capitalizable semestralmente.

28: El comprador de una póliza de seguro deberá recibir \$3 200 en su sexagésimo quinto cumpleaños y \$800 cada tres meses hasta que cumpla setenta años, inclusive. Calcúlese el valor de contado de esta póliza en el día en que la persona cumple sesenta y cinco años si el valor del dinero es 6% capitalizable trimestralmente.

29: Un matrimonio decide invertir \$10 000 por semestre para comprar una casa en cinco años. Si les es posible mantener esta inversión y lo hacen en una compañía que les paga el 6% capitalizable semestralmente, ¿de cuánto podrán disponer para la casa?

30: Un negocio se puede comprar pagando \$1 000 al final de cada trimestre durante ocho años o bien mediante un pago único de \$44 000 al final de los ocho años; ¿qué plan debe preferir el comprador si el valor del dinero es 8% capitalizable trimestralmente?

31: La maquinaria de una planta puede reemplazarse en diez años depositando \$13 000 al final de cada semestre en un fondo que produce el 6% capitalizable semestralmente. ¿Cuál es el costo del reemplazo?

32: Un padre deposita \$600 al final de cada semestre, durante catorce años, en un fondo a nombre de su hijo. Calcúlese el monto total de este fondo si la inversión se hizo al 5% capitalizable semestralmente.

18.7 PAGO PERIODICO, TERMINO Y TASA

Frecuentemente se desea encontrar el pago periódico que debe hacerse durante cierto tiempo y con una tasa dada, para cubrir una deuda o para amortizar una cantidad deseada. En otras ocasiones lo que se desea calcular es la tasa por período o bien el término. Problemas de estos tipos pueden resolverse por medio de la fórmula del monto (18.8) y de la fórmula del valor actual (18.10), como se ilustra en los tres ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 ¿Cuánto se deberá pagar al final de cada seis meses para obtener un monto de \$8 000 en diez años si el valor del dinero es 6% capitalizable semestralmente?

Solución: Debe emplearse la fórmula del monto (18.8), ya que \$8 000 es el valor al final del término. Sustituyendo $i = \frac{1}{2}(6\%) = 3\%$, $n = 10(2) = 20$ y $S = \$8000$, se obtiene

$$\$8000 = Rs_{\overline{20}|.03}$$

$$R = \frac{\$8000}{s_{\overline{20}|.03}} \qquad \textit{se ha resuelto para } R.$$

$$= \frac{\$8000}{26.8704} \qquad \textit{según la Tabla VI, columna 3 renglón 20.}$$

$$= \$297.73$$

EJEMPLO 2 Una deuda de \$7300 puede liquidarse con pagos trimestrales de \$220, al final de cada período, durante doce años. Calcúlese la tasa de interés con capitalización trimestral que se ha empleado.

Solución: Ya que \$7300 es el valor al principio del término, debe usarse la fórmula del valor actual (18.10). Sustituyendo en ella los valores dados se obtiene

$$
\begin{aligned}
7300 &= 220\, a_{\overline{48}|i} \\
a_{\overline{48}|i} &= \frac{7300}{220} \qquad \textit{se ha resuelto para } a_{\overline{48}|i} \\
&= 33.1818
\end{aligned}
$$

La Tabla séptima del Apéndice contiene valores de $a_{\overline{n}|i}$. Para $n = 48$ resulta que 33.1818 no aparece en la Tabla. Sin embargo, es posible interpolar entre 34.0426, para el 1½%, y 30.6731, para el 2%. Mediante el arreglo usual para la interpolación se obtiene

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
a_{\overline{48}|.015} &= 34.0426 \\
a_{\overline{48}|i} &= 33.1818
\end{aligned}\right\} .8608 \\
&a_{\overline{48}|.02} = 30.6731
\end{aligned}\right\} 3.3695
$$

Por tanto, i está a 0.608, 3,3695 = 0.255 de la distancia de 0.015 a 0.02; en consecuencia, $i = 0.015 \div 0.255(0.005) = 0.0163$
y la tasa nominal capitalizable trimestralmente es $j = 4(.0163) = .0652 = 6.52\%$.

EJEMPLO 3 ¿Cuántos pagos de \$70.67 se requieren para obtener un monto de \$4 268.61 si la tasa de interés es 2% por período?

Solución: En este caso se conoce el monto y el pago y se utilizará la fórmula del monto (18.8) para encontrar el número de pagos. Sustituyendo $R = \$70.67$, $S = \$4\,268.61$ e $i = 2\%$ en la fórmula (78.8), se obtiene

$$
\begin{aligned}
4268.61 &= 70.67 s_{\overline{n}|.02} \\
s_{\overline{n}|.02} &= \frac{4268.61}{70.67} \qquad \textit{se ha resuelto para } s_{\overline{n}|.02} \\
&= 60.4020
\end{aligned}
$$

En la Tabla VI del Apéndice se encuentra 60.4020 bajo el 2% y en el renglón 40; por tanto, se requieren 40 pagos.

EJERCICIO 79. PAGO PERIODICO, TASA Y TERMINO

Encuéntrese el pago periódico correspondiente a cada una de las anualidades vencidas descritas en los problemas 1 a 8.

1: $A = \$7750$, $t = 13$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 1$
2: $A = \$3960$, $t = 5$ años, $j = 5$ por ciento, $m = 2$
3: $A = \$16\,400$, $t = 14$ años, $j = 8$ por ciento, $m = 2$
4: $A = \$6738$, $t = 9$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 4$
5: $S = \$19\,800$, $t = 17$ años, $j = 5$ por ciento, $m = 1$
6: $S = \$6200$, $t = 7$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 2$
7: $S = \$9600$, $t = 10$ años, $j = 8$ por ciento, $m = 4$
8: $S = \$29\,860$, $t = 12$ años, $j = 6$ por ciento, $m = 4$

Encuéntrese la tasa nominal, con aproximación de .01%, en cada uno de los problemas 9 a 16.

9: $R = \$200$, $A = \$2600$, $t = 23$ años, $m = 1$

10: $R = \$400$, $A = \$7000$, $t = 33$ años, $m = 1$
11: $R = \$250$, $A = \$6300$, $t = 19$ años, $m = 2$
12: $R = \$380$, $A = \$11\,500$, $t = 11$ años, $m = 4$
13: $R = \$630$, $S = \$75\,600$, $t = 37$ años, $m = 1$
14: $R = \$420$, $S = \$50\,000$, $t = 21$ años, $m = 2$
15: $R = \$130$, $S = \$4040$, $t = 12$ años, $m = 2$
16: $R = \$680$, $S = \$44\,444$, $t = 11$ años, $m = 4$

Encuéntrese el término en años para cada uno de los problemas 17 a 24.

17: $A = \$2989.87$, $R = \$220$, $j = 4$ por ciento, $m = 1$
18: $A = \$1596.91$, $R = \$170$, $j = 5$ por ciento, $m = 1$
19: $A = \$6078.11$, $R = \$340$, $j = 6$ por ciento, $m = 2$
20: $A = \$8588.47$, $R = \$280$, $j = 8$ por ciento, $m = 4$
21: $S = \$1846.88$, $R = \$130$, $j = 5$ por ciento, $m = 1$
22: $S = \$3948.32$, $R = \$82$, $j = 5$ por ciento, $m = 2$
23: $S = \$5217.39$, $R = \$75$, $j = 6$ por ciento, $m = 4$
24: $S = \$7483.60$, $R = \$308$, $j = 8$ por ciento, $m = 4$

25: Una persona compra una propiedad de \$37 500 haciendo un pago de \$7 500 al contado. ¿Cuánto debe pagar cada seis meses, durante tres años, para liquidar el valor de la propiedad si se le carga el 6% capitalizable semestralmente?
26: Una familia considera que necesitará reemplazar su estufa, refrigerador y calentador de agua dentro de seis años, con un costo total de \$11 000. Calcúlese cuánto deben ahorrar al final de cada trimestre, durante los próximos seis años, para estar en condiciones de pagar al contado los artículos mencionados si sus ahorros ganan 6% con capitalización trimestral.
27: El señor Gómez desea poder pagar al contado un automóvil de \$32 000 dentro de tres años. Calcúlese cuánto deberá invertir al final de cada trimestre en una compañía que le paga el 8% capitalizable trimestralmente.
28: Una persona compra un terreno de \$58 000 haciendo un pago inicial de \$13 000. Calcúlese cuánto deberá pagar al final de cada semestre para terminar de liquidar la deuda en treinta meses si el valor del dinero es 6% con $m = 2$.
29: El señor Campos paga una deuda de \$39 000 en siete años mediante abonos de \$6 500 al final de cada año; ¿qué tasa efectiva se ha empleado?
30: El señor Martínez obtiene un monto de \$93 000 en ocho años invirtiendo \$10 350 al final de cada año. Calcúlese la tasa efectiva.
31: Los Pérez pagan una deuda de \$7 200 mediante abonos de \$720 al final de cada semestre durante seis años. Calcúlese la tasa nominal capitalizable semestralmente que fue empleada.
32: Una familia obtiene un monto de \$6 750 en cuatro años, depositando \$750 al final de cada semestre en un Banco de ahorro. Calcúlese la tasa nominal capitalizable semestralmente pagada por el Banco.

19 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

SON DE OCURRENCIA frecuente en la industria y en la administración gubernamental los problemas que requieren el cálculo del número de todos los subconjuntos que pueden formarse con un conjunto dado de símbolos, objetos o sucesos. Por ejemplo, una compañía telefónica debe proporcionar a cada suscriptor un número único y que, preferentemente, sea fácil de manejar; un gobierno estatal confronta un problema semejante al asignar placas de identificación para los vehículos. El sistema que se selecciona debe tener suficiente amplitud para cubrir el número de elementos que se haya previsto; el problema es, entonces, calcular cuántos subconjuntos distintos se pueden formar con un conjunto dado de símbolos.

19.1 DEFINICIONES

elemento, combinación, permutación

En este capítulo estudiaremos colecciones y ordenaciones de símbolos, objetos o sucesos. Cada símbolo, objeto o suceso se llama *elemento;* además, cada colección o grupo de elementos se llama *combinación* y a cada ordenación única de elementos dentro de la combinación le llamaremos *permutación*. Nótese que una permutación se caracteriza por el orden de los elementos que la forman. Una combinación es un conjunto de elementos diferentes en cualquier orden. Generalmente estos elementos son de la misma especie, pero no es absolutamente necesario. Todos los elementos pueden ser empleados en cualquier permutación o combinación, pero no es necesario utilizarlos todos.

19.2 PRINCIPIO FUNDAMENTAL

Se establecerá primero el principio fundamental y luego se ilustrará resolviendo los dos problemas siguientes:

Si un primer suceso puede verificarse de h_1 modos diferentes, y si después de haber ocurrido éste puede verificarse un segundo suceso de h_2 modos diferentes, entonces, los dos sucesos, pueden verificarse en el orden mencionado de $h_1 h_2$ modos diferentes.

EJEMPLO 1 ¿De cuántas maneras diferentes pueden seleccionarse parejas de un grupo de 5 muchachos y 6 muchachas?

Solución: Cada muchacho puede ser seleccionado de cinco modos diferentes, luego, cada muchacha puede ser seleccionada de seis modos; de aquí que cada pareja puede ser escogida de $(5)\ (6) = 30$ modos diferentes.

Si el problema comprende más de dos sucesos, se puede ampliar el principio fundamental del modo siguiente: Si después de haber ocurrido los dos primeros sucesos, puede ocurrir un tercero de h_3 modos diferentes, un cuarto de h_4 modos diferentes, y, por último, un enésimo de h_n modos diferentes, entonces, los n sucesos pueden ocurrir en el orden indicado de $h_1\, h_2\, h_3\, h_4 \cdots h_n$ modos.

EJEMPLO 2 ¿Cuántas placas de identificación de automóviles pueden fabricarse usando en cada placa dos letras y cuatro dígitos?

Solución: En este problema, se pueden usar cualquier letra o cualquier dígito más de una vez en cada placa. Por ejemplo, AA1111 es un número permitido. Se considerará que el dígito que sigue de la segunda letra puede ser cero. En este caso, el primer suceso es la elección de la letra que ocupe el primer lugar en la placa. Puesto que hay 28 letras para escoger, $h_1 = 28$. De manera análoga $h_2 = 28$. Puesto que cualquiera de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ó 9, se pueden usar en cualquiera de los otros cuatro lugares de la placa, entonces $h_3 = 10$, $h_4 = 10$, $h_5 = 10$ y $h_6 = 10$. Por tanto, el número total de placas posibles es

$$28 \times 28 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 7\,840\,000.$$

En este ejemplo se determinará el número de placas posibles si una letra o un dígito no aparecen repetidos en la placa. En este caso, $h_1 = 28$, $h_2 = 27$ (puesto que para el segundo lugar sólo quedan 27 letras disponibles), $h_3 = 10$, $h_4 = 9$, $h_5 = 8$ y $h_6 = 7$. Por tanto, el número total de placas posibles de acuerdo con la condición impuesta es $28 \times 27 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3\,810\,240$.

EJERCICIO 80: PERMUTACIONES DE *n* ELEMENTOS

¿Cuántas licencias de vehículos pueden hacerse si cada una de ellas consta de tres letras seguidas por un número de dos dígitos, sin repetir ni las letras ni los números?

Resuélvase el problema 1, si las letras y los números pueden repetirse.

¿Cuántos comités formados por un estudiante de segundo año, uno de tercero y dos de cuarto pueden seleccionarse entre siete estudiantes de segundo año, nueve de tercero y cinco de cuatro?

4: ¿En cuántas formas se pueden seleccionar un alemán, un escocés y dos hindúes entre un grupo de ocho personas de cada nacionalidad?
5: ¿En cuántas formas puede poner su mesa una ama de casa si dispone de cinco manteles, de cuatro vajillas y de tres juegos de cuchillería?
6: ¿En cuántas formas se pueden designar los jardineros en un juego de beisbol si se dispone de cuatro jardineros izquierdos, cinco centrales y seis derechos?
7: ¿En cuántas formas puede un campesino ir al pueblo si tiene tres guayines y ocho caballos y se necesitan dos caballos para tirar de un guayín?
8: ¿Cuántos menús, formados por una sopa, una carne, dos vegetales y un postre pueden servirse si se escoge entre cuatro sopas, seis vegetales, tres carnes y cinco postres?
9: Si dos dados se tiran simultáneamente, ¿en cuántas formas pueden caer?
10: Si cinco monedas se tiran simultáneamente, ¿en cuántas formas pueden caer?
11: Un hombre posee once corbatas, seis camisas, cuatro trajes, ocho pares de calcetines, cero sombreros y tres pares de zapatos. ¿En cuántas formas puede vestirse para salir a cenar?
12: ¿En cuántas formas puede vestirse una mujer que posee cuatro sombreros, nueve vestidos, trece pares de aretes y siete pares de zapatos?
13: En una lista aparecen cinco libros de trigonometría, seis de historia y tres de química. ¿En cuántas formas pueden escoger tres libros, siendo uno de cada materia?
14: ¿Cuántas señales de tres banderas cada una pueden hacerse con nueve banderas de diferentes colores?
15: ¿En cuántas formas pueden sentarse alternadamente cinco hombres y cuatro mujeres en una banca para nueve personas?
16: ¿En cuántas formas pueden sentarse las personas del problema 15 si los hombres deben quedar juntos?
17: ¿Cuántos números impares de cuatro dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 4 y 6, si no se permite la repetición?
18: ¿Cuántos números pares de cuatro dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 4 y 6, si no se permite la repetición?
19: ¿Cuántos números de cuatro cifras y mayores que 6 000 pueden formarse con 8, 7, 5 y 1, sin repetir dígitos?
20: ¿Cuántos números de tres cifras y menores que 500 pueden formarse con 2, 3, 7 y 9, si no se permite la repetición?
21: El alcalde, cuatro banqueros, dos directores universitarios y un orador van a sentarse en un lado de una mesa, debiendo ocupar los asientos centrales el alcalde y el orador y debiendo estar el orador a la derecha del alcalde. ¿Cuántos ordenamientos son posibles?
22: Se van a seleccionar tres monedas entre cuatro monedas de 25 centavos, cinco de 10 centavos y seis de 5 centavos. ¿En cuántas formas puede hacerse la selección de manera de que sus valores sumen 40 centavos?
23: ¿Cuántas combinaciones de las tres monedas del problema 22 pueden formarse si la suma de valores debe ser mayor de 30 centavos?
24: ¿En cuántas formas pueden seleccionarse las monedas del problema 22 para obtener una suma de exactamente 30 centavos?

19.3 PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS DIFERENTES EN GRUPOS DE r ELEMENTOS

En el párrafo anterior fue definida la permutación, pero la repetimos aquí como referencia. Toda ordenación de un conjunto de n elementos, se llama *permutación* del conjunto.

Las ordenaciones *abc, acb, bac, bca, cab* y *cba* constituyen las seis permutaciones de las letras *a*, *b* y *c*. Además, *ab, ba, ac, ca, bc* y *cb* son las seis permutaciones de las mismas letras, pero consideradas en grupos de dos.

Se considerará que $P(n,r)$ representa el número de permutaciones de n objetos considerados en grupos de r objetos y se obtendrá una fórmula para valuar ese símbolo.* Se puede llenar el primer lugar de la ordenación de n modos. Después de que se ha llenado esta primera posición, se tienen $n - 1$ modos de llenar la segunda, luego $n - 2$ para la tercera,

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r-1)$$

permutaciones de n objetos tomados en grupos de r

y por último, $n - (r - 1) = n - r + 1$ modos de llenar la posición r. Si se multiplica el miembro de la derecha de esta igualdad por $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$ se obtiene

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

En consecuencia,

$$\blacktriangleright\ P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{19.1}$$

permutaciones de n objetos tomados en grupos de n

Para obtener el número de permutaciones de n objetos considerados en grupos de n objetos se hace $r = n$ en (19.1). De este modo se obtiene

$$\blacktriangleright\ P(n,n) = n! \tag{19.2}$$

puesto que por definición $0! = 1$.

EJEMPLO 1 Encontrar los números que pueden formarse con los cuatro dígitos 1, 2, 3 y 4 sin repetir ningún dígito.

Solución: El número de números de cuatro dígitos que se puede formar con las cifras 1, 2, 3 y 4 es, de acuerdo con (19.2), $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$.

EJEMPLO 2 Seis personas entran a un cuarto en el que hay 10 sillas. ¿De cuántos modos pueden ocupar las sillas?

Solución: Puesto que únicamente se ocupan 6 de las sillas, el número de diferentes modos de ocupar las sillas es igual al número de permutaciones de 10 objetos considerados en grupos de 6. Esto es

$$P(10,6) = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4!)}{(4!)} = (10)(9)(8)(7)(6)(5)$$
$$= 151{,}200$$

19.4 PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS, NO TODOS DIFERENTES ENTRE SI

Si los elementos de un conjunto n objetos no son todos diferentes entre sí, el problema de determinar el número de permutaciones del conjunto

* Se usan también los símbolos ${}_nP_r$ y P^n_r.

presenta un nuevo aspecto. Por ejemplo, en las dos permutaciones de las letras a y b sólo hay una permutación de la letra a con a, ya que una letra no puede distinguirse de otra y las dos sólo pueden, por ello, colocarse en una sola y única ordenación. Se supondrá que s miembros del conjunto son iguales entre sí y los $n - s$ elementos diferentes se designarán por $t_1, t_2 \ldots t_{n-s}$. Se pueden obtener todas las permutaciones de los n elementos distribuyendo los $t_1, t_2 \ldots t_{n-s}$ en las n posiciones de todos los modos posibles y llenando luego los espacios vacíos con los s elementos idénticos. Esto equivale a separar las posiciones 1, 2, 3 . . . , n en $n - s$ grupos de tantos modos como sea posible, esto es, a encontrar el número de permutaciones de n objetos considerados en grupos de $n - s$ objetos.* De acuerdo con (19.1), en el párrafo anterior, se tiene

$$P(n, n - s) = \frac{n!}{[n - (n - s)]!} = \frac{n!}{s!}$$

permutaciones de objetos semejantes

Por tanto, si s miembros de un conjunto de n elementos son iguales, el número de permutaciones de los n elementos considerados en grupos de n es igual al número de permutaciones de n objetos tomados en grupos de n, dividido por el número de permutaciones de s objetos considerados en grupos de s. Mediante la repetida aplicación de este principio se puede obtener el teorema siguiente: *Si en un conjunto de n objetos hay g grupos, el primero de los cuales contiene n_1 miembros iguales entre sí; el segundo contiene n_2 miembros iguales entre sí; el tercero n_3 miembros también iguales entre sí y así sucesivamente hasta el grupo g que tiene n_g miembros iguales entre sí; entonces, el número de permutaciones de los n objetos considerados en grupos de n, es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_g!}$$

EJEMPLO 1 ¿De cuántos modos se pueden ordenar las letras de la palabra Monterrey?

Solución: La solución de este problema implica el número de permutaciones de 9 letras consideradas en grupos de 9; las letras e y r aparecen repetidas dos veces. Por tanto, el número de ordenaciones posibles es

$$\frac{11!}{2!2!} = \frac{(9)\cancel{(8)}(7)\cancel{(6)}(5)\cancel{(4)}\cancel{(3)}\cancel{(2)}(1)}{\cancel{(2)}(1) \quad \cancel{(2)}(1)} = 90{,}720$$

EJERCICIO 81: PERMUTACIONES DE n ELEMENTOS EN GRUPOS DE r ELEMENTOS; PERMUTACIONES CON ELEMENTOS REPETIDOS

* Este razonamiento es el mismo que se utiliza al encontrar el número de maneras en que dos personas pueden sentarse en una fila de cinco sillas, ya que cuando una de las personas se ha sentado en cualquiera de las cinco sillas la otra puede sentarse en cualquiera de las cuatro restantes, siendo el número de permutaciones (5) (4) = 20. En este problema no importa cuales sillas quedan *vacías*, es decir, no importa donde quedan colocados los elementos particulares que constituyen los s elementos iguales entre sí.

Dense el significado y el valor de los símbolos de los problemas 1 a 4.

1: $P(7,5)$ **2:** $P(4,2)$ **3:** $P(10,7)$ **4:** $P(9,4)$

5: Demuéstrese que $2P(n,n-2) = P(n,n-1)$
6: Demuéstrese que $2P(n,n-2) = P(n,n)$
7: Demuéstrese que $P(n,n-r)\ \ P(r,r-1) = P(n,n)$
8: Demuéstrese que $P(n,n-r)\ \ P(r,1) = P(n,n-r+1)$

¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las letras de cada una de las palabras siguientes, empleando todas las letras en cada permutación?

9: Matemáticas.
10: Chihuahua.
11: Cocodrilo. (Ver resultado, es diferente)
12: California. Ver soluciónes

13: Una universidad consta de diez edificios. ¿En cuántas maneras puede hacerse una visita que los comprenda a todos
14: ¿Cuántos órdenes de bateo son posibles para los nueve jugadores de un equipo de beisbol?
15: ¿Cuántos equipos de futbol americano pueden formarse con once jugadores, si cada uno puede jugar cualquier posición?
16: Un vendedor debe visitar a ocho clientes. ¿En cuántos órdenes diferentes puede hacer las visitas?
17: Un equipo de basquetbol tiene once miembros y cada uno de ellos puede jugar cualquier posición, ¿cuántas quintas pueden formarse?
18: ¿En cuántas formas pueden sentarse cinco personas en una fila de ocho sillas?
19: ¿De cuántas maneras pueden ser los resultados de unas elecciones si hay tres candidatos para presidente, cuatro para vicepresidente y cinco para tesorero?
20: Hay cinco funciones de cine para el martes, otras cuatro para el miércoles y seis para el jueves; ¿en cuántas formas puede una persona seleccionar una función para cada una de las tres noches?
21: ¿En cuántas formas pueden sentarse en fila siete niños que incluyen unos triates si éstos deben quedar juntos?
22: ¿En cuántas formas puede seleccionarse un comité de tres estudiantes entre cinco estudiantes de segundo año, cuatro de tercer año y seis de cuarto año, si el comité debe comprender un miembro de cada grupo?
23: ¿Cuántos equipos de basquetbol pueden formarse con cinco delanteros, tres centros y seis defensas?
24: Hay cinco católicos, seis protestantes y cuatro judíos elegibles para un comité que comprende a una persona de cada grupo; ¿en cuántas formas puede seleccionarse el comité?
25: ¿De cuántas maneras pueden arreglarse en un estante siete libros distintos de matemáticas, cinco libros distintos de física y dos libros distintos de química de manera de que los libros de una misma materia queden juntos?
26: ¿En cuántas formas pueden sentarse en una fila cuatro africanos, tres europeos y cinco asiáticos de manera de que las personas de un mismo continente queden juntas?
27: ¿En cuántas formas pueden acomodarse seis niños huérfanos en diez casas, si entre ellos hay unos gemelos y unos triates, los cuales no deben ser separados de sus hermanos, y si cada casa puede acomodar, cuando más, ya sea a un niño o a un grupo de hermanos?
28: ¿En cuántas formas distinguibles pueden arreglarse en un estante cinco ejemplares de un libro de álgebra, cuatro de uno de geometría y seis de uno de trigonometría?

19.5 COMBINACIONES

La definición de combinación se dio en el capítulo 19.1, pero se repetirá aquí.

Un conjunto de elementos en el que se prescinde del orden en el que los elementos están dispuestos, se llama combinación. De acuerdo con la definición anterior, las seis permutaciones xyz, xzy, yxz, yzx, zxy y zyx son la misma combinación.

Evidentemente, existe sólo una combinación de n elementos considerados en grupos de n elementos. Sin embargo, el problema de determinar el número de combinaciones de n objetos considerados en grupos de r es no sólo interesante sino también de importancia. Este número se designará por $C(n,r)$.* El número de permutaciones de cualquier combinación de r elementos es $r!$ Por tanto,

combinaciones n elementos tomados en grupos de r

$$P(n,r) = r!\ C(n,r)$$

De aqui el número de combinaciónes de n elementos tomados en grupos

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}$$

$$\blacktriangleright\ C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \tag{19.3}$$

Sustituyendo $P(n,r)$ por su valor dado en (19.1)

EJEMPLO 1 ¿Cuántos comités de 7 personas se pueden formar con un conjunto de 25 personas?

Solución: El número de comités es igual al número de combinaciones de 25 elementos tomados en grupos de 7, esto es,

$$C(25,7) = \frac{25!}{18!7!} = \frac{\overset{5}{\cancel{(25)}}\cancel{(24)}(23)\overset{11}{\cancel{(22)}}\cancel{(21)}(20)(19)\cancel{(18!)}}{\cancel{(18!)}\cancel{(7)}\cancel{(6)}\cancel{(5)}\cancel{(4)}(3)\cancel{(2)}(1)} = 480{,}700$$

EJEMPLO 2 Una negociación desea emplear 6 hombres y 3 muchachas. ¿De cuántos modos puede hacer la selección el gerente si los solicitantes son 9 hombres y 5 muchachos?

Solución: Los hombres pueden ser seleccionados de $C(9,6)$ modos y los muchachos de $C(5,3)$ modos. Entonces, el número total de modos en que puede hacerse

$$\begin{aligned} C(9,6)C(5,3) &= \frac{9!}{(9-6)!6!}\,\frac{5!}{(5-3)!3!} \\ &= \frac{\overset{3}{\cancel{(9)}}(8)(7)(6!)}{\cancel{(3)}\cancel{(2)}(6!)}\,\frac{(5)\cancel{(4)}(3!)}{\cancel{(2)}(3!)} \\ &= 840 \end{aligned}$$

19.6 SUMA DE NUMEROS DE COMBINACIONES

Si se multiplica y divide la expresión (17.2) por $(n - r + 1)!$ se obtiene

* Se emplean también los símbolos $_nC_r$ y C_r^n

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)[(n-r+1)!]}{(r-1)!(n-r+1)!}x^{n-r+1}y^{r-1}$$
$$= \frac{n!}{(r-1)![n-(r-1)]!}x^{n-r+1}y^{r-1} = C(n,r-1)x^{n-r+1}y^{r-1}$$

Por tanto, el desarrollo de $(x+y)^n$ se puede expresar en la forma

$$(x+y)^n = x^n + C(n,1)\,x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 + \cdots + C(n,n-1)\,xy^{n-1} + C(n,n)y^n \quad (19.4)$$

La ecuación (19.4) puede ser empleada par obtener una expresión del total del número de combinaciones de n elementos tomados uno a uno dos a dos, y n a n. Haciendo $x = y = 1$ en (19.4)

$$(1+1)^n = 1 + C(n,1) + C(n,2) + C(n,3) + \cdots + C(n,n-1) + C(n,n)$$

De ese modo, *el número total de combinaciones que se obtienen al considerar n elementos en grupos de* 1, *grupos de* 2, *grupos de* 3, *etc., hasta grupos de n elementos, es igual a* $2^n - 1$.
Por ejemplo, el número total de combinaciones de ocho elementos en grupos de uno, grupos de dos y en grupos de ocho es $2^8 - 1 = 255$.

EJERCICIO 82: COMBINACIONES

1: Encuéntrese el valor de $C(8,5)$, $C(13,3)$.
2: Encuéntrese el valor de $C(11,4)$, $C(19,2)$.
3: Demuéstrese que $C(16,7) = C(16,9)$.
4: Demuéstrese que $3C(16,10) = 8C(15,5)$.
5: ¿Cuántas combinaciones de cuatro letras distintas pueden formarse con dieciséis letras distintas?
6: ¿En cuántas formas puede seleccionarse un destacamento de seis elementos entre veinte soldados?
7: ¿De cuántas maneras puede escogerse un comité de tres miembros entre nueve mujeres?
8: Una casa de estudiantes consta de veinticinco miembros. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse cuatro de ellos para servir como lavaplatos?
9: Un niño tiene en su alcancía \$3.50 en monedas de veinticinco centavos; ¿en cuántas formas puede pagar una deuda de \$0.75?
10: Ocho equipos participan en una competencia atlética. Sin tomar en cuenta las localidades en que se efectúan los juegos, calcúlese cuántos juegos deben efectuarse para que cada equipo juegue con todos los demás.
11: Once edificios están localizados alrededor de un círculo. Calculese cuántas banquetas deben construirse para que cada edificio quede conectado a cada uno de los demás por una banqueta en línea recta.
12: ¿Cuántas manos de poker de cinco cartas pueden obtenerse con una baraja de 52 cartas?
13: ¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un polígono convexo de 17 lados?
14: ¿En cuántas formas pueden seleccionarse cinco listones del mismo color entre siete listones azules y ocho blancos?
15: ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse dos listones verdes y tres morados entre once listones verdes y siete morados?

16: ¿En cuántas formas pueden distribuirse 59 canastillas con almuerzos entre 62 familias si ninguna familia debe recibir más de una canastilla?

17: Una asociación cívica tiene 47 miembros, incluyendo cuatro doctores, cinco profesores y seis comerciantes. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un comité formado por un doctor, un profesor, dos comerciantes y cuatro miembros más si estos últimos miembros no deben ser doctores, profesores o comerciantes?

18: ¿De cuántas maneras puede formarse un grupo de acción social integrado por dos Sembradores de Amistad, dos Rotarios y dos Leones, que se seleccionan entre 25 Sembradores de Amistad, 30 Rotarios y 25 Leones?

19: Una persona tiene \$ 1 en monedas de cinco centavos y \$ 1.50 en monedas de diez centavos: ¿de cuántos modos puede hacer un pago de \$0.15?

20: ¿De cuántas maneras se pueden formar 20 centavos con 17 monedas de cinco centavos y 13 monedas de diez centavos?

21: ¿En cuántas maneras pueden distribuirse cinco personas en cuatro hoteles si ninguno de los hoteles tiene lugar para más de dos personas?

22: ¿En cuántas formas puede dividirse un grupo de ocho personas en un cuarteto para jugar bridge y dos parejas para jugar damas?

23: Un grupo está formado por tres propietarios de carnicerías y siete abarroteros. Calcúlese cuántos comités de cuatro miembros pueden formarse si cada comité debe comprender, cuando más, a dos propietarios de carnicerías.

24: ¿En cuántas formas puede dividirse un grupo de ocho hombres y ocho mujeres en grupos de cuatro personas formados por dos hombres y dos mujeres?

25: ¿Cuántas sumas de dinero diferentes pueden formarse con una moneda de un centavo, una de cinco, una de diez, una de veinticinco, una de cincuenta y un peso?

26: ¿Cuántas de las sumas de dinero del problema 25 tienen un valor superior a un peso?

27: ¿Cuántos grupos de más de siete personas pueden formarse con diez personas?

28: ¿Cuántos grupos de menos de cuatro personas pueden formarse con diez personas?

20 PROBABILIDAD

LA MEDICIÓN de la oportunidad que hay para que algo ocurra o no ocurra, bajo circunstancias especiales, tiene aplicación en diversas actividades humanas. Un apostador experto al estimar su oportunidad de ganar y un estadístico al construir una tabla de mortalidad tratan de poner el azar en una base matemática. También los ingenieros tienen muchos problemas en los que es preciso calcular la oportunidad que hay para que algo suceda o no suceda. Tanto el apostador como el estadístico y el ingeniero utilizan una rama especializada de las matemáticas llamada cálculo de probabilidades.

20.1 PROBABILIDAD MATEMATICA

Si un grupo o una secuencia de circunstancias que motivan que un suceso ocurra o deje de ocurrir están sometidas a una cierta ley conocida, el resultado puede predecirse con certeza. Si, en cambio, tales circunstancias no están gobernadas por ninguna ley, el resultado es cuestión de azar. Por ejemplo, si se arrojan al aire tres monedas de un centavo, se sabe que caerán a causa de estar sujetas a la ley de gravedad. Sin embargo, no se puede asegurar que las tres caerán mostrando las caras de igual diseño. De hecho, ya que las tres al caer mostrando caras de igual diseño, pueden hacerlo de un solo modo, y pueden en cambio dejar de caer mostrando las caras de igual diseño, de tantos modos como $2^3 - 1 = 7$, la probabilidad o casualidad está en contra de que caigan todas de igual manera. En el lenguaje de los apostadores profesionales se diría que las apuestas están 7 a 1 en contra de que las tres monedas caigan mostrando caras de igual diseño.

La probabilidad matemática de que un suceso llegue a ocurrir, es una razón que expresa la valuación numérica de las oportunidades en favor de la ocurrencia del suceso. Esta razón se define como sigue: Si un suceso puede ocurrir de h modos y dejar de ocurrir de f modos, la probabilidad, p, de que ocurra es

probabilidad de ocurrencia

probabilidad de no ocurrencia

$$p = \frac{h}{h + f} \tag{20.1}$$

y la probabilidad q de que no ocurra es

$$q = \frac{f}{h + f} \tag{20.2}$$

De (20.1) y de (20.2) se observa que

$$p + q = 1$$

Entonces, si no es posible que el suceso no ocurra, $f = 0$, $p = 1$, y $q = 0$. Recíprocamente, si $p = 1$, se tiene a partir de (20.1)

$$1 = \frac{h}{h + f}$$

En consecuencia, $f = 0$, y el suceso no puede dejar de ocurrir. Por tanto, la probabilidad igual a uno implica certeza y viceversa.

EJEMPLO 1 En el anterior ejemplo acerca de las tres monedas de un centavo, el suceso de la caída de las tres monedas mostrando caras de igual diseño puede ocurrir sólo de un modo. Además, puesto que cada una puede caer de dos modos, las tres pueden caer de $2 \times 2 \times 2$. Por tanto, pueden dejar de caer mostrando caras de igual diseño de siete modos. Por tanto, la probabilidad de que caigan mostrando caras de igual diseño es

$$p = \frac{1}{1 + 7} = \frac{1}{8}$$

Debe insistirse en que la probabilidad matemática de que un suceso llegue a ocurrir de determinada manera es simplemente la razón entre el número de maneras en que puede ocurrir del modo deseado y el número total de posibilidades. Es evidente que no existe ninguna seguridad de que $\frac{1}{8}$ de veces de las que se arrojan las tres monedas, éstas caigan mostrando caras de igual diseño. Incluso, durante una experiencia, se arrojaron al aire 100 veces tres monedas de un centavo y en 15 veces cayeron mostrando caras iguales, esto es, $\frac{3}{20}$ del número de veces que se arrojaron. Nótese que $\frac{3}{20}$ es algo mayor que $\frac{1}{7}$, si se compara con la probabilidad calculada $\frac{1}{8}$.

EJEMPLO 2 Se escriben en tarjetas diferentes todos los números de tres dígitos que pueden formarse con las cifras de 1 a 9, sin repetir ninguna cifra. Después se mezclan las tarjetas y se dejan hacinadas. Encontrar la probabilidad de que al sacar una tarjeta del montón la suma de los dígitos del número que aparece en ella sea 10. *Solución:* Los grupos de tres enteros diferentes seleccionados entre los números 1 a 9 y cuya suma sea 10, son 7, 2, 1; 6, 3, 1, y 5, 4, 1. Con cada uno de estos grupos se pueden formar tantos como $P(3,3) = 3! = 6$ números de tres dígitos. Por tanto, en el montón hay 24 tarjetas en las que están escritos los números deseados. En consecuencia, $h = 24$. Además, en el montón hay $P(9,3) = 504$ tarjetas. De ese modo $f = 504 - 24 = 480$. Por tanto,

$$p = \frac{24}{24 + 480} = \frac{24}{504} = \frac{1}{21}$$

EJEMPLO 3 ¿Cuál es la probabilidad de sacar de una bolsa 3 bolas blancas y 4 negras, si la bolsa contiene 5 bolas blancas y 6 bolas negras y si simultánea y arbitrariamente se sacan de ella 7 bolas?

Solución: Primero se debe determinar el número de modos, $C(5,3)$ en que 3 bolas blancas se pueden sacar de un conjunto de 5 bolas blancas y el número de modos, $C(6,4)$, en que se pueden sacar 4 bolas bolas negras de un conjunto de 6 bolas negras. Luego, se debe determinar el número de modos, $C(11,7)$, en que 7 bolas se pueden sacar de 11. De ese modo, se observa que la combinación de bolas deseada se puede obtener de $C(5,3)$, $C(6,4)$ modos; en consecuencia, la probabilidad de sacar esta combinación es

$$\frac{C(5,3)C(6,4)}{C(11,7)} = \frac{\left(\frac{5!}{3!2!}\right)\left(\frac{6!}{4!2!}\right)}{\left(\frac{11!}{7!4!}\right)}$$
$$= \tfrac{5}{11}$$

20.2 PROBABILIDAD EMPIRICA

Tanto al interpretar los resultados de ciertos experimentos como en el análisis de datos estadísticos se emplea frecuentemente la razón que se define a continuación. Si al efectuar n pruebas un suceso ocurre h veces, la frecuencia relativa con que ocurre es h/n.

frecuencia relativa

El experimento de arrojar tres monedas, mencionado en el párrafo anterior, se repitió hasta haberlo efectuado 350 veces y la frecuencia relativa se calculó cada vez que se completaron 50 acciones de arrojar las monedas. Los resultados se muestran en la tabla siguiente, en donde n es el número de veces que se arrojaron las monedas, h es el número de veces que cayeron mostrando caras iguales y $F.R.$ es la frecuencia relativa.

n	h	RF
50	8	.16
100	15	.150
150	19	.127
200	25	.125
250	31	.124
300	37	.123
350	45	.129

En la tabla se puede observar que la frecuencia relativa fluctúa alrededor de la probabilidad matemática $\frac{1}{8} = 0.125$ a medida que n se incrementa. Se puede suponer, y la experiencia justifica esta suposición, que a medida que n se hace mayor la frecuencia relativa se aproxima más a la probabilidad matemática. Esta suposición se emplea para definir una razón, conocida como probabilidad empírica, muy usada en la interpretación de datos estadísticos y de seguros.

tabla de mortalidad

Si al efctuar n pruebas, siendo n un número grande, ocurre un suceso h veces, entonces la probabilidad de que llegue a ocurrir al celebrar otra prueba es h/n.

Las compañías de seguros de vida emplean la razón anterior para calcular los índices de mortalidad aplicándola a la información tabulada con el nombre de *tabla de mortalidad*. Una de estas tablas es la que aparece en el Apéndice con el nombre de "American Experience Mortality Table" y que fue formada a partir de datos proporcionados por varias grandes compañías de seguros de vida. Partiendo de 100 000 personas de diez años de edad, muestra el número de las que sobreviven a las edades de once, doce y trece años y así sucesivamente hasta la de 99 años.

EJEMPLO 1 Un censo de tránsito muestra que de cada 1000 vehículos que pasan por un cruce en una carretera 600 voltean a la derecha. ¿Cuál es la probabilidad de que un automóvil dé vuelta a la derecha en ese cruce?

Solución: En este caso, $n = 1000$; $h = 600$. Por tanto, la probabilidad deseada es $\frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$

EJEMPLO 2 De acuerdo con la tabla VIII, ¿cuál es la probabilidad de que una persona de 20 años de edad pueda sobrevivir hasta que tenga 30 años?

Solución: La tabla VIII, muestra que de cada 92637 personas de 20 años de edad 85411 llegan a la de 30 años. Por tanto, $h = 85441$; $n = 92637$ y la probabilidad deseada es $\frac{85441}{92637} = 0.9223$.

De acuerdo con su definición, la probabilidad empírica depende de n y de h, y en cualquier caso probablemente variará cuando n varíe. Si n es suficientemente grande, el cambio en la probabilidad empírica debido al cambio en n debe ser pequeño. Por tanto, en cualquier caso, el número de pruebas realizadas debe ser tan grande como las condiciones de observación lo permitan.

20.3 EXPECTACION MATEMATICA

Si la probabilidad de que un suceso llegue a ocurrir en una prueba es p, entonces el número esperado de la ocurrencia del suceso en n prue-

bas es np. El producto np se llama expectación matemática del suceso.

Si una persona espera recibir D pesos cuando ocurra un suceso, y la probabilidad de que éste ocurra es p, entonces el valor de su expectación es Dp pesos.

EJEMPLO Si la probabilidad de que una persona viva hasta los 65 años para recibir \$ 1 000.00 es de $\frac{3}{5}$, el valor de su expectación es de \$ 600.00.

EJERCICIO 83: PROBABILIDAD EMPIRICA Y EXPECTACION

1: Se saca una carta al azar de una baraja de 52 cartas; encuéntrese la probalidad de que la carta sea: (*a*), de bastos; (*b*), de uno de los palos rojos; (*c*), un cuatro negro.

2: Encuéntrese la probabilidad de que la carta sacada en el problema 1 sea: (a), as, rey, reina o sota; (b), un número entre 4 y 10.

3: Se tiran simultáneamente una moneda de diez centavos y una de veinticinco centavos. Encuéntrese la probabilidad de: (a), que salga águila en la de veinticinco y sello en la de diez; (b), que en ambas monedas salgan águilas o que en ambas salgan sellos.

4: Si se hacen dos tiros con las monedas del problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que, en ambos tiros, en una moneda salga águila y en la otra salga sello?

5: Cada uno de los números de dos cifras, que no tienen cifras repetidas, se anota en una tarjeta. Las tarjetas se revuelven y se saca una al azar. Encuéntrese la probabilidad de que el segundo dígito del número obtenido sea un 1.

6: ¿Cuál es la probabilidad de que el número sacado en el problema 5 sea divisible entre dos?

7: ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dígitos del número sacado en el problema 5 sea igual a 9?

8: ¿Cuál es la probabilidad de que el número sacado en el problema 5 sea divisible entre tres?

9: Encuéntrese la probabilidad de obtener en un tiro de un dado: (a), un 5; (b), un número impar; (c), un número primo.

10: Encuéntrese la probabilidad de obtener en un tiro de un par de dados: (a), una suma de 12 puntos; (b), una suma de 6 puntos; (c), una suma de 7 puntos.

11: Tres muchachas y dos muchachos se sientan al azar en una banca para presenciar una película de la familia. Calcúlese la probabilidad de que las tres muchachas queden juntas.

12: En el problema 11 calcúlese la probabilidad de que las muchachas y los muchachos queden alternados.

13: Una bolsa contiene cuatro bolas verdes, seis amarillas y ocho rojas. Se saca una bola al azar de la bolsa; encuéntrese la probabilidad de que sea: (a), verde; (b), verde o amarilla; (c), que no sea verde.

14: Una caja contiene 20 monedas de 5 centavos, 15 de 10 centavos y 10 de 25 centavos. Si se sacan dos monedas simultáneamente y al azar, encuéntrese la probabilidad de que: (a), ambas sean de 25 centavos; (b), las dos monedas sean de igual denominación; (c), las monedas sacadas sumen más de 30 centavos.

15: Un club consta de 30 miembros, entre los cuales hay tres Gómez y dos Pérez. Si se designa un comité formado por dos miembros, encuéntrese la probabilidad de que: (a), ambos se llamen Gómez (b), ambos se llamen Pérez.

16: Si en el club del problema 15 se designa un comité de tres miembros, encuéntrese la probabilidad de que en el comité figure por lo menos un Pérez y por lo menos un Gómez.

17: Si en el club del problema 15 se designa un comité de tres miembros, encuéntrese la probabilidad de que figure en él exactamente uno de los Gómez.
18: Supóngase que una persona recibe \$5 si en el primer intento saca rey, reina o sota, ya sea de corazones o de diamantes, de una baraja de 52 cartas. Calcúlese su expectación.
19: Durante un recuento de tres horas del tráfico en cierta intersección pasaron 320 automóviles, 120 camionetas y 80 camiones. Encuéntrese la probabilidad de que el siguiente vehículo sea: (a), una camioneta; (b), una camioneta o un camión.
20: Durante los primeros diez juegos de la temporada un equipo de futbol intentó 100 avances, habiendo logrado efectuar 40 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que pueda llevarse a cabo el primer avance intentado por el equipo en el undécimo encuentro?
21: En cierto año, 60 de los 3 200 automóviles registrados en una municipalidad fueron robados y 45 de ellos fueron recobrados. ¿Cuál es la probabilidad de que un carro determinado sea robado en el año siguiente? ¿Cuál es la probabilidad de que sea recobrado?
22: Cuatro matrimonios echan suertes para decidir quiénes serán compañeros en un juego entre los ocho. Calcúlese la probabilidad de que los miembros de cada pareja de compañeros sean del mismo sexo.
23: Si las parejas de compañeros del problema 22 se establecen haciendo que los hombres y las mujeres saquen separadamente tarjetas que han sido numeradas del 1 al 4, encuéntrese la probabilidad de que: (a), cada hombre tenga como compañera a su esposa; (b), ninguno de los hombres tenga como compañera a su esposa.
24: Durante la primera mitad de una temporada de beisbol, a un bateador le tocó cierto lanzador 45 veces; habiendo logrado cinco jits sencillos, cuatro dobles, dos triples, un jonrón y habiéndose embasado cuatro voces por bolas malas, tres veces por algún error y una vez al ser golpeado por la pelota. Encuéntrese la probabilidad de que la próxima ocasión que le toque este lanzador: (a), logre un jit doble; (b), logre un jit; (c), se embase en la primera.
25: Encuéntrese la probabilidad de que siete cartas del mismo palo aparezcan en una misma mano de bridge. Exprésese la respuesta en términos de factoriales.
26: La escuela dominical de una iglesia consta de doce miembros. Cinco de ellos irán a un día de campo en un sedán, mientras que los otros lo harán en una camioneta. Encuéntrese la probabilidad de: (a), que seis de los miembros, que tienen una misma edad, viajen en la camioneta; (a), que cinco de los seis viajen en el automóvil.
27: Mediante el uso de la tabla VIII, encuéntrese la probabilidad de que una persona de 30 años pueda vivir: (a), 30 años más; (b), 40 años más.
28: Mediante el uso de la tabla VIII, encuéntrese la probabilidad de que una persona de 45 años pueda morir antes de: (a), 15 años; (b), 30 años.
29: Encuéntrese la probabilidad de que una persona de 50 años: (a), pueda llegar a los 70 años; (b), muera antes de llegar a los 80 años.
30: Una póliza de seguro estipula que un joven de 18 años deberá recibir \$4 000 dentro de 10 años. Calcúlese el valor de su expectación.
31: Según un testamento leído en 1960, un joven de 16 años deberá recibir \$5 000 en cuatro años más, si es que aun vive; en caso contrario, el dinero se entregará al fondo de una universidad. Cálculese el valor de la expectación de la universidad.
32: Un testamento estipula que el señor Campos, quien tiene 40 años, deberá heredar cierta propiedad dentro de 10 años, a menos que el hijo del testador aun viva en ese entonces. Si la probabilidad de que el hijo viva es $\frac{3}{4}$ y si el valor que la propiedad llegará a alcanzar es \$60 000, encuéntrese el valor de la expectación del señor Campos.

20.4 SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Se dice que dos o más sucesos son *excluyentes*, si la ocurrencia de uno de ellos excluye la posibilidad de la ocurrencia de cualquiera de los otros en el mismo experimento. Por ejemplo, si una bolsa contiene solamente bolas blancas, rojas y negras, los sucesos de sacar en una prueba *sea una bola blanca sea una bola roja* son mutuamente excluyentes, ya que el haber sacado una bola de color excluye la posibilidad de sacar otra de otro color.

Con objeto de hacer más explícito el ejemplo anterior, se supondrá que la bolsa contiene 3 bolas rojas, 5 negras y 4 blancas y que se desea conocer la probabilidad de sacar, en una prueba, sea una bola blanca sea una bola roja. Puesto que las bolas rojas se pueden sacar de 3 modos y las blancas se pueden sacar de 4 modos, el sacar una y otra puede ocurrir de 7 modos diferentes. Por tanto, h = 7. Además, el dejar de sacar alguno de los colores deseados puede ocurrir de 5 modos diferentes. Entonces, f = 5. Por tanto, la probabilidad es

$$\frac{3+4}{3+4+5} = \frac{3+4}{12} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

Nótese que las probabilidades de sacar una bola roja y una bola negra en una prueba son $\frac{3}{12}$ y $\frac{4}{12}$, respectivamente, y que la probabilidad de sacar una o la otra es la suma de esas dos. Lo anterior ilustra el teorema siguiente. *La probabilidad de que un miembro cualquiera de un conjunto de sucesos que se excluyen mutuamente pueda ocurrir, en una sola prueba, es la suma de las probabilidades de los sucesos separados.*

sucesos mutuamente excluyentes

Supóngase que los sucesos son E_1. E_2 . . . E_r; que E_1 puede ocurrir de h_1 modos diferentes, E_2 puede ocurrir de h_2 modos diferentes y E_r puede ocurrir de h_r modos diferentes en una sola prueba, y que una prueba pueda suceder de n modos diferentes. Entonces, si p_1, p_2, . . . p_r son las probabilidades de que E_1, E_2 . . . E_r puedan ocurrir, $p_1 = \frac{h_1}{n}$, $p_2 = \frac{h_2}{n}$, . . . $p_r = \frac{h_r}{n}$. La suma de los modos en que los sucesos separados pueden ocurrir es $h_1 + h_2 + \ldots + h_r$, y si p es la probabilidad de que pueda ocurrir alguno de los r sucesos, se tiene

$$\begin{aligned} p &= \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_r}{n} \\ &= p_1 + p_2 + \cdots + p_r \end{aligned} \qquad (20.3)$$

puesto que la prueba puede suceder n modos.

EJEMPLO Si la probabilidad de que un caballo A gane una carrera es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de que la gane otro caballo B es $\frac{1}{4}$, ¿cuál es la probabilidad de que uno u otro de de los caballos gane la carrera?

Solución: Puesto que los sucesos son mutuamente excluyentes, la probabilidad deseada es la suma de las probabilidades separadas. En consecuencia, es

$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$.

20.5 SUCESOS INDEPENDIENTES

Se dice que dos o más sucesos son *independientes* si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro.

Si volviendo a los datos mencionados en el párrafo anterior, se efectúa tres veces la acción de sacar de la bolsa una bola, pero de tal manera que cada bola que haya sido sacada vuelva a ser puesta en la bolsa antes de volver a sacar otra bola, entonces ninguno de los resultados de las tres acciones afecta el resultado de las otras dos. Por tanto, los sucesos son independientes. La probabilidad de que los 3 colores salgan en las 3 pruebas se puede calcular como sigue. Los 3 colores se pueden sacar de $3 \times 5 \times 4$ modos. Además, las 3 bolas, independientemente de su color, se pueden sacar de 12^3 modos. Por tanto, la probabilidad deseada es

$$\frac{3 \times 4 \times 5}{12^3} = \frac{3}{12} \times \frac{4}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{144}$$

Nótese que la probabilidad deseada es el producto de las probabilidades de que cada color llegue a salir en una prueba. A continuación se da el teorema que trata de este tipo de situaciones. *La probabilidad de que puedan ocurrir todos los sucesos independientes de una serie es el producto de sus probabilidades separadas.*

probabilidad de sucesos independientes

Si hay dos sucesos E_1 y E_2, y si E_1 puede ocurrir de h_1 modos y dejar de ocurrir de f_1 modos; E_2 puede ocurrir de h_2 modos y dejar de ocurrir de f_2 modos; entonces, los dos sucesos pueden ocurrir o dejar de ocurrir de $(h_1 + f_1)$ $(h_2 + f_2)$ modos en una misma prueba, y el par de sucesos puede ocurrir de $h_1 h_2$ modos. Por tanto, la probabilidad p_{12} de que ambos ocurran es

$$p_{12} = \frac{h_1h_2}{(h_1 + f_1)(h_2 + f_2)}$$

Después, esto se puede considerar como un solo suceso, tomar en cuenta otro suceso más y calcular la probabilidad de que los tres ocurran. Si el tercer suceso puede ocurrir de h_3 modos y no ocurre de f_3 modos, la probabilidad; p_{123}, de que los tres ocurran es

$$p_{123} = \frac{h_1h_2}{(h_1 + f_1)(h_2 + f_2)} \frac{h_3}{h_3 + f_3}$$

De hecho, se puede continuar este procedimiento hasta tener r sucesos independientes y la probabilidad $p_{123\cdots r}$ de que todos ellos ocurran es

$$p_{123\ldots r} = \frac{h_1h_2h_3 \cdots h_r}{(h_1+f_1)(h_2+f_2)\cdots(h_r+f_r)}$$
$$= p_1p_2 \cdots p_r \tag{20.4}$$

EJEMPLO Si las probabilidades de que cada uno de dos hermanos pueda llegar a la edad de 60 años son 0.61 y 0.67, respectivamente: entonces la probabilidad de que ambos lleguen a esa edad es $0.61 \times 0.67 = 0.41$.

20.6 SUCESOS DEPENDIENTES

Si la ocurrencia de un suceso que pertenece a un conjunto de sucesos afecta la probabilidad de ocurrencia de otro suceso del conjunto, se dice que los sucesos son dependientes.

Se considerará nuevamente la bolsa de bolas discutida en los dos últimos párrafos. Si se saca una bola de la bolsa y no se reemplaza, la acción de haberla sacado afecta con seguridad el modo de sacar la segunda. Por ejemplo, la probabilidad de sacar primero una bola negra es $\frac{5}{12}$; pero si primero se saca una bola roja, la probabilidad de que la segunda sea negra es $\frac{5}{11}$. La probabilidad de sacar primero una bola roja e inmediatamente después una bola negra se calcula como sigue. Las bolas se pueden sacar en el orden rojo, negro de 3×5 modos. Además, las dos bolas, independientemente de su color, se pueden sacar de 12×11 modos. Por tanto, la probabilidad deseada es

$$\frac{3 \times 5}{12 \times 11} = \frac{3}{12} \times \frac{5}{11}$$

probabilidad de sucesos dependientes

Se observa que la probabilidad deseada es el producto de las probabilidades de los sucesos dependientes por separado. Lo anterior ilustra el teorema siguiente: *Si la probabilidad de que ocurra un suceso* E_1 *es* p_1, *y si después de que éste haya ocurrido, la probabilidad de que ocurra un segundo suceso* E_2 es p_2, entonces *la probabilidad de que ambos ocurran en el orden* E_1E_2 *es* p_1p_2.

Si E_1 puede ocurrir de h_1 modos y dejar de ocurrir de f_1 modos, y si después de la prueba anterior, E_2 puede ocurrir de h_2 modos y dejar de ocurrir de f_2 modos, entonces los sucesos pueden ocurrir en el orden E_1E_2 de h_1h_2 modos, y pueden ocurrir o dejar de ocurrir de $(h_1 + f_1)(h_2 + f_2)$ modos. Por tanto, la probabilidad de que ocurran en el orden E_1E_2 es

$$p_{12} = \frac{h_1h_2}{(h_1+f_1)(h_2+f_2)} = p_1p_2$$

Se considerará luego que p_1 es la probabilidad de que E_1 pueda ocurrir después de que $E_1E_2E_3 \ldots E_{i-1}$, $i = 1, 2, 3 \ldots r$, sucesos hayan ocurrido y que $p_{123} \ldots r$ *es la probabilidad de que* $E_1E_2E_3 \ldots Er$ puedan ocurrir en el orden indicado. Mediante repetidas aplicaciones del teorema anterior se obtiene $p_{123} = p_{12}p_3 = p_1p_2p_3$,

$$p_{1234} = p_{123}p_4 = p_1p_2p_3p_4,$$

y así sucesivamente hasta obtener.

$$p_{123\ldots r} = p_1p_2p_3 \cdot \cdot \cdot p_r \qquad (20.5)$$

EJEMPLO Si la probabilidad de que una persona de 35 años llegue a la edad de 65 años es 0.6, y si en caso de alcanzar esa edad la probabilidad de que se retire es 0.5, entonces la probabilidad de que se retire a los 65 años de edad es $0.6 \times 0.5 = 0.3$.

EJERCICIO 84: PROBABILIDAD DE SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

1: Los equipos A y B participan en concursos separados. Sus probabilidades de ganar son 0.5 y 0.3, respectivamente. Encuéntrese la probabilidad de que: (a), ambos ganen; (b), ninguno gane.

2: Juan, Tomás y Guillermo compiten separadamente en carreras de pista. Las probabilidades de que cada uno gane el primer lugar son $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$, respectivamente. Encuéntrese la probabilidad de que los tres ganen los primeros lugares.

3: En el problema 2 encuéntrense las probabilidades de que cada participante sea el único en obtener el primer lugar.

4: En el problema 2 encuéntrese la probabilidad de que sólo uno de los participantes obtenga el primer lugar.

5: Si las probabilidades de que el señor García y el señor Martínez sean designados para el mismo comité son $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente, encuéntrese la probabilidad de que: (a), ambos sean designados; (b), sólo uno sea designado.

6: Las probabilidades de que Alicia gane las pruebas preliminares. semifinales y finales de un concurso de ortografía son $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{12}$, respectivamente. Si falla en alguna de las pruebas queda eliminada para participar en la siguiente. Encuéntrese la probabilidad de que: (a), llegue a participar en las pruebas finales; (b), gane las pruebas finales.

7: Juana concursa en las tres pruebas del problema 6 y sus probabilidades de ganar son $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$, respectivamente. Encuéntrese la probabilidad de que Alicia o Juana ganen las pruebas finales.

8: La probabilidad de que cierto candidato sea nombrado por su partido es 0.3 y, si es nombrado, la probabilidad de que gane las elecciones es 0.2, encuéntrese la probabilidad de que: (a), gane las elecciones; (b), sea nombrado, pero pierda las elecciones.

9: Un agricultor considera que si caen 1.5 centímetros de lluvia en julio, su probabilidad de obtener una cosecha de 200 pacas de algodón es $\frac{2}{3}$, la de obtener 10 toneladas de maíz es $\frac{3}{4}$, y la de obtener 800 quintales de maíz es $\frac{5}{6}$. Si las estadísticas muestran que la probabilidad de la mencionada precipitación pluvial en el mes de julio es 0.3, encuéntrese la probabilidad de que: (a), obtenga las tres cosechas en las cantidades señaladas; (b), obtenga la cantidad señalada de algodón, pero no de los otros dos productos.

10: Las probabilidades de que Tomás, Ricardo y Enrique terminen la secundaria son $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$, respectivamente. Si terminan la secundaria, las probabilidades de que se gradúen en la universidad son $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, respectivamente. Encuéntrese la probabilidad de: (*a*), que los tres se gradúen en la universidad (*b*), que Tomás y Ricardo se gradúen en la universidad y que Enrique solamente termine la secundaria.

11: Tomás y Juan envían por correo solicitudes para un empleo, siendo ellos los únicos solicitantes. Si la solicitud de Tomás es estudiada, la probabilidad de que

obtenga el empleo es $\frac{2}{3}$. Si la de Juan es estudiada, la probabilidad de que obtenga el empleo es $\frac{1}{4}$. La solicitud que es estudiada primero es la que llega primero. Encuéntrese la probabilidad de que Tomás obtenga el empleo.

12: Una ruleta vertical tiene marcados los números del 1 al 10 en espacios iguales y hay un indicador fijo encima de ella. Se hace girar la ruleta dos veces sucesivas; encuéntrese la probabilidad de que el número 5 salga; (a), ambas veces; (b), por lo menos una vez.

13: En el problema 12 encuéntrese la probabilidad de (a), que la primera vez salga el 3 y que la segunda salga el 5; (b), que salgan el 3 y el 5.

14: Cierto estado requiere que los candidatos para obtener una licencia profesional pasen un examen preliminar y luego un examen final. Si en 1959, 400 entre 600 candidatos pasaron el examen preliminar y 200 entre 400 candidatos pasaron el examen final, encuéntrese la probabilidad de que un candidato pase ambos exámenes.

15: En una caja hay 20 fichas numeradas del 1 al 20. Se sacan tres fichas sucesivamente, reemplazando cada vez la ficha sacada y revolviendo las fichas antes de la siguiente extracción. Encuéntrese la probabilidad de que se obtengan los siguientes resultados, en el orden mencionado: un número par, un número divisible entre cinco, un número que comprenda el dígito 2.

16: Si en el problema 15 se sacan tres fichas sin reposición, encuéntrese la probabilidad de que sea sacada la ficha número 3.

17: Si en el problema 1 se sacan tres fichas con reposición, encuéntrese la probabilidad de que el número 3 salga sólo una vez.

18: En un estante hay tres libros rojos, cinco libros negros y dos libros azules. Una persona selecciona al azar dos de los libros, tomándolos del estante uno tras otro. Encuéntrese la probabilidad de que el primer libro sea rojo y el segundo azul.

19: En el problema 18 encuéntrese la probabilidad de que los libros se saquen en los siguientes órdenes: (a), negro, azul o bien, (b), rojo, negro.

20: Encuéntrese la probabilidad de no obtener ni 5 ni 7 en el primer tiro de un par de dados y de obtener 5 en el segundo tiro.

21: Encuéntrese la probabilidad de obtener 5 en el primer tiro de un par de dados, de no obtener ni 5 ni 7 en el segundo tiro y de obtener 5 en el tercero.

22: Encuéntrese la probabilidad de obtener 5 en el primer tiro de un par de dados y 7 en el segundo tiro.

23: Una caja contiene 7 bolas rojas, 6 bolas blancas y 2 bolas verdes. Si se saca una bola, se repone, y luego se saca otra; encuéntrese la probabilidad de: (a), que ambas bolas sean rojas; (b), que ninguna de las bolas sea roja.

24: Una caja contiene 100 cuentas rojas, 80 azules y 20 verdes. Otra caja contiene 40 cuentas rojas, 20 azules y 90 verdes. Un niño saca una cuenta de cada caja; encuéntrese la probabilidad de: (a), que ambas cuentas sean rojas; (b), que ambas cuentas sean del mismo color.

25: Si en el problema 24 se selecciona al azar una de las cajas y luego se saca de ella una cuenta, encuéntrese la probabilidad de que la cuenta sea azul.

26: Juan, Francisco y tres personas más están en una sala de recepción esperando ser entrevistados como candidatos a un empleo y siendo que en ese día sólo habrá tiempo para dos entrevistas. La probabilidad de que la primera persona entrevistada obtenga el empleo es $\frac{2}{3}$. Sin embargo, si la primera persona es rechazada, la probabilidad de que la segunda sea aceptada es $\frac{3}{5}$. El orden de las entrevistas se decide sacando de un sombrero papeletas que han sido numeradas del 1 al 5. Encuéntrese la probabilidad de: (a), que Juan sea entrevistado primero y Francisco en segundo lugar; (b), que Francisco obtenga el trabajo si Juan es entrevistado primero y Francisco en segundo lugar.

27: En una fiesta los muchachos sacan nombres de las muchachas de un som-

brero para determinar quiénes serán sus compañeras en un juego. Los primeros en sacar nombres son dos hermanos, cuando están en el sombrero los nombres de sus tres hermanas y de sus cuatro primas, junto con los nombres de otras siete muchachas. Encuéntrese la probabilidad de: (a), que uno de los hermanos obtenga como compañera a una de sus hermanas y el otro a una de sus primas; (b), que sólo uno de los hermanos obtenga como compañera a una de sus primas; (c), que por lo menos uno de los hermanos obtenga como compañera a alguien de su familia.

28: Tres hermanos y dos de sus amigos suben a un autobús en el que hay dos lugares vacíos en la parte delantera y un asiento para tres, vacío en la parte trasera. Si los pasajeros toman sus asientos al azar, encuéntrese la probabilidad de que, por lo menos, dos hermanos ocupen el asiento de la parte trasera.

29: Juan y su abuelo tienen 15 y 65 años, respectivamente. Sus cumpleaños coinciden y acostumbran celebrarlos juntos. Encuéntrese la probabilidad de que celebren el octagésimo cumpleaños del abuelo.

30: Un testamento leído el 4 de enero de 1960 estipula que cada uno de dos hermanos deberá heredar un fideicomiso al llegar a los 21 años. Si al hacerse dicha lectura los hermanos tenían 16 y 21 años, respectivamente, encuéntrese la probabilidad de que ambos reciban sus herencias.

31: El testamento del problema 30 estipula, además, que si alguno de los hermanos muere antes de los 21 años, entonces el otro deberá recibir ambos fondos al cumplir los 21 años.
Encuéntrese la probabilidad de que el hermano mayor herede ambos fondos.

32: Bajo las condiciones del problema 31 ecuéntrese la probabilidad de que el hermano menor herede ambos fondos.

20.7 PRUEBAS REPETIDAS DE UN SUCESO

Si se conoce la probabilidad de que un suceso ocurra en una prueba, entonces la probabilidad de que ocurra un número determinado de veces en n pruebas está dada por el teorema siguiente:

teorema sobre pruebas repetidas

Si p es la probabilidad de que un suceso ocurra en una prueba, entonces la probabilidad de que ocurra exactamente r veces en n pruebas es igual a

$$C(n,r)p^r(1-p)^{n-r}$$

Las r pruebas se pueden seleccionar entre n pruebas de $C(n,r)$ modos, de acuerdo con el Sec. 19.5. La probabilidad de que el suceso pueda ocurrir r veces y que no ocurra las restantes $n - r$ veces, es $p^r(1 - p)^{n-r}$, según el Sec. 20.5, ya que las pruebas son independientes y que $1 - p$ es la probabilidad de que el suceso no ocurra en ninguna prueba. De acuerdo con el teorema de Sec. 20.4, la probabilidad deseada es, por tanto, $C(n,r)p^r(1 - p)^{n-r}$.

corolario al teorema sobre pruebas repetidas

Si p es la probabilidad de que un suceso pueda ocurrir en una prueba, entonces la probabilidad de que ocurra por lo menos r veces en n pruebas es

$$p^n + C(n,n-1)p^{n-1}(1-p) + C(n,n-2)p^{n-2}(1-p)^2 + \cdots + C(n,r+1)p^{r+1}(1-p)^{n-r-1} + C(n,r)p^r(1-p)^{n-r} \qquad (20.6)$$

Los términos de esta suma son las probabilidades de que el suceso

pueda ocurrir exactamente n veces, exactamente $n - 1$ veces, . . . , exactamente $r + 1$ veces y exactamente r veces en n pruebas, siendo los sucesos mutuamente excluyentes.

El lector debe notar que los términos que aparecen en este corolario son los primeros $n - r + 1$ términos del desarrollo del binomio $(p + q)^n$, en donde $q = 1 - p$.

EJEMPLO Una bolsa contiene 3 bolas blancas y 4 rojas. Las bolas se sacan de una en una de la bolsa y cada una se vuelve a colocar en la bolsa antes de sacar la siguiente. (a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente 3 bolas rojas en 5 pruebas? (b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar por lo menos 3 bolas rojas en 5 pruebas?

Solución: (a) La probabilidad de sacar una bola roja en una prueba es $\frac{4}{7}$. Por consiguiente, la probabilidad deseada es

$$\begin{aligned} C(n,r)p^r(1-p)^{n-r} &= C(5,3)(\tfrac{4}{7})^3(1-\tfrac{4}{7})^{5-3} \\ &= \left(\frac{5!}{3!2!}\right)\left(\frac{4^3}{7^3}\right)\left(\frac{3^2}{7^2}\right) \\ &= \frac{5760}{16807} \end{aligned}$$

EJERCICIO 85: PROBABILIDAD DE PRUEBAS REPETIDAS

1: Si la probabilidad de que un arquero dé en el centro del blanco en un intento es $\frac{1}{6}$, encuéntrese la probabilidad de que dé en el centro del blanco: (a), exactamente tres veces en cinco intentos; (b), por los menos tres veces.

2: En una caja hay fichas marcadas del 1 al 10. Se sacan 7 fichas, reponiendo cada ficha después de cada extracción y revolviendo las fichas antes de la siguiente extracción. Encuéntrese la probabilidad de: (a), que el 3 sea sacado exactamente 5 veces; (b), por lo menos 5 veces.

3: Si la probabilidad de que un bateador logre un jit en una vez al bate es 0.2, encuéntrese la probabilidad de que logre: (a), exactamente 4 jits en 6 veces al bate; (b), por lo menos 4 jits.

4: Según la tabla VIII la probabilidad de que un hombre de 47 años llegue a los 80 años es, aproximadamente, $\frac{1}{5}$. Encuéntrese la probabilidad de que por lo menos 3 de 4 hombres de 47 años no lleguen a los 80 años.

5: Cada uno de seis muchachos tira un dado. Encuéntrese la probabilidad de que por lo menos cuatro de ellos saque un 6.

6: Si cada uno de los muchachos del problema 5 tira el dado dos veces, encuéntrese la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos saque primero un 6 y luego un 5.

7: Juan y Tomás pertenecen al mismo grupo de una escuela dominical, el cual comprende cinco niños, los cuales se sientan en una misma banca para oír la lección. Si los niños toman sus asientos al azar y todos asisten los cuatro domingos de cierto mes, encuéntrese la probabilidad de que Juan y Tomás se sienten juntos: (a), exactamente tres veces; (b), por lo menos tres veces.

8: Una bolsa contiene 6 bolas rojas, 4 bolas verdes y 2 bolas blancas. Se sacan 6 bolas en sucesión, reemplazando cada bola antes de sacar la siguiente. Encuéntrese la probabilidad de que se saque una bola roja: (a), exactamente tres veces; (b), por lo menos tres veces.

9: En el problema 8, ¿Cuál es el número más probable de bolas verdes que podrá sacarse? ¿Cuál es la probabilidad de que este número se saque?

10: En el problema 8 encuéntrese la probabilidad de que se saquen dos bolas de cada color.

11: Un jugador de beisbol ha pegado de jit en sus últimas 20 veces al bate; encuéntrese la probabilidad de que en las próximas 7 veces al bate pegue de jit 5 veces y no lo haga en las dos veces restantes.

12: Dos agentes viajeros visitan la misma ciudad el lunes de cada semana. Si solamente hay tres hoteles en la ciudad y ninguno de los agentes tiene preferencia por uno de ellos encuéntrese la probabilidad de que los dos hombres se alojen en el mismo hotel tres veces en un mes que tiene cinco lunes.

13: Cada una de tres personas tiene una caja que contiene bolas numeradas del 1 al 6. Cada persona saca una bola de su caja, la reemplaza y luego saca dos bolas simultáneamente. Encuéntrese la probabilidad de que dos personas saquen el 5 la primera vez y que la segunda vez saquen bolas cuyos números sumen 5.

15: Seis grupos de matemáticas y cuatro de otras materias tienen clase a las 8 A.M. en cierto edificio 6 veces por semana. Hay seis lugares de estacionamiento reservados para profesores cerca de la entrada. Encuéntrese la probabilidad de que los profesores de matemáticas se estacionen en los lugares reservados exactamente cuatro veces en una semana.

15. Si la probabilidad de que un suceso ocurra en un intento es p, demuéstrese por medio de la fórmula que la probabilidad de que el suceso ocurra exactamente 600 veces en 1 000 intentos es igual a la probabilidad de que no ocurra 400 veces en 1 000 intentos.

16: Si la probabilidad de que un pandillero diga la verdad es $\frac{1}{3}$, encuéntrese la probabilidad de que mienta 7 veces al contestar 10 preguntas.

17: Si la probabilidad de que un suceso ocurra exactamente 4 veces en cinco intentos es $\frac{10}{243}$, encuéntrese la probabilidad de que ocurra en un intento.

19: ¿Cuál es la probabilidad de que un suceso ocurra en un intento si la probabilidad de que ocurra exactamente dos veces en cuatro intentos es igual a 18 veces la probabilidad de que ocurra exactamente 5 veces en 6 intentos?

20: Si la probabilidad de que un suceso ocurra exactamente tres veces en 6 intentos es igual a la probabilidad de que ocurra exactamente dos veces en cinco intentos, encuéntrese la probabilidad de que ocurra en un intento.

21 DETERMINANTES

EN LOS PARÁGRAFOS 6.7 y 6.8 se introdujo un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante el uso de ciertas relaciones entre los coeficientes de las incógnitas y los términos constantes. Este método, llamado solución por determinantes, puede ser usado para sistemas de ecuaciones con cualquier número de incógnitas, y el valor del método aumenta con el número de ecuaciones en el sistema. Ya que las aplicaciones del álgebra frecuentemente requieren que se resuelvan sistemas de ecuaciones, las características de los determinantes han sido investigados ampliamente.* Los principales resultados de estas investigaciones son los teoremas que se enunciarán, se demostrarán y se aplicarán en el presente capítulo.

21.1 INVERSION

En este capítulo se generalizará la discusión acerca de los determinantes, iniciada en los Sec. 6.7 y 6.8. Para ello, se requiere la definición siguiente: Ocurre una *inversión* es una permutación de enteros cuando un entero mayor precede a uno menor.

En la permutación 4312 4 precede a 3, a 1 y a 2; además, 3 precede a 1 y a 2. Por tanto, en esa sucesión hay cinco inversiones.

teorema sobre inversiones

1. *El intercambio de dos elementos adyacentes en una permutación de enteros incrementa o disminuye en uno el número de inversiones.*

Con el fin de demostrar este teorema, sean r y s los dos términos adyacentes de una permutación dada. Si se intercambian estos dos términos, se añade una inversión si $r < s$ y se elimina una si $r > s$.

* Existen muchas otras aplicaciones de los determinantes; de hecho hay toda una rama del álgebra que está basada en las propiedades de dichas expresiones matemáticas.

21.2 DETERMINANTES DE ORDEN n

El símbolo

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{21.1}
$$

se llama *determinante de orden n*, y es el modo de escribir abreviadamente el polinomio homogéneo que se obtiene al efectuar los pasos siguientes:

1. Formar todos los productos posibles tomando como factores un solo elemento de cada línea y de cada columna de D.

2. Ordenar los factores en cada producto de tal modo que los segundos subíndices (los de columnas) estén en orden numérico*, y anteponer a cada factor el signo positivo o negativo según el número de inversiones de los primeros subíndices (los de líneas) sea un número par o impar.

3. Efectuar la suma algebraica de todos los productos obtenidos en 1 y en 2.

La suma, en la definición anterior, se llama *desarrollo* o valor de D.

Debe notarse que en D el primer subíndice de cada elemento indica la línea en que está el elemento y el segundo subíndice indica la columna.

Puesto que cada producto del desarrollo de D contiene como factores exactamente un elemento de cada línea y exactamente uno de cada columna, cada uno de los enteros de 1 a n aparece una vez en cada producto como primer subíndice y una vez como segundo subíndice. Además, de acuerdo con (2) en la definición, los segundos subíndices deben estar dispuestos en orden numérico. En consecuencia, los primeros subíndices aparecerán como una permutación cualquiera de 1, 2, 3, . . . n. De ese modo, se puede obtener el desarrollo de D mediante los pasos siguientes:

pasos para desarrollo de D

1. Se escriben las $n!$ permutaciones de 1, 2, 3, . . . , n.

2. Se escriben los $n!$ productos, cada uno de los cuales contiene n elementos de D, y todos los cuales tienen como primeros subíndices una de las permutaciones obtenidas en el paso 1 y como segundos subíndices los enteros 1, 2, 3, . . . , n en su orden natural.

3. Se pone a cada producto signo positivo o signo negativo, según que el número de inversiones de los primeros subíndices sea par o impar.

teorema sobre el número de términos en el desarrollo de D

Como consecuencia de esa discusión, se tiene el teorema siguiente:

(*) Se supone en la definición que las columnas están dispuestas de tal modo que los segundos subíndices quedan en orden numérico. Si esto no sucede, entonces los factores de cada producto deben ordenarse de manera que los segundos subíndices queden en el orden en que aparecen en la primera línea.

2. *El desarrollo de un determinante de orden n, contiene n! términos.*

EJEMPLO Empleando el procedimiento anterior para obtener el desarrollo del determinante puesto a continuación,

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Solución: se tiene

1. Las permutaciones de los enteros 1, 2, 3 son 1, 2, 3 (cero inversiones); 1, 3, 2 (una inversión); 2, 1, 2 (una inversión); 2, 3, 1 (dos inversiones); 3, 1, 2 (dos inversiones); y 3, 2, 1 (tres inversiones).
2. y 3. El desarrollo de D' se puede escribir

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Se puede emplear una forma modificada del procedimiento anterior para obtener los términos del desarrollo de D' que contienen un elemento dado. Por ejemplo, para obtener los términos que contienen a_{32}, se recuerda que este factor debe ocupar la segunda posición en cada producto, puesto que su segundo subíndice es 2. Por tanto, se pueden usar únicamente aquellas permutaciones del paso 1 en las que 3 ocupa la segunda posición, esto es, 1, 3, 2 y 2, 3, 1. De este modo, empleando como segundos subíndices, 1, 2, 3, se tiene $-a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13}$. Si esa expresión se escribe en la forma $a_{32}(-a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13})$, se puede observar el hecho siguiente, que es interesante. La expresión dentro del paréntesis es, según el Pr. 43, el desarrollo con signo opuesto de $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, que es un determinante formado con los elementos D' que no están ni en la misma hilera ni en la misma columna que a_{32}.

teorema sobre el intercambio de líneas y columnas

3. *Si en un determinante se intercambian las líneas por las columnas, el valor del determinante no se altera.*

Como consecuencia de este teorema, muchos de los teoremas que se darán posteriormente y que tratan de determinantes, requieren demostraciones únicamente para las columnas. El teorema se demostrará para un determinante de cuarto orden. Sin embargo, el método es general y se puede aplicar, con pequeñas variaciones a determinantes de cualquier orden.

Se considerarán los dos determinantes D_1 y D_2 en los que las columnas y las líneas de D_1 aparecen como líneas y columnas, respectivamente, de D_2.

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Se observa primero que en D_1 la columna en que aparece un elemento

se denota con el segundo subíndice, mientras que en D_2 el mismo hecho se denota con el primer subíndice. Por tanto, según el segundo párrafo de la definición, los términos del desarrollo de D_2 se deben ordenar de tal modo que los primeros subíndices queden en orden numérico y que el signo se determine de acuerdo con el número de inversiones en el segundo subíndice.

Por lo que respecta al segundo párrafo de la definición, se observa que cada término de D_1 está en la forma

$$a_{t_1 1}a_{t_2 2}a_{t_3 3}a_{t_4 4} \tag{21.2}$$

en donde t_1, t_2, t_3, t_4 es una permutación de los enteros 1, 2, 3, 4. El término es positivo o negativo, según que el número de inversiones en t_1, t_2, t_3, t_4 sea par o impar.

Si se ordenan los términos de (21.2), de tal modo que t_1, t_2, t_3, t_4 queden en el orden 1, 2, 3, 4, se convierten entonces, con excepción probable del signo, en un término del desarrollo de D_2.

Se hará ver ahora que ese cambio en la ordenación de los factores no afecta el signo del término. Para tal propósito se necesitará el concepto de número total de inversiones de los subíndices de un término tal como $a_{31}a_{44}a_{31}a_{22}$. El número total de inversiones en esta ordenación es el número de inversiones debidas al primer subíndice más el número de inversiones debidas a los segundos subíndices; en este caso, $4 + 3 = 7$.

De acuerdo con el teorema 1, el intercambio de dos términos adyacentes en una ordenación de ese tipo incrementa o disminuye en uno, en cada grupo de subíndices, el número de inversiones. Por tanto, el intercambio aumenta o disminuye, en cero o en dos, el número de inversiones de los dobles subíndices.

Si mediante una sucesión de intercambios de factores adyacentes, el término (21.2) se convierte en el término

$$a_{1s_1}a_{2s_2}a_{3s_3}a_{4s_4} \tag{21.3}$$

entonces, de acuerdo con la discusión anterior, el número total de inversiones en (21.3) diferirá en un número par del número de inversiones en (21.2). Sin embargo, no hay ninguna inversión ni en los segundos subíndices de (21.1), ni en los primeros subíndices de (21.3). Por tanto, las inversiones en (21.2) son las que hayan en t_1, t_2, t_3, t_4 y las inversiones en (21.3) son las que haya en S_1, S_2, S_3, S_4. De ese modo, el número de inversiones en (21.3) es par o impar, según que el número de inversiones en (21.2) sea par o impar. En consecuencia, los signos de los términos en (21.2) y en (21.3) son los mismos y $D_1 = D_2$.

21.3 MENORES DE UN DETERMINANTE

El determinante de $n - 1$ líneas que se obtiene de un determinante de

orden n suprimiendo la línea y la columna que contienen un elemento dado, se llama *menor* de ese elemento; por ejemplo.

El menor de a_{23} en el determinante D es el determinante que se obtiene suprimiendo la segunda línea y la tercera columna en D. En consecuencia, el menor del elemento 3 en

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{es} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Se demostrará ahora que la suma algebraica de todos los términos del desarrollo del determinante D, de (21.2), que contiene el elemento de a_{ij} es igual, con excepción probable del signo, al producto de a_{ij} por su menor. Estos términos se pueden obtener empleando el procedimiento del Sec. 21.2). Sin embargo, al escribir las permutaciones de los primeros subíndices, se debe tener i en la posición j.* Los subíndices permutados son entonces los enteros de 1 a n excepto i. Cada término del desarrollo quedará en la forma

$$\pm a_{e_1 1} a_{e_2 2} a_{e_3 3} \cdots a_{ij} \cdots a_{e_n n} \tag{21.4}$$

en donde $e_1 e_2 e_3 \ldots e_n$ es una permutación de los enteros de 1 a n con i en la posición j.

El menor A_{ij} de a_{ij} en D, es el determinante formado con todos los elementos de D, excepto los de la fila i y los de la columna j. Por tanto, cada término de A_{ij} está en la forma

$$a_{e_1 1} a_{e_2 2} a_{e_3 3} \ldots a_{e_n n}, \text{ en donde } e_1 e_2 e_3 \ldots e_n \tag{21.5}$$

es una permutación de todos los enteros de 1 a n, excepto i, y en donde j está omitido en los segundos subíndices. El signo se determina por el número de inversiones en $e_1 e_2 e_3 \ldots e_n$. Si se multiplica A_{ij} por a_{ij}, cada término del producto queda en la forma

$$\pm a_{ij} a_{e_1 1} a_{e_2 2} a_{e_3 3} \cdots a_{e_n n}$$

Las expresiones (21.4) y (21.5) son iguales, excepto en lo que se refiere a la posición de a_{ij}, y en que el signo de la primera está determinado por las inversiones en $e_1 e_2 e_3 \quad i \quad e_n$, en tanto que el signo de la última lo está únicamente por las inversiones en $e_1 e_2 e_3 \ldots e_n$. En otras palabras, se puede determinar el signo de (21.5) despreciando i en (21.4) y contando las inversiones de los subíndices que queden. Esto conduce a la pregunta: ¿al despreciar un entero en una permutación, en cuánto se afecta el número de inversiones en dicha permutación? Si el entero despreciado, i, ocupa la primera posición en la permutación, se elimina una inversión por cada uno de los $i - 1$ enteros menos que i.

Se puede situar a_{ij} en la primera posición en (21.4) mediante $j - i$ intercambios de a_{ij} con los términos que están colocados a su izquierda.

(*) Como ejemplo véase la discusión en el párrafo que procede al teorema 3 Sec. 21.2.

De acuerdo con el teorema 1, cada intercambio aumenta o disminuye en uno el número de inversiones en el segundo subíndice. Luego, al despreciar i en la nueva ordenación, se disminuye el número de inversiones en $i - 1$. Por tanto, con este procedimiento se han introducido

$$j - 1 + i - 1 = j + i - 2$$

cambios en el número de inversiones. Este número será par o impar, según que $j + i$ sea par o impar. Por tanto, los signos de (21.4) y (21.5) son iguales si $j + i$ es par y son opuestos si $j + i$ es impar. Además, $(-1)^{i+j}$ es positivo o negativo según que $i + j$ sea par o impar. Por tanto, *los términos del desarrollo de D que contienen a_{ij} son iguales a $(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}$.*

Por definición, cada término del desarrollo de D contienen un elemento y sólo uno de la columna j. Por tanto,

$$\begin{aligned} D = (-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}A_{2j} + (-1)^{3+j}a_{3j}A_{3j} \\ + \cdots + (-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}A_{nj} \end{aligned} \qquad \textbf{(21.6)}$$

Esta conclusión proporciona el método más usual para el desarrollo de determinantes, especialmente para los de orden superior a tres. El método se presenta a modo de esquema en el teorema 4.

teorema sobre el desarrollo de determinantes por menores

4. *El desarrollo de un determinante se puede obtener mediante los pasos siguientes:*

a. *Se multiplica cada elemento de un línea o de una columna por su menor y el producto se precede del signo positivo o del signo negativo según que sea par o impar a la suma de los números de orden de la línea y de la columna en que está el elemento.*

b. *Se efectúa la suma algebraica de esos productos.*

c. *Se repite el procedimiento para cada determinante que se obtenga, hasta que la suma indicada tenga sólo determinantes de tercer orden.*

d. *Se desarrollan estos determinantes de tercer orden, y se efectúa la suma algebraica de los números que se obtengan.*

Este método se llama desarrollo de determinantes por menores.

EJEMPLO Desarrollar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución: Si se desarrolla de acuerdo con los elementos de la primera columna y se aplica el procedimiento del teorema 4, se obtiene

$$1\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1(12 + 20 - 6 + 15 - 4 - 24)\\
&\quad - 2(-24 + 40 - 18 + 45 + 8 - 48)\\
&\quad - 3(16 + 20 + 6 - 30 + 4 + 16)\\
&\quad - 2(8 + 12 + 9 - 18 + 6 + 8)\\
&= 1(13) - 2(3) - 3(32) - 2(25) = -139
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 86: DESARROLLO DE DETERMINANTES

Determínese el número de inversiones en las permutaciones de enteros de los problemas 1 a 8.

1: 4 3 1 5 6 2 **2:** 5 3 2 6 4 1 **3:** 6 3 2 4 1 5
4: 3 6 5 4 2 1 **5:** 7 6 1 2 5 4 3 **6:** 6 7 5 3 4 2 1
7: 5 6 7 4 2 3 1 **8:** 1 3 5 7 6 4 2

En los problemas 9 a 16, ordénense los factores de los productos de acuerdo con las indicaciones de la segunda parte de la definición de un determinante, y luego determínense los signos de dichos productos.

9: $a_{41}a_{33}a_{24}a_{12}$ **10:** $a_{32}a_{23}a_{41}a_{14}$ **11:** $a_{21}a_{32}a_{14}a_{43}$
12: $a_{31}a_{23}a_{42}a_{14}$ **13:** $a_{15}a_{23}a_{42}a_{34}a_{51}$ **14:** $a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}a_{14}$
15: $a_{15}a_{34}a_{23}a_{41}a_{52}$ **16:** $a_{52}a_{41}a_{33}a_{24}a_{15}$

Empleando los métodos de los Prs. 6.7 y 6.8 obténganse los desarrollos de los determinantes de los problemas 17 a 24.

17: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ **18:** $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ **19:** $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

20: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$ **21:** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ **22:** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

23: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ **24:** $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Mediante el desarrollo de los determinantes de los problemas 25 a 28 demuéstrese que es cierta la proposición dada en cada problema.

25: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ **26:** $\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ c & 4 & b \\ 2 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c & 2 \\ a & 4 & 0 \\ 3 & b & c \end{vmatrix}$

27: $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - c & c \\ b - d & d \end{vmatrix}$

28: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - x & 2 & -1 \\ 0 + 4x & -5 & 4 \\ 1 - 6x & 3 & -6 \end{vmatrix}$

Mediante el desarrollo de los determinantes de los problemas 29 a 32 demuéstrese que es cierta la proposición dada en cada problema.

29: La suma de los términos que contienen a en

$$\begin{vmatrix} 4 & a & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{es igual a} \quad -a\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

30: La suma de los términos que contienen a en

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ a & 6 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{es igual a} \quad a\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

31: La suma de los términos que contienen a en

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & a \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{es igual a} \quad -a\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

32: La suma de los términos que contienen a en

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{es igual a} \quad a\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Desarróllense por menores los determinantes siguientes

33: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

34: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

35: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

36: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix}$

37: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

38: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

39: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

40: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

41: $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & a & 0 \\ a & 0 & a & b & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 & b \\ 0 & a & 0 & a & 0 \end{vmatrix}$

42: $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & b \\ b & 0 & a & b & a \\ a & a & b & a & a \\ b & a & b & 0 & b \end{vmatrix}$

43: $\begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

44: $\begin{vmatrix} a & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & a & a & 0 \end{vmatrix}$

21.4 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Para conveniencia del lector, se escribirá nuevamente el desarrollo del determinante D, dado en el Pr. (21.3), en términos de los menores de la columna j.

$$D = (-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}A_{2j} + (-1)^{3+j}a_{3j}A_{3j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}A_{nj} \quad (21.7)$$

teorema sobre líneas o columnas con elementos iguales a cero

5. *Si todos los elementos de una columna o todos los elementos de una línea son iguales a cero, el valor del determinante es cero.*

Suponiendo que todos los elementos de la columna j de D son cero, entonces la expresión (21.7) es

$$D = (-1)^{1+j}0A_{1j} + (-1)^{2+j}0A_{2j} + (-1)^{3+j}0A_{3j} + \cdots + (-1)^{n+j}0A_{nj}$$
$$= 0$$

teorema sobre el intercambio de dos líneas o de dos columnas

6. *Si se intercambia una con otra dos líneas o dos columnas en un determinante, se cambia el signo del determinante.*

Se considerará primero el caso en que se intercambien dos columnas adyacentes del determinante D, esto es, la columna j y la columna $j + 1$, y se designará por D' el determinante así obtenido. Los menores de los elementos de la columna j no se alteran a causa de este cambio, ya que la única columna que participa en ellos y que ha sido movida es la columna $j + 1$, cuya posición con respecto a las columnas $j - 1$ y $j + 2$ no se ha alterado. Por tanto,

$$D' = (-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}A_{nj} \tag{21.8}$$

Sin embargo, el valor de j en (21.8) es ahora mayor que en (21.7), puesto que la columna j se ha movido un lugar a la derecha. En consecuencia, cada exponente de -1 en (21.8) es una unidad mayor que el correspondiente término de (21.7); por tanto, estos términos son de signo opuesto. Esto es, $D = -D'$.

Luego se intercambiarán las columnas j y $j + k$ en D, obteniéndose con ello D''. Con el fin de hacerlo, se mueve sucesivamente la columna j a través de las $k - 1$ columnas que hay entre ella y la columna $j + k$, llevándola de ese modo hasta la posición inmediata a la izquierda de la columna $j + k$. Se mueve ahora la columna $j + k$, k posiciones a la izquierda, hasta que ocupa el lugar que dejó vacío la columna j. Por tanto, se han efectuado $k - 1 + k = 2k - 1$ intercambios. En consecuencia,

$$D'' = (-1)^{2k-1}D = -D \tag{21.9}$$

puesto que $2k - 1$ es un número impar.

teorema sobre líneas o columnas con elementos idénticos

7. *Si los elementos de dos líneas o de dos columnas son idénticos, el valor del determinante es cero.*

Supóngase que las columnas j y k en D son idénticas. Si se intercambian estas columnas, entonces, de acuerdo con el teorema 6, se cambia el signo del determinante, y, por tanto, queda igual a $-D$. Por otra parte, puesto que las dos columnas que se mueven son idénticas, D no se altera al moverlas. En consecuencia, $D = -D$, y, por tanto, $D = 0$.

teorema sobre elementos multiplicados por una constante

8. *Si cada elemento de una línea o de una columna de un determinante se multiplica por k, el valor del determinante queda multiplicado por k.*

Supóngase que cada elemento de la columna j de D se multiplica por k y que $\overline{D}$ es el determinante que se obtiene. De acuerdo con los pasos 1 y 2 del teorema 4, el desarrollo de $\overline{D}$ en términos de los menores de la columna j es

$$
\begin{aligned}
\bar{D} &= (-1)^{1+j}ka_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j}ka_{2j}A_{2j} + (-1)^{3+j}ka_{3j}A_{3j} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n+j}ka_{nj}A_{nj} \\
&= k[(-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}A_{2j} + (-1)^{3+j}a_{3j}A_{3j} \\
&\qquad + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}A_{nj}] \\
&= kD \qquad (21.10)
\end{aligned}
$$

expresión de un determinante como una suma

9. *Si cada elemento de una línea o de una columna de un determinante se puede expresar como la suma de dos números, entonces el determinante puede expresar la suma de dos determinantes.*

Sea

$$
D''' = \begin{vmatrix}
a_{11}\, a_{12}\, a_{13} & \cdots & a_{1j} + b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21}\, a_{22}\, a_{23} & \cdots & a_{2j} + b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31}\, a_{32}\, a_{33} & \cdots & a_{3j} + b_{3j} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} & \cdots & a_{nj} + b_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

De acuerdo con los pasos 1 y 2 del teorema 4, el desarrollo de D''' en términos de los menores de la columna j es

$$
\begin{aligned}
D''' &= (-1)^{1+j}(a_{1j} + b_{1j})A_{1j} + (-1)^{2+j}(a_{2j} + b_{2j})A_{2j} + \\
&\qquad (-1)^{3+j}(a_{3j} + b_{3j})A_{3j} + \cdots + (-1)^{n+j}(a_{nj} + b_{nj})A_{nj} \\
&= [(-1)^{1+j}a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}A_{2j} + (-1)^{3+j}a_{3j}A_{3j} + \\
&\qquad \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}A_{nj}] + [(-1)^{1+j}b_{1j}A_{1j} + \\
&\qquad (-1)^{2+j}b_{2j}A_{2j} + (-1)^{3+j}b_{3j}A_{3j} + \cdots + (-1)^{n+j}b_{nj}A_{nj}] \\
&= \begin{vmatrix}
a_{11}\, a_{12}\, a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21}\, a_{22}\, a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31}\, a_{32}\, a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11}\, a_{12}\, a_{13} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21}\, a_{22}\, a_{23} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31}\, a_{32}\, a_{33} & \cdots & b_{3j} & \cdots & a_{3n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Podemos ahora explicar una propiedad muy importante de los determinantes.

Partiendo del determinante,

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 9 \end{vmatrix}
$$

cuyo valor es -39 formamos un segundo determinante,

$$
D' = \begin{vmatrix} 1 & 3 + 20 & 5 \\ 2 & 6 + 28 & 7 \\ 5 & 2 + 36 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 23 & 5 \\ 2 & 34 & 7 \\ 5 & 38 & 9 \end{vmatrix}
$$

en el cual las columnas primera y tercera son las mismas que en D y la segunda columna se obtiene multiplicando cada elemento de la tercera columna de D por 4 y sumando los productos al elemento correspondiente de la segunda columna. Es interesante comprobar que el valor de D' es -39.

Análogamente,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1+6 & 3+2 & 4+4 \end{vmatrix} = 4$$

donde la tercera línea del segundo determinante se obtiene multiplicando cada elemento de la primera línea del primer determinante por 2 y sumando el producto al elemento correspondiente de la tercera línea.

Estos dos ejemplos ilustran el teorema 10.

teorema sobre determinantes equivalentes

10. *Si cada elemento de una línea o de una columna de un determinante se multiplica por una constante k y el resultado se suma con el correspondiente elemento de otra línea o de otra columna, respectivamente, el valor del determinante no se altera.*

Se desea probar que

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p}+ka_{3j} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De acuerdo con el teorema 9, el determinante colocado a la derecha es igual a la suma del determinante D y el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & ka_{3j} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Según el teorema 8, este último determinante es igual al producto de k por un determinante que contiene dos columnas idénticas. En consecuencia, según el teorema 7, dicho determinante es igual a cero.

21.5 SIMPLIFICACION DE UN DETERMINANTE

El trabajo de desarrollar un determinante se puede reducir considerablemente cuando se emplean las propiedades dadas en el párrafo anterior. Mediante sucesivas aplicaciones del teorema 10 a un determinante, es posible reemplazar por ceros todos los elementos de cualquier línea o de cualquier columna, excepto uno de ellos, sin que estas operaciones

alteren el valor de los determinantes. Se ilustrará el procedimiento que puede seguirse, calculando el valor de un determinante, y se empleará la notación $r_j + kr_i$ para indicar que cada elemento de la línea i se ha multiplicado por k, que el resultado se ha sumado con el correspondiente elemento de la línea j, y que dicha suma se ha empleado como columna j en el nuevo determinante. Al hacer referencia a columnas se empleará una notación análoga.

EJEMPLO Desarrollar

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución: Si se efectúan las operaciones indicadas por $r_2 - r_4$ y por $r_3 - 2r_4$, se tiene

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Ahora, efectuando $r_1 - 1\frac{1}{2}\, r_4$, se tiene

$$\begin{vmatrix} 0 & 3\frac{1}{2} & 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3\frac{1}{2} & 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Efectuando las operaciones $r_2 + r_4$ y $r_3 + 7r_4$, se tiene

$$-2\begin{vmatrix} 3\frac{1}{2} & 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ -14 & 0 & 23 & 35 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(1)\begin{vmatrix} 3\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 8 \\ -14 & 23 & 35 \end{vmatrix}$$
$$= -2(3\tfrac{1}{2})\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 23 & 35 \end{vmatrix} - 2(-14)\begin{vmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= -7(70 - 184) + 28(32 + 1) = 1722$$

EJERCICIO 87: MANIPULACION Y DESARROLLO DE DETERMINANTES

Mediante el uso de las propiedades de los determinantes, y sin efectuar los desarrollos, demuéstrese que son ciertas las proposiciones de los problemas 1 a 8.

1: $\begin{vmatrix} a & d & 2a \\ b & e & 2b \\ c & f & 2c \end{vmatrix} = 0$

2: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

3: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

4: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+e & f+g & h+i \\ e & g & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & h \\ e & g & i \end{vmatrix}$

5: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 8 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

6: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

7: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1x+d_1 & c_2x+d_2 & c_3x+d_3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$

8: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1+k_1a_1 & c_1-3k_2a_1 \\ a_2 & b_2+k_1a_2 & c_2-3k_2a_2 \\ a_3 & b_3+k_1a_3 & c_3-3k_2a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Desarróllense los determinantes de los problemas 9 a 28 de acuerdo con el método del Pr. 21.5.

9: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

10: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

11: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

12: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

13: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

14: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

15: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

16: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

17: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$

18: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

19: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

20: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

21: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

22: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

23: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

24: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

25: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

26: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

27: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

28: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

Sin efectuar los desarrollos de los determinantes, demuéstrese que son ciertas las proposiciones de los problemas 29 a 32.

29: Si $ax + by = 0$, entonces $\begin{vmatrix} a & b \\ -y & x \end{vmatrix} = 0.$

30: Si $ax + by + cz = 0$, entonces $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -y/x & 2 & -y/z \\ -z/x & z/y & 0 \end{vmatrix} = 0.$

31: Si $a = b$, entonces $\begin{vmatrix} a/x & y & c \\ 3 & 0 & 2y \\ b/y & x & cx/y \end{vmatrix} = 0.$

32: Si $a + b = c$, entonces $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & c & b \\ c & -b & a \end{vmatrix} = 0.$

Sin desarrollar los determinantes de los problemas 33 a 40 demuéstrese que cada uno de ellos es igual a cero para el valor indicado de x.
SUGERENCIA: Sustitúyase cada valor indicado en x en el determinante, y luego redúzcase el determinante a otro que tenga dos líneas o dos columnas iguales.

33: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & x \\ 1 & x & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}, x = 2, x = 3$

34: $\begin{vmatrix} 3 & 6 & x \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, x = 2, x = 9$

35: $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & x+1 & 2 \end{vmatrix}, x = 2, x = 3$

36: $\begin{vmatrix} 3 & x+1 & 3 \\ 1 & x-1 & 1 \\ x+1 & 5 & 2 \end{vmatrix}, x = 1, x = 2$

37: $\begin{vmatrix} 1 & 6-x & x \\ 2x & x+1 & x+1 \\ x+2 & 3 & 3 \end{vmatrix}, x = 1, x = 2, x = 3$

38: $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 4 \\ x & 2x & x+3 \\ 2x & 5x-2 & 4x \end{vmatrix}, x = 1, x = 2, x = 3$

39: $\begin{vmatrix} 0 & x & x+1 \\ 2x-4 & x & 3x-3 \\ x-1 & x & 2x \end{vmatrix}, x = 1, x = 2, x = 3$

40: $\begin{vmatrix} x+1 & 3x+1 & 2x+2 \\ x+2 & 3x+2 & 2x+3 \\ x+5 & 5-x & 4 \end{vmatrix}$, $x = -1, x = 1, x = 0$

21.6 SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

En este párrafo se mostrará cómo resolver, mediante el uso de determinantes, un sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con cuatro incógnitas. Sin embargo, el método es general y se puede aplicar, con pequeñas variantes, a cualquier sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas. Cualquier sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con cuatro incógnitas se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1w &= e_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2w &= e_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3w &= e_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4w &= e_4 \end{aligned} \tag{21.11}$$

solución única de un sistema de ecuaciones

Si en cualquier sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con cuatro incógnitas, el determinante D de los coeficientes es diferente de cero, el sistema tiene una solución única. Además, el valor de cada incógnita se puede expresar como un cociente, en el que el divisor es D y el dividendo es el determinante que se obtiene al sustituir en D los coeficientes de la incógnita deseada por los términos constantes de las ecuaciones.

Puesto que al multiplicar por una misma cantidad cada elemento de una línea o de una columna del determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

se multiplica por la misma cantidad el valor de D, se tiene

$$Dx = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4x & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Además, si se multiplican por y los elementos de la columna 2, por z los elementos de la columna 3 y por w los elementos de la columna 4, y si los productos obtenidos se suman a los elementos correspondientes de la primera columna, se obtiene

$$Dx = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + d_1w & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2w & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3w & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4w & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = N_x \tag{21.12}$$

en virtud de que los elementos de la primera columna del primero de esos dos determinantes son iguales a los términos del miembro de la izquierda de (21.11) y, en consecuencia, iguales a los términos constantes. Por tanto, si $D \neq 0$, se tiene $x = \dfrac{N_x}{D}$. Los valores de y, de z o de w se pueden obtener de manera análoga. Por tanto, se puede obtener un conjunto único de valores para las incógnitas de (21.11).

Se demostrará ahora que este conjunto de valores satisface al sistema de ecuaciones dado. Si se traspone el miembro de la izquierda de la primera ecuación del sistema, y se sustituyen x, y, z, y, w por N_x/D, N_y/D, N_z/D y N_w/D, y si se multiplica luego por D, se obtiene

$$e_1D - a_1N_x - b_1N_y - c_1N_z - d_1N_w$$

Se puede ver rápidamente que esta expresión es igual a

$$\begin{vmatrix} e_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ e_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ e_3 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ e_4 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = D'$$

Fácilmente puede verse que esa expresión es igual a D', si D' se desarrolla en términos de los elementos de la primera línea. El lector debe observar que las columnas primera y segunda de N_y están intercambiadas en el desarrollo por menores; por tanto, $-b_1N_y$ aparece en vez de b_1N_y en la expresión antes considerada. El signo negativo que precede a d_1N_w se puede interpretar de la misma manera. Además, $D' = 0$, puesto que contiene dos líneas idénticas. Por tanto, el conjunto único de valores de las incógnitas satisface la primera ecuación del sistema. De manera análoga se puede demostrar que satisface también a las otras tres ecuaciones del sistema.

EJEMPLO Resolver mediante el uso de determinantes el sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 2 \\ 2x - y + 2z - w &= -5 \\ 3x + 2y + 3z + 4w &= 7 \\ x - 2y - 3z + 2w &= 5 \end{aligned}$$

Solución: El determinante de los coeficientes es

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

en donde la igualdad se obtiene al efectuar $r_2 + r_1$.

Efectuando la operación $c_3 - c_1$, se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

en donde la igualdad se obtiene al desarrollar en términos de los elementos de la segunda línea. Desarrollando ahora en términos de los elementos de la segunda columna, se tiene

$$D = -(-4)(-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -24$$

Si se calcula el valor de

$$N_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

se obtienen $N_x = 0$. Por tanto,

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{0}{-24} = 0$$

Si este valor de x se sustituye en tres cualquiera de las ecuaciones dadas, se obtiene un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, y, z, w. Si se resuelve este sistema por cualquiera de los métodos dados en el capítulo 6, se obtiene la solución $y = 1$, $z = -1$ y $w = 2$.

Como se indicó anteriormente, el método empleado para resolver este sistema de ecuaciones es general y se puede aplicar con pequeñas variantes, a un sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas.

EJERCICIO 88: SOLUCION DE ECUACIONES MEDIANTE DETERMINANTES

Resuélvanse los sistemas de ecuaciones de los problemas 1 a 24 por medio de determinantes.

1: $\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ 3x - 2y &= -1 \end{aligned}$

2: $\begin{aligned} 3x - 4y &= 1 \\ 2x - 3y &= 0 \end{aligned}$

3: $\begin{aligned} 5x - 2y &= 4 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$

4: $\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ x + y &= 6 \end{aligned}$

5: $\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \\ x - 3y + z &= -2 \end{aligned}$

6: $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ 2x - 3y + 2z &= 3 \\ 2x + 4y - z &= 2 \end{aligned}$

7: $\begin{aligned} 2x + 2y - 5z &= 7 \\ 3x - 3y + 6z &= 9 \\ x + y - 2z &= 3 \end{aligned}$

8: $\begin{aligned} x - y + z &= -1 \\ 3x + 3y + 4z &= 6 \\ 2x - 4y + 2z &= -6 \end{aligned}$

9: $\begin{aligned} 3x + 2y &= 2 \\ 6x - z &= 1 \\ 4y - 2z &= 0 \end{aligned}$

10: $\begin{aligned} 3x + 4y &= -1 \\ 6x + 2z &= -3 \\ 2y + z &= 1 \end{aligned}$

11: $\begin{aligned} 4x - 3y &= 4 \\ 2x + z &= 1 \\ 6y - 6z &= 1 \end{aligned}$

12: $\begin{aligned} 4x - 3y &= -1 \\ 2x + z &= 1 \\ 6y + 2z &= 2 \end{aligned}$

13: $$\begin{aligned} x + y - z - 2w &= -2 \\ x + y - 2z - w &= 2 \\ x + 2y - z - 2w &= -3 \\ x + y - z - w &= 0 \end{aligned}$$

14: $$\begin{aligned} x - y + z - w &= 3 \\ x + y - z + w &= 1 \\ x - y + z + w &= 5 \\ x + y + z + w &= 1 \end{aligned}$$

15: $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2y - 2z - w &= -7 \\ x + y - z &= -3 \\ x + z + w &= 2 \end{aligned}$$

16: $$\begin{aligned} 2x + y - z &= -1 \\ 2y + z - w &= 7 \\ 2x - z &= -3 \\ 2y - w &= 6 \end{aligned}$$

17: $$\begin{aligned} x + 3y - z + 2w &= -4 \\ 2x - y - 3z + 2w &= -1 \\ x - 2y - z + 3w &= 8 \\ x + y - z + 3w &= 2 \end{aligned}$$

18: $$\begin{aligned} 2x + y - 2z + 3w &= 22 \\ 3x + y - 2z - 3w &= -16 \\ x + y - 2z + w &= 4 \\ 2x - y + z - w &= 6 \end{aligned}$$

19: $$\begin{aligned} x + 2y - 3z - w &= -1 \\ x - 3y - 3z + w &= 3 \\ x + 3y - 3z - 2w &= 0 \\ x - y - z + w &= 1 \end{aligned}$$

20: $$\begin{aligned} 2x + y - 3z + w &= -8 \\ 4x + y - 6z + 2w &= -17 \\ 6x + y + z + 3w &= 4 \\ 6x + 2y - 6z + 2w &= -12 \end{aligned}$$

21: $$\begin{aligned} x + y + z &= 2a \\ x - y &= 2a \\ x - z &= -a \end{aligned}$$

22: $$\begin{aligned} bx + ay - z &= ab \\ bx + by - z &= b^2 \\ ax - ay + z &= a^2 \end{aligned}$$

23: $$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x - y + z + w &= 2b \\ x - z + w &= -b \\ x - w &= 2a \end{aligned}$$

24: $$\begin{aligned} x + y + z - w &= -2b \\ x - y &= 2a \\ x + y - 2z + 2w &= 4b \\ x + y - 2z &= 2b \end{aligned}$$

25: Resuélvase para x

$$\begin{aligned} x + y + z + v + w &= -3 \\ x + y + v &= -2 \\ x + z + w &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ y + z - v &= 3 \end{aligned}$$

26: Resuélvase para y

$$\begin{aligned} x + 2v + w &= 1 \\ 2x + y + 4v + 2w &= 0 \\ x + 2v + 3w &= 7 \\ x + 2y + 3v + w &= -5 \\ x + 2y + 2z + v + w &= -1 \end{aligned}$$

27: Resuélvase para z

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z - 3v + w &= 4 \\ 3x + y - z - 3v + w &= -3 \\ x + 2y - 3z - 6v + 2w &= -13 \\ 4x + 3y + 2z - 9v + 2w &= -7 \\ x + y - z - 2v + w &= -3 \end{aligned}$$

28: Resuélvase para y

$$\begin{aligned} 2x + v &= 3 \\ x + 2y &= 4 \\ y + 2v &= -1 \\ z + 2w &= -1 \\ x - y - 2z + v - 2w &= -2 \end{aligned}$$

21.7 SISTEMAS DE ECUACIONES HOMOGENEAS DE PRIMER GRADO

Una ecuación de primer grado se llama *homogénea* si no contiene el término constante. Por ejemplo, $2x - 3y + 4z + 2w = 0$ es una ecuación homogénea.

De acuerdo con la definición anterior, el sistema (21.11) es homogéneo si $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0$. En el Pr. 21.6 se demostró que si x' y', z' y w' son soluciones de (21.11), entonces

$$Dx' = N_x \qquad Dy' = N_y \qquad Dz' = N_z \qquad \text{and} \qquad Dw' = N_w \tag{21.13}$$

en donde D es el determinante de los coeficientes del sistema (21.11). Si el sistema homogéneo, $N_x = N_y = N_z = N_w = 0$, ya que cada uno de estos determinantes contiene una columna de ceros. Por tanto, si $D \neq 0$, se obtiene $x' = y' = z' = w' = 0$ como solución del sistema. Esta solución se conoce como la solución *trivial.*

solución trivial

Ahora se discutirán las condiciones bajo las cuales un sistema de ecuaciones homogéneas posee soluciones distintas de la solución trivial, es decir, soluciones en las cuales x', y', z' y w' no son todas iguales a cero. Por ejemplo, si $x' \neq 0$, la primera ecuación de (21.13) se convierte en $Dx' = 0$. Sin embargo, ya que $x' \neq 0$, se concluye que $D = 0$. Por tanto, si un sistema de ecuaciones homogéneas de primer grado posee soluciones diferentes de la trivial es necesario que $D = 0$.

rango de un determinante

Será necesario utilizar el concepto de *rango de un determinante* en los próximos razonamientos, por lo cual se dará ahora su definición. Si uno de los menores de orden r de un determinante de orden n es diferente de cero y todos los menores de orden mayor que r son iguales a cero, entonces se dice que el determinante es de *rango r*.

Puede demostrarse que si el determinante de los coeficientes de un sistema de n ecuaciones homogéneas de primer grado con n incógnitas es de rango r, entonces r de las ecuaciones pueden resolverse para r incógnitas en términos de las otras $n - r$ incógnitas y que estos r valores satisfacen a las $n - r$ ecuaciones restantes. Se demostrará que esto es válido para el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned} \tag{21.14}$$

primeramente, si el determinante de los coeficientes es de rango 2, y en segundo lugar, si el determinante de los coeficientes es de rango 1.

Para demostrar la primera parte se supondrá que

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{and} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{21.15}$$

y se demostrará que las primeras dos ecuaciones de (21.14) pueden resolverse para x y y en términos de z y que estas soluciones satisfacen la tercera ecuación.

Primeramente, se transponen los terceros términos de las primeras dos ecuaciones de (21.14), obteniéndose

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= -c_1z \\ a_2x + b_2y &= -c_2z \end{aligned}$$

Si se resuelven estas ecuaciones para x y y mediante el método del Pr. 21.6, se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{21.16}$$

En seguida se sustituyen estos valores en el miembro izquierdo de la tercera ecuación de (21.14), y se obtiene

$$a_3 \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z - b_3 \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z + c_3 z$$

$$= \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \left[a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right]$$

La expresión dentro del paréntesis rectangular es igual a cero, ya que es igual al desarrollo de D en términos de los menores de la tercera línea. Por tanto, los valores (21.16) satisfacen a la tercera ecuación. Esto completa la prueba para el caso en que D tiene el rango $r = 2$.

Para terminar este análisis se supondrá ahora que el determinante D es de rango 1 y que $a_1 \neq 0$, y primeramente se demostrará que

$$x = \frac{-b_1 y}{a_1} - \frac{c_1 z}{a_1} \tag{21.17}$$

que es el resultado de resolver para x la primera ecuación de (21.14), satisface a la segunda ecuación. Si se sustituye este valor de x en el miembro derecho de la segunda ecuación de (21.14), se obtiene

$$a_2\left(\frac{-b_1 y}{a_1} - \frac{c_1 z}{a_1}\right) + b_2 y + c_2 z = \frac{1}{a_1}\left[(-a_2 b_1 + a_1 b_2) y + (-a_2 c_1 + a_1 c_2) z\right]$$

$$= \frac{1}{a_1}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z\right)$$

Sin embargo, ya que cada uno de los determinantes inmediatamente anteriores es un menor de segundo orden de D, cada uno de ellos es igual a cero por hipótesis. Por tanto, el valor de x de (21.17) satisface la ecuación. Por un argumento similar se puede demostrar que (21.17) también satisface a la tercera ecuación de (21.14).

La discusión anterior demuestra un caso especial del siguiente teorema: *un sistema de n ecuaciones homogéneas de primer grado con n incógnitas posee una solución en la que los valores de las incógnitas no son todos iguales a cero, sí y sólo si, el determinante de los coeficientes es cero; además, si el determinante de los coeficientes es de rango r, entonces r de las ecuaciones pueden seleccionarse y resolverse para r de las incógnitas en términos de las otras n — r incógnitas, y estos valores satisfarán a las n — r ecuaciones restantes.*

solución de n ecuaciones homogéneas

EJEMPLO 1 Demuéstrese que existen soluciones no triviales para el siguiente sistema de ecuaciones homogéneas de primer grado y obténganse dos de ellas.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= 0 \\ 2x + y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

Solución: En este caso el determinante de los coeficientes es

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -54 + 8 + 4 + 24 + 6 + 12 = 0$$

Además, el menor

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 = -7 \neq 0.$$

Ya que este menor es el determinante de los coeficientes de x y y de las primeras dos ecuaciones, es posible resolver estas dos ecuaciones para x y y en términos de z y obtener

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} z = -\frac{16z}{7} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} z = -\frac{10z}{7}$$

Si se sustituyen estos valores de x y y en la tercera ecuación, se obtiene

$$2\left(-\frac{16z}{7}\right) + \left(-\frac{10z}{7}\right) + 6z = -\frac{42z}{7} + 6z = 0$$

Por tanto, $x = -\frac{16z}{7}$, $y = -\frac{-10z}{7} = z$ es una solución del sistema.
Es posible obtener tantas soluciones numéricas como se deseen mediante la asignación de valores a z. Por ejemplo, si $z = 7$, entonces $x = -16$ y $y = -10$, y si $z = -14$, entonces $x = 32$ y $y = 20$.

21.8 SISTEMAS DE m ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON n INCOGNITAS $m < n$

Un sistema de m ecuaciones de primer grado con n incógnitas, siendo $m < n$, generalmente puede resolverse para m de las incógnitas en términos de las otras $n - m$ incógnitas. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + x + 3w &= 2 \\ 2x + y - 3z + 4w &= 3 \\ 4x - 3y + 2z - w &= -2 \end{aligned}$$

puede resolverse para x, y y z en términos de w mediante la transposición de los términos que contienen w. De este modo se obtiene

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 2 - 3w \\ 2x + y - 3z &= 3 - 4w \\ 4x - 3y + 2z &= -2 + w \end{aligned}$$

El determinante de los coeficientes es

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 15$$

Por tanto, por el método del Pr. 21.6 y el teorema 9 del Pr. 21.4, se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-3w & -2 & 1 \\ 3-4w & 1 & -3 \\ -2+w & -3 & 2 \end{vmatrix}}{15} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{15} + \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} w}{15}$$

$$= \frac{-21 + 22w}{15}$$

Análogamente se obtienen

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-3w & 1 \\ 2 & 3-4w & -3 \\ 4 & -2+w & 2 \end{vmatrix}}{15} = \frac{61w - 48}{15}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2-3w \\ 2 & 1 & 3-4w \\ 4 & -3 & -2+w \end{vmatrix}}{15} = \frac{55w - 45}{15}$$

Por tanto,

$$x = \frac{22w - 21}{15}, \qquad y = \frac{61w - 48}{15}, \qquad z = \frac{55w - 45}{15}, \qquad w = w$$

producirán soluciones para el sistema de ecuaciones para cada valor que se asigne a w. Por ejemplo, para $w = 0$ y $w = 1$ se obtienen las dos soluciones siguientes: $x = -\frac{7}{5}$ $y = -\frac{16}{5}$, $z = -3$, $w = 0$, y $x = \frac{1}{15}$ $y = \frac{13}{15}$, $z = \frac{2}{3}$, $w = 1$.

EJEMPLO 1 Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z - 2w &= 3 \\ x + 4y - z + 3w &= 7 \end{aligned}$$

para dos cualesquiera de las variables en términos de las otras dos.

Solución: Ya que el determinante de los coeficientes de x y y es igual a 14, es posible resolver el sistema para x y y en términos de x y w, como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 3 - 4z + 2w \\ x + 4y &= 7 + z - 3w \end{aligned} \qquad \textit{se han transpuesto los términos que contienen } z \textit{ y } w.$$

Por el método del Pr. 21.6 se obtiene

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - 4z + 2w & -2 \\ 7 + z - 3w & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{26 - 14z + 2w}{14} = \frac{13 - 7z + w}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 - 4z + 2w \\ 1 & 7 + z - 3w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{18 + 7z - 11w}{14}$$

Por tanto, la solución es

$$x = \frac{13 - 7z + w}{7}, \; y = \frac{18 + 7z - 11w}{14}, \; z = z, \; w = w$$

EJEMPLO 2 Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 9y + z &= 2 \\ 2x - 6y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

para dos de las incógnitas en términos de la tercera.

Solución: Primeramente se observa que el determinante de los coeficientes de x y y es

$$\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0$$

Por tanto, no es posible resolver este sistema para x y y en términos de z. Sin embargo, el determinante de los coeficientes de y y z es

$$\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -27 + 6 = -21$$

Por tanto, se puede proceder como sigue:

$$\begin{aligned} -9y + z &= 2 - 3x \\ -6y + 3z &= 6 - 2x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\textit{se han transpuesto los términos} \\ &\textit{que contienen } x. \end{aligned}$$

Entonces, por el método del Pr. 21.6

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 - 3x & 1 \\ 6 - 2x & 3 \end{vmatrix}}{-21} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} x}{-21} = \frac{0 - 7x}{-21} = \frac{x}{3}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\begin{vmatrix} -9 & 2 - 3x \\ -6 & 6 - 2x \end{vmatrix}}{-21} = \frac{\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -9 & -3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} x}{-21} \\ &= \frac{(-54 + 12) + (18 - 18)x}{-21} \\ &= \frac{42}{21} = 2 \end{aligned}$$

por tanto, la solución es $x = x$, $y = x/3$, $z = 2$.

21.9 SISTEMA DE m ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON n INCOGNITAS $m > n$

Un sistema de ecuaciones de primer grado que contiene más ecuaciones que incógnitas por lo general no se puede resolver. Sin embargo, en al-

gunos casos existe una solución. Dadas m ecuaciones de primer grado con n incógnitas, siendo $m > n$, se seleccionan arbitrariamente n de las ecuaciones, y, si son consistentes, se resuelven para las n incógnitas. Si el conjunto de valores obtenido no satisface a alguna de las $m - n$ ecuaciones restantes, entonces el sistema no tiene solución. Sin embargo, si el conjunto de valores obtenido satisface a todas las $m - n$ ecuaciones restantes, entonces dicho conjunto de valores es la solución del sistema. Por supuesto, si ningún conjunto de n de las ecuaciones es consistente, no existe solución. Se ilustrará el presente caso con dos ejemplos.

EJEMPLO 1 Obténgase una solución del sistema siguiente, si es que tienen soluciones.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -9 \\ 4x - y - 2z &= 3 \\ 3x + 4y - z &= -1 \\ 2x - y + z &= 5 \end{aligned}$$

Solución: Puede verificarse fácilmente que el determinante de los coeficientes de las primeras tres ecuaciones es igual a -52. Por tanto, se pueden resolver estas ecuaciones por el método del Pr. 21.6, obteniéndose $x = 2$ $y = -1$, $z = 3$. Sin embargo, cuando estos valores se sustituyen en el miembro izquierdo de la cuarta ecuación se obtiene

$$2\,(2) - (-1) + 3 = 4 + 1 + 3 = 8$$

Por tanto, ya que el miembro derecho de la ecuación es 5, los valores encontrados no satisfacen la ecuación y, en consecuencia, el sistema no tiene solución.

EJEMPLO 2 Obténgase una solución del sistema siguiente, si es que tienen solución.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 12 \\ 2x + y &= 1 \\ 5x + 2y &= 4 \\ 4x - 3y &= 17 \end{aligned}$$

Solución: Las dos primeras ecuaciones son consistentes, ya que el determinante de los coeficientes es igual a 7 y, según el método del Pr. 21.6, la solución es $x = 2$ y $y = -3$. Sustituyendo estos valores en los miembros izquierdos de las ecuaciones tercera y cuarta, se obtiene $10 - 6 = 4$ para la tercera ecuación y $8 + 9 = 17$ para la cuarta. Por tanto, $x = 2$ y $y = -3$ es solución del sistema.

EJERCICIO 89: SISTEMAS DE ECUACIONES HOMOGENEAS Y SISTEMAS DE m ECUACIONES CON n INCOGNITAS

Pruébese si los sistemas de ecuaciones de los problemas 1 a 8 poseen soluciones no triviales. En caso afirmativo encuéntrese una de ellas.

1: $$\begin{aligned} 3x + 5y - 2z &= 0 \\ x - 3y - 3z &= 0 \\ 5x + y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

2: $$\begin{aligned} 2x - 3y - z &= 0 \\ x - 5y + 3z &= 0 \\ 3x + 7y - 13z &= 0 \end{aligned}$$

3: $$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 4y - 2z &= 0 \\ 5x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

4: $$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 0 \\ 5x + 7y - 2z &= 0 \\ 3x - y - 9z &= 0 \end{aligned}$$

5: $\begin{aligned} x + y + z - 3w &= 0 \\ x - y - 2z + 2w &= 0 \\ x - 3y - z - w &= 0 \\ x + 5y + 2z - 3w &= 0 \end{aligned}$

6: $\begin{aligned} x + y - 2z + w &= 0 \\ 2x + 3y - 4z + 2w &= 0 \\ 3x - y - 6z - 3w &= 0 \\ 5x + 2y - 3z - w &= 0 \end{aligned}$

7: $\begin{aligned} x - y + z - w &= 0 \\ 2x + 3y + z - 6w &= 0 \\ 3x + 2y - 4z - w &= 0 \\ x + y - 3z + w &= 0 \end{aligned}$

8: $\begin{aligned} x + 2y - z - 2w &= 0 \\ 2x - 2y + z - w &= 0 \\ x + 3y - 2z - w &= 0 \\ x - y + 2z - 5w &= 0 \end{aligned}$

Encuéntrense dos juegos de soluciones numéricas para cada sistema de ecuaciones dado en los problemas 9 a 16 y compruébese cada solución.

9: $\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= -4 \\ 4x - 2y + z &= 3 \end{aligned}$

10: $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 16 \\ 4x - y - 2z &= 6 \end{aligned}$

11: $\begin{aligned} x + 2y - 3z - w &= -8 \\ 2x - y + 4z + 4w &= 8 \end{aligned}$

12: $\begin{aligned} x - y + 4z + 2w &= -7 \\ 2x - 3y + z - 5w &= 9 \end{aligned}$

13: $\begin{aligned} x - 6y + 3z + 2w &= 0 \\ 4x - 5y + 2z + 3w &= 4 \\ 2x + y - 4z - w &= -2 \end{aligned}$

14: $\begin{aligned} 3x - 2y + z - 4w &= 2 \\ 5x + 3y - 4z + w &= -1 \\ 2x + 4y - 3z + w &= -4 \end{aligned}$

15: $\begin{aligned} 4x + 6y - 2z + w - 3v &= -3 \\ x - 2y + 4z - 2w + v &= 4 \\ 2x + 5y - 3z + 2w - 4v &= -6 \end{aligned}$

16: $\begin{aligned} 4x - 3y - z + 2w + 4v &= 1 \\ 2x - y + 2z + 3w + 5v &= -4 \\ 3x + 5y + 3z - w + v &= -2 \end{aligned}$

Encuéntrese la solución de los sistemas de ecuaciones de los problemas 17 a 24, si es que tienen solución.

17: $\begin{aligned} x - 4y &= -14 \\ 3x + y &= -3 \\ 5x + 2y &= -4 \end{aligned}$

18: $\begin{aligned} 5x + 3y &= 5 \\ 2x + y &= 3 \\ 4x + 5y &= -9 \end{aligned}$

19: $\begin{aligned} 3x - 7y &= 2 \\ 4x + 3y &= 15 \\ 5x - 9y &= 3 \end{aligned}$

20: $\begin{aligned} 2x - 5y &= 25 \\ 3x + 5y &= 0 \\ x - 5y &= 16 \end{aligned}$

21: $\begin{aligned} 4x - 2y + z &= 13 \\ 3x + 5y + 2z &= 7 \\ 2x + 7y + 3z &= 6 \\ x + 5y - 3z &= -12 \end{aligned}$

22: $\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \\ 5x - 3y + z &= 3 \\ x + 2y - 4z &= -1 \\ x - y + z &= 3 \end{aligned}$

23: $\begin{aligned} 3x + 4y + z &= 3 \\ 2x + y - 2z &= -1 \\ 4x + 5y - z &= -2 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}$

24: $\begin{aligned} x + 2y - z &= -6 \\ 3x - y - 2z &= -1 \\ x + y + z &= 2 \\ 4x + 2y - z &= 3 \end{aligned}$

22 FRACCIONES PARCIALES

EN EL TRABAJO con fracciones se ha explicado hasta ahora la combinación de dos o más de ellas por medio de las cuatro operaciones fundamentales del álgebra. Pero a veces, especialmente en el cálculo integral, se hace necesario expresar una fracción como la suma de otras dos o más, de forma más sencilla que la fracción original. Las fracciones que se obtienen de esa manera se llaman fracciones parciales. En este capítulo se estudiará el problema de expresar una fracción dada como la suma de fracciones parciales.

22.1 DEFINICIONES Y TEOREMAS

Una fracción racional es el cociente de dos polinomios. En este capítulo se tratará exclusivamente de fracciones de esta clase y se desarrollarán métodos que se aplican solamente a las fracciones propias, esto es, a aquellas en las cuales el numerador es de grado inferior que el denominador.

Según el corolario en Pr. 12.13 se puede expresar cualquier polinomio como producto de potencias enteras de factores de primer grado y de segundo grado, siendo irreductibles estas últimas. En consecuencia, toda fracción racional pertenece a alguno de los cuatro casos siguientes:

1. Todos los factores del denominador son de primer grado y ninguno de ellos se encuentra repetido.

2. Todos los factores del denominador son de primer grado y algunos de ellos se encuentran repetidos.

3. El denominador contiene factores irreductibles de segundo grado, ninguno de los cuales se encuentra repetido.

4. El denominador contiene factores irreductibles de segundo grado, algunos de los cuales se encuentran repetidos.

En los cuatro párrafos siguientes se hará uso del teorema que se enuncia a continuación. No se da su demostración porque se halla más allá del alcance de este libro.

Si una fracción racional propia reducida a su mínima expresión se expresa como la suma de fracciones parciales, entonces

I. *A todo factor* $ax + b$ *del denominador, que no aparezca repetido, corresponde una fracción parcial* $A/(ax + b)$, *en donde* A *es una constante.*

II. *A todo factor* $(ax + b)^k$ *del denominador corresponden las fracciones parciales*

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$$

en donde $A_1A_2 \ldots, A_k$ *son constantes.*

teorema sobre fracciones parciales

III. *A todo factor irreductible de segundo grado* $ax^2 + bx + c$ *del denominador, que no aparezca repetido, corresponde la fracción parcial* $(Ax + B)/(ax^2 + bx + c)$, *en donde* A *y* B *son constantes.*

IV. *Si* $ax^2 + b + c$ *es irreductible, entonces a todo factor* $(ax^2 + bx + c)^k$ *del denominador corresponden las fracciones parciales.*

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_k$ *son constantes.*

22.2 FACTORES DE PRIMER GRADO DISTINTOS

El método que debe aplicarse en este caso se ilustrará con el ejemplo siguiente:

EJEMPLO Separar en fracciones parciales

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x + 2)(3x + 1)(x + 3)}$$

Solución: Primer método. Cada factor del denominador de (1) es de primer grado y aparece una vez solamente. Por tanto, según (I) del teorema 1 las fracciones parciales son,

$$\frac{A}{x + 2} \qquad \frac{B}{3x + 1} \qquad \frac{C}{x + 3}$$

Así se tiene

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x + 2)(3x + 1)(x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{3x + 1} + \frac{C}{x + 3} \tag{2}$$

en donde A, B y C deben ser determinadas de tal modo que (2) se satisfaga para

todo valor de x, excepto posiblemente para aquellos valores que anulen alguno de los denominadores.
Después de eliminar los denominadores en (2) se tiene

$$2x^2 + x + 1 = A(3x + 1)(x + 3) + B(x + 2)(x + 3) + C(x + 2)(3x + 1) \quad (3)$$

Efectuando la multiplicación indicada y sumando los términos en (3) se tiene

$$2x^2 + x + 1 = x^2(3A + B + 3C) + x(10A + 5B + 7C) + (3A + 6B + 2C) \quad (4)$$

Si A, B y C se determinan de tal modo que

$$\begin{aligned} 3A + B + 3C &= 2 \\ 10A + 5B + 7C &= 1 \\ 3A + 6B + 2C &= 1 \end{aligned}$$

entonces, los dos miembros de (3) son idénticos y, por tanto, la ecuación se satisface para todo valor de x. En consecuencia, para los valores de A, B y C determinados de esa manera, (2) es válida para todo valor de x con la posible excepción de aquellos valores que anulan algún denominador.

Se puede resolver este sistema de tres ecuaciones de primer grado en A, B y C por cualquiera de los métodos expuestos en el capítulo 6 y obtener $A = -\frac{7}{5}$, $B = \frac{1}{5}$, $C = 2$. Por tanto,

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x + 2)(3x + 1)(x + 3)} = \frac{-7}{5(x + 2)} + \frac{1}{5(3x + 1)} + \frac{2}{x + 3} \quad (5)$$

Segundo método. Se presentará a continuación un segundo método para determinar A, B y C de tal manera que los dos miembros de (2) sean iguales para todos los valores de x, excepto posiblemente para $x = -2$, $x = -3$, $x = -\frac{1}{3}$, para los cuales se anule alguno de los denominadores. Si los miembros de (2) son iguales para todos los valores de x, con la posible excepción de los tres valores antes mencionados, entonces, según el teorema en el Pr. 12.17, los miembros de (4) son iguales para todos los valores de x, inclusive esos tres. Puesto que los miembros de la derecha de (3) y de (4) son dos formas del mismo polinomio, los dos miembros de (3) son iguales para todos los valores de x.

Si se hace $x = -2$, los coeficientes de B y C en (3) se anulan y se tiene

$$\begin{aligned} 8 - 2 + 1 &= A(-5)(1) \\ -5A &= 7 && \textit{combinando y trasponiendo} \\ A &= -\tfrac{7}{5} && \textit{resolviendo para } A \end{aligned}$$

Análogamente, cuando $x = -\frac{1}{8}$ (3) se convierte en

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{3} + 1 &= B(\tfrac{5}{3})(\tfrac{8}{3}) \\ 2 - 3 + 9 &= 40B \\ 40B &= 8 && \textit{eliminando denominadores,} \\ B &= \tfrac{1}{5} && \textit{resolviendo para } B \end{aligned}$$

Por último, si se hace $x = -3$ se tiene

$$\begin{aligned} 18 - 3 + 1 &= C(-1)(-8) \\ 8C &= 16 && \textit{combinando términos y transponiendo} \\ C &= 2 && \textit{resolviendo para } C. \end{aligned}$$

De donde, se tiene (5)

El uso del segundo método para resolver este caso 1, evita tener que resolver el sistema de ecuaciones (5) y se ahorra así tiempo y trabajo. Puede emplearse con ventaja en otros casos, particularmente cuando un factor de primer grado aparece en el denominador.

EJERCICIO 90: DESCOMPOSICION DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES; CASO I

Descompónganse las siguientes fracciones en fracciones parciales.

1: $\dfrac{2}{(x-1)(3x-2)}$

2: $\dfrac{9}{(2x+3)(x+3)}$

3: $\dfrac{1}{(3x+7)(2x+5)}$

4: $\dfrac{-7}{(3x-2)(4x-5)}$

5: $\dfrac{7x}{(2x+1)(x-3)}$

6: $\dfrac{-8x}{(3x+5)(x+3)}$

7: $\dfrac{3x}{(5x-8)(3x-4)}$

8: $\dfrac{14x}{(4x-9)(x+3)}$

9: $\dfrac{x-8}{(x-3)(x-4)}$

10: $\dfrac{6x+9}{(2x-5)(2x-1)}$

11: $\dfrac{15-7x}{(3x-7)(2x-5)}$

12: $\dfrac{x-7}{(5x-3)(13x-11)}$

13: $\dfrac{-4x-23}{(2x+1)(x+2)(x-3)}$

14: $\dfrac{61x-1}{(3x-2)(x+5)(2x+1)}$

15: $\dfrac{14x-106}{(x+1)(3x-5)(2x+7)}$

16: $\dfrac{-73x-77}{(2x+3)(x-5)(3x+2)}$

17: $\dfrac{6x^2-4x+31}{(2x-3)(x+4)(3x-1)}$

18: $\dfrac{-2x^2-22x-24}{(x+6)(2x+3)(x+2)}$

19: $\dfrac{-4x^2-25x+41}{(x+4)(4x-5)(2x-3)}$

20: $\dfrac{x^2+62x-114}{(x-5)(2x+7)(3x-2)}$

21:* $\dfrac{3x^2-9x-20}{x^2-2x-3}$

22: $\dfrac{2x^2-9x-44}{2x^2-7x-15}$

23: $\dfrac{6x^3-7x^2-16x+27}{6x^2-7x-5}$

24: $\dfrac{45x^3-42x^2+20x-1}{15x^2-14x+3}$

22.3 FACTORES DE PRIMER GRADO REPETIDOS

Si el denominador de una fracción en su forma factorizada contiene solamente factores de primer grado, pero uno o más de ellos se encuentran repetidos, se emplea el método ilustrado en el ejemplo que sigue para expresar la fracción como la suma de fracciones parciales.

EJEMPLO Descomponer la siguiente fracción en fracciones parciales.

$$\frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2}$$

* Si el grado del numerador es igual o mayor que el grado del denominador, divídase el numerador entre el denominador y continúese la división hasta que se obtenga un residuo R de grado menor que el denominador. Después exprésese la fracción en la forma

$$\frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}} = \text{cociente} + \frac{\text{R}}{\text{Denominador}}$$

Solución: Primer método. De acuerdo con (I), teorema 1, se debe tener la fracción parcial $A/(x-1)$ correspondiente al factor $x-1$ del denominador, y de acuerdo con (II) del mismo teorema, se deben tener también las fracciones parciales $B/(x+2)$ y $C/(x+2)^2$ correspondientes al factor $(x+2)^2$. Por tanto, se tiene

$$\frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} \tag{1}$$

y se deben encontrar los valores A, B y C tales que los miembros de (1) sean iguales para todos los valores de x, con excepción posible de $x=1$ y $x=-2$. El primer paso en este proceso es eliminar los denominadores en (1). De esa manera se obtiene

$$3x^2+5x+1 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) \tag{2}$$
$$3x^2+5x+1 = (A+B)x^2 + (4A+B+C)x + (4A-2B-C) \tag{3}$$

Los miembros de (3) serán iguales para todos los valores de x si A, B, C, quedan determinados de tal modo que los coeficientes de potencias iguales de x, en los miembros de la izquierda y de la derecha, sean iguales. Igualando los coeficientes de x^2, x y de los dos términos constantes se obtiene el siguiente sistema de tres ecuaciones de primer grado en A, B y C.

$$\begin{aligned} A+B &= 3 \\ 4A+B+C &= 5 \\ 4A-2B-C &= 1 \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $A=1$, $B=2$, y $C=-1$. Por tanto,

$$\frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

Según método. Este método para la valuación de A, B y C es similar al segundo método del caso I. Si los miembros de (2) son iguales para todos los valores de x, con posible excepción de $x=1$ y $x=-2$, entonces, de acuerdo con el teorema del Pr. 12.1, los miembros son iguales para todos los valores de x.

Si en la Ec. (2) se hace $x=1$, los coeficientes de B y de C se anulan y se tiene

$$\begin{aligned} 3+5+1 &= A(3)^2 \\ 9A &= 9 && \textit{realizando operaciones y transponiendo} \\ A &= 1 && \textit{resolviendo para } A. \end{aligned}$$

Si $x=-2$, los coeficientes de A y de B en (2) se anulan, y se tiene

$$\begin{aligned} 12-10+1 &= C(-2-1) \\ -3C &= 3 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Puesto que no existe ningún valor de x para el cual los coeficientes de A y de C se anulen simultáneamente en (2), se debe recurrir a otro procedimiento para valuar B. Puesto que los miembros de (2) se satisfacen para todos los valores de x, se puede sustituir cualquier valor adecuado de esta variable en (2) al mismo tiempo que los anteriores valores de A y de C, obteniéndose así una ecuación que contiene sólo a B. Si $x=0$ $A=1$, y $C=-1$, la ec. (2) queda

$$
\begin{aligned}
1 &= (1)(4) + B(-1)(2) + (-1)(-1) \\
1 &= 5 - 2B \\
2B &= 4 \\
B &= 2
\end{aligned}
$$

EJERCICIO 91: DESCOMPOSICION DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES; CASO II

Descompónganse las siguientes fracciones en fracciones parciales.

1: $\dfrac{2x+5}{(x+1)^2}$

2: $\dfrac{-2x+11}{(x-4)^2}$

3: $\dfrac{3x+1}{(3x-1)^2}$

4: $\dfrac{-6x-11}{(2x+5)^2}$

5: $\dfrac{-4x^2-5x+1}{(x+1)^3}$

6: $\dfrac{-16x^2+54x-40}{(2x-3)^3}$

7: $\dfrac{27x^2+21x+8}{(3x+2)^3}$

8: $\dfrac{20x^2-144x+265}{(2x-7)^3}$

9: $\dfrac{-8x^2+35x+9}{(2x-1)(x-4)^2}$

10: $\dfrac{12x^2-9x+20}{(2x+3)(3x-1)^2}$

11: $\dfrac{-22x^2+32x+138}{(5x+2)(2x-7)^2}$

12: $\dfrac{24x^2-94x+88}{(2x-3)(3x-5)^2}$

13: $\dfrac{-14x^3+14x^2+x-7}{(2x+1)(x-4)(x+1)^2}$

14: $\dfrac{2x^3-5x^2-27x-24}{(x+1)(x-1)(x+2)^2}$

15: $\dfrac{4x^3-42x^2+78x-30}{(2x+1)(x-2)(2x-3)^2}$

16: $\dfrac{-13x^3-11x^2+131x+189}{(2x-3)(3x-2)(x+5)^2}$

17:* $\dfrac{2x^2+5x+1}{(x+1)^2}$

18: $\dfrac{3x^2-16x+20}{(x-3)^2}$

19: $\dfrac{2x^3-10x^2+4x+11}{(2x+1)(x-2)^2}$

20: $\dfrac{6x^3+33x^2+23x-45}{(2x-1)(x+3)^2}$

22.4 FACTORES DE SEGUNDO GRADO DISTINTOS

Si la primera potencia de una función irreductible de segundo grado aparece entre los factores del denominador de una fracción que se va a descomponer en fracciones parciales, entonces debe aparecer como denominador de una de las fracciones parciales. El numerador de la fracción parcial cuyo denominador sea la función de segundo grado será una función de primer grado. Los factores de primer grado del denominador aparecen exactamente como en los casos anteriores.

EJEMPLO 1 Descomponer en fracciones parciales.

$$\frac{14x^3+14x^2-4x+3}{(3x^2-x+1)(x-1)(x+2)}$$

Solución: El factor de segundo grado $3x^2 - x + 1$ es irreductible; por tanto, se debe emplear como denominador de una fracción parcial que tenga por numerador una función de primer grado $Ax + B$. Cada uno de los factores de primer grado aparecen como denominadores de fracciones parciales cuyos numeradores son constantes. Esto es

$$\frac{14x^3 + 14x^2 - 4x + 3}{(3x^2 - x + 1)(x - 1)(x + 2)} = \frac{Ax + B}{3x^2 - x + 1} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x + 2} \qquad (1)$$

Para encontrar los valores de A, B, C y D de tal modo que los miembros de (1) sean iguales, se eliminan primero en (1) los denominadores y se tiene

$$\begin{aligned} 14x^3 + 14x^2 - 4x + 3 &= (Ax + B)(x - 1)(x + 2) && (2) \\ &\quad + C(3x^2 - x + 1)(x + 2) \\ &\quad\quad + D(3x^2 - x + 1)(x - 1) \\ &= (A + 3C + 3D)x^3 \\ &\quad + (A + B + 5C - 4D)x^2 && (3) \\ &\quad + (-2A + B - C + 2D)x + (-2B + 2C - D) \end{aligned}$$

Se pueden ahora obtener cuatro ecuaciones de primer grado en A, B, C y D, igualando los coeficientes de potencias iguales de x, como sigue:

$$\begin{aligned} A + 3C + 3D &= 14 \\ A + B + 5C - 4D &= 14 \\ -2A + B - C + 2D &= -4 \\ -2B + 2C - D &= 3 \end{aligned}$$

La solución de este sistema se puede obtener de acuerdo con el método del Pr. 21.6 o resolviendo la última ecuación para D en términos de B y C, sustituyendo luego cada D por su valor en las otras tres ecuaciones y resolviendo el sistema resultante de tres ecuaciones con tres incógnitas y por último, obteniendo el valor de D de la última ecuación. La solución así obtenida es: $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$, $D = 1$. Por tanto,

$$\frac{14x^3 + 14x^2 - 4x + 3}{(3x^2 - x + 1)(x - 1)(x + 2)} = \frac{2x + 1}{3x^2 - x + 1} + \frac{3}{x - 1} + \frac{1}{x + 2}$$

EJEMPLO 2 Descomponer en fracciones parciales.

$$\frac{4x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 3)(x + 1)}$$

Solución:

$$\frac{4x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 3)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x - 3} + \frac{E}{x + 1}$$

eliminando denominadores, se tiene

$$\begin{aligned} 4x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 1 &= (Ax + B)(x^2 - x - 3)(x + 1) && (2) \\ &\quad + (Cx + D)(x^2 + x + 1)(x + 1) \\ &\quad\quad + E(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 3) \\ &= (A + C + E)x^4 + (B + 2C + D)x^3 && (3) \\ &\quad + (-4A + 2C + 2D - 3E)x^2 \\ &\quad + (-3A - 4B + C + 2D - 4E)x \\ &\quad\quad + (-3B + D - 3E) \end{aligned}$$

Se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones igualando los coeficientes de las potencias iguales de x.

$$\begin{aligned} A + C + E &= 4 \\ B + 2C + D &= 4 \\ -4A + 2C + 2D - 3E &= -1 \\ -3A - 4B + C + 2D - 4E &= 1 \\ -3B + D - 3E &= 1 \end{aligned}$$

Se puede resolver este sistema de acuerdo con el método del Pr 21.6 o mediante la obtención de una expresión para D en términos de B y de E a partir de la última ecuación, sustituyendo luego este valor en vez de D en las otras cuatro ecuaciones, y obteniendo con ello un sistema de cuatro ecuaciones de primer grado con cuatro incógnitas, que se puede resolver por medio de cualquiera de los métodos de que se dispone. Se puede emplear el método sugerido en el ejemplo 1. La solución es $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 1$, $E = 1$. Por tanto,

$$\frac{4x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 3)(x + 1)} = \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2x + 1}{x^2 - x - 3} + \frac{1}{x + 1}$$

EJERCICIO 92: DESCOMPOSICION DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES; CASO III

Descompónganse las siguientes fracciones en fracciones parciales.

1: $\dfrac{-2x + 5}{(x - 1)(x^2 + 2)}$

2: $\dfrac{5x^2 + x + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)}$

3: $\dfrac{3x^2 - 10x + 16}{(x - 3)(x^2 + x + 1)}$

4: $\dfrac{x^2 - 4x - 3}{(2x - 3)(x^2 - x - 3)}$

5: $\dfrac{5x^3 - 6x^2 + 12x + 13}{(x - 1)(2x + 1)(x^2 + 3)}$

6: $\dfrac{5x^3 + 14x^2 + 71x - 14}{(x + 5)(2x - 1)(x^2 - 3)}$

7: $\dfrac{x^3 + 11x^2 + 13x - 5}{(x - 3)(3x + 1)(x^2 - x + 2)}$

8: $\dfrac{-x^3 + 9x^2 - 4x - 18}{(x + 2)(x + 3)(3x^2 - 2x + 1)}$

9: $\dfrac{3x^3 - 10x^2 + 9x - 6}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}$

10: $\dfrac{-x^3 + 8x^2 + 2x - 19}{(x - 2)^2(x^2 + 5)}$

11: $\dfrac{4x^3 - 11x^2 + 12x - 19}{(x - 2)^2(x^2 + x + 1)}$

12: $\dfrac{4x^3 + 19x^2 + 18x - 13}{(x + 3)^2(x^2 + 2x - 1)}$

13: $\dfrac{2x^3 - 8x + 4}{(x^2 + 2)(x^2 - 2)}$

14: $\dfrac{3x^3 - 10x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)(x^2 - 3x - 1)}$

15: $\dfrac{3x^3 - 3x^2 - 4x - 14}{(x^2 - 5)(x^2 - x + 3)}$

16: $\dfrac{-x^3 - 13x^2 + 9}{(x^2 + 3)(x^2 - 3x - 3)}$

17: $\dfrac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 4}{(x + 1)(x^2 + 1)}$

18: $\dfrac{6x^3 - 9x^2 + 33x - 64}{(2x - 3)(x^2 + 5)}$

19: $\dfrac{2x^3 - 10x^2 + 11x + 19}{(x - 5)(2x^2 - 3x + 2)}$

20: $\dfrac{12x + 14x^2 + 8x + 39}{(2x + 3)(2x^2 - x + 3)}$

22.5 FACTORES DE SEGUNDO GRADO REPETIDOS

El último caso por considerar es aquel en que los factores del denominador de la fracción dada, contengan potencias superiores a la primera, de una o más funciones irreductibles de segundo grado. Según IV, teorema del Pr. 22.1, por cada factor del tipo $(ax^2 + bx + c)^k$ que aparezca en el denominador de una fracción racional corresponden las fracciones parciales siguientes:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Los factores de primer grado, y los factores de segundo grado no repetidos se tratan de la misma manera que en los casos anteriores. El numerador de cada fracción parcial cuyo denominador contiene una función de segundo grado debe ser una función de primer grado.

EJEMPLO Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{6x^4 + 11x^3 + 18x^2 + 14x + 6}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$$

Solución: El denominador contiene como factores una función de primer grado y el cuadrado de una función irreductible de segundo grado; por tanto, se tiene

$$\frac{6x^4 + 11x^3 + 18x^2 + 14x + 6}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)^2}$$

calculando las constantes indeterminadas después de haber eliminado los denominadores se tiene

$$\begin{aligned} 6x^4 + 11x^3 + 18x^2 + 14x + 6 &= A(x^2+x+1)^2 \\ &\quad + (Bx+C)(x^2+x+1)(x+1) + (Dx+E)(x+1) \\ &= (A+B)x^4 + (2A+2B+C)x^3 \\ &\quad + (3A+2B+2C+D)x^2 + (2A+B+2C+D+E)x \\ &\quad + (A+C+E) \end{aligned}$$

Por tanto, igualando los coeficientes de potencias iguales de x, se tiene

$$\begin{aligned} A + B &= 6 \\ 2A + 2B + C &= 11 \\ 3A + 2B + 2C + D &= 18 \\ 2A + B + 2C + D + E &= 14 \\ A + C + E &= 6 \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver mediante el método propuesto en el ejemplo 2, Pr. 22. La solución es $A =$, $B = 1$, $C = -1$, $D = 3$ y $E = 2$. Por tanto,

$$\frac{6x^4 + 11x^3 + 18x^2 + 14x + 6}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{5}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

EJERCICIO 93: DESCOMPOSICION DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES; CASO IV.

Descompónganse las siguientes fracciones en fracciones parciales.

1: $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{(x^2-2)^2}$

2: $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x - 10}{(x^2+3)^2}$

3: $\dfrac{2x^3 - x^2 - 6x - 8}{(x^2-x-3)^2}$

4: $\dfrac{x^3 - 7x^2 + 7x + 8}{(x^2-2x-1)^2}$

5: $\dfrac{x^5 + 2x^3 - x + 3}{(x^2+1)^3}$

6: $\dfrac{x^3 + 4x - 5}{(x^2+2)^3}$

7: $\dfrac{x^5 + 2x^4 - 3x^2 - 3x}{(x^2+x-1)^3}$

8: $\dfrac{x^5 + 4x^4 + 6x^3 + x^2 - 3x - 8}{(x^2+2x+2)^3}$

9: $\dfrac{2x^4 + 13x^3 + 13x^2 - 12x + 2}{x^2(x^2+3x-1)^2}$

10: $\dfrac{2x^4 - x^3 + 6x^2 - x + 8}{x(x^2+2)^2}$

11: $\dfrac{-2x^5 - 4x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 6x + 1}{x^2(x^2+3x-1)^2}$

12: $\dfrac{2x^6 - x^5 - 8x^4 + 5x^3 + 9x^2 + x - 1}{x^3(x^2-x-1)^2}$

13: $\dfrac{4x^4 + x^3 - 25x^2 - 9x + 30}{(x+2)(x^2-3)^2}$

14: $\dfrac{3x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 7x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2}$

15: $\dfrac{4x^4 - 7x^3 + 5x^2 - x + 1}{(2x-1)(x^2-x+1)^2}$

16: $\dfrac{x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 26x + 33}{(x+3)(x^2-x-3)^2}$

APENDICE

TABLA I — LOGARITMOS COMUNES

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

TABLA I — LOGARITMOS COMUNES (continuación)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLA II — FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Angulos	Senos		Cosenos		Tangentes		Cotangentes		Angulos
	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	
0° 00′	.0000	∞	1.0000	0.0000	.0000	∞	∞	∞	90° 00′
10	.0029	7.4637	1.0000	0000	.0029	7.4637	343.77	2.5363	50
20	.0058	7648	1.0000	0000	.0058	7648	171.89	2352	40
30	.0087	9408	1.0000	0000	.0087	9409	114.59	0591	30
40	.0116	8.0658	.9999	0000	.0116	8.0658	85.940	1.9342	20
50	.0145	1627	.9999	0000	.0145	1627	68.750	8373	10
1° 00′	.0175	8.2419	.9998	9.9999	.0175	8.2419	57.290	1.7581	89° 00′
10	.0204	3088	.9998	9999	.0204	3089	49.104	6911	50
20	.0233	3668	.9997	9999	.0233	3669	42.964	6331	40
30	.0262	4179	.9997	9999	.0262	4181	38.188	5819	30
40	.0291	4637	.9996	9998	.0291	4638	34.368	5362	20
50	.0320	5050	.9995	9998	.0320	5053	31.242	4947	10
2° 00′	.0349	8.5428	.9994	9.9997	.0349	8.5431	28.636	1.4569	88° 00′
10	.0378	5776	.9993	9997	.0378	5779	26.432	4221	50
20	.0407	6097	.9992	9996	.0407	6101	24.542	3899	40
30	.0436	6397	.9990	9996	.0437	6401	22.904	3599	30
40	.0465	6677	.9989	9995	.0466	6682	21.470	3318	20
50	.0494	6940	.9988	9995	.0495	6945	20.206	3055	10
3° 00′	.0523	8.7188	.9986	9.9994	.0524	8.7194	19.081	1.2806	87° 00′
10	.0552	7423	.9985	9993	.0553	7429	18.075	2571	50
20	.0581	7645	.9983	9993	.0582	7652	17.169	2348	40
30	.0610	7857	.9981	9992	.0612	7865	16.350	2135	30
40	.0640	8059	.9980	9991	.0641	8067	15.605	1933	20
50	.0669	8251	.9978	9990	.0670	8261	14.924	1739	10
4° 00′	.0698	8.8436	.9976	9.9989	.0669	8.8446	14.301	1.1554	86° 00′
10	.0727	8613	.9974	9989	.0729	8624	13.727	1376	50
20	.0756	8783	.9971	9988	.0758	8795	13.197	1205	40
30	.0785	8946	.9969	9987	.0787	8960	12.706	1040	30
40	.0814	9104	.9967	9986	.0816	9118	12.251	0882	20
50	.0843	9256	.9964	9985	.0846	9272	11.826	0728	10
5° 00′	.0872	8.9403	.9962	9.9983	.0875	8.9420	11.430	1.0580	85° 00′
10	.0901	9545	.9959	9982	.0904	9563	11.059	0437	50
20	.0929	9682	.9957	9981	.0934	9701	10.712	0299	40
30	.0958	9816	.9954	9980	.0963	9836	10.385	0164	30
40	.0987	9945	.9951	9979	.0992	9966	10.078	0034	20
50	.1016	9.0070	.9948	9977	.1022	9.0093	9.7882	0.9907	10
6° 00′	.1045	9.0192	.9945	9.9976	.1051	9.0216	9.5144	0.9784	84° 00′
10	.1074	0311	.9942	9975	.1080	0336	9.2553	9664	50
20	.1103	0426	.9939	9973	.1110	0453	9.0098	9547	40
30	.1132	0539	.9936	9972	.1139	0567	8.7769	9433	30
40	.1161	0648	.9932	9971	.1169	0678	8.5555	9322	20
50	.1190	0755	.9929	9969	.1198	0786	8.3450	9214	10
7° 00′	.1219	9.0859	.9925	9.9968	.1228	9.0891	8.1443	0.9109	83° 00′
10	.1248	0961	.9922	9966	.1257	0995	7.9530	9005	50
20	.1276	1060	.9918	9964	.1287	1096	7.7704	8904	40
30	.1305	1157	.9914	9963	.1317	1194	7.5958	8806	30
40	.1334	1252	.9911	9961	.1346	1291	7.4287	8709	20
50	.1363	1345	.9907	9959	.1376	1385	7.2687	8615	10
8° 00′	.1392	9.1436	.9903	9.9958	.1405	9.1478	7.1154	0.8522	82° 00′
10	.1421	1525	.9899	9956	.1435	1569	6.9682	8431	50
20	.1449	1612	.9894	9954	.1465	1658	6.8269	8342	40
30	.1478	1697	.9890	9952	.1495	1745	6.6912	8255	30
40	.1507	1781	.9886	9950	.1524	1831	6.5606	8169	20
50	.1536	1863	.9881	9948	.1554	1915	6.4348	8085	10
9° 00′	.1564	9.1943	.9877	9.9946	.1584	9.1997	6.3138	0.8003	81° 00′
	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	
Angulos	Cosenos		Senos		Cotangentes		Tangentes		Angulos

TABLA II — FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (continuación)

Angulos	Senos		Cosenos		Tangentes		Cotangentes		Angulos
	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	
9° 00′	.1564	9.1943	.9877	9.9946	.1584	9.1997	6.3138	0.8003	81° 00′
10	.1593	2022	.9872	9944	.1614	2078	6.1970	7922	50
20	.1622	2100	.9868	9942	.1644	2158	6.0844	7842	40
30	.1650	2176	.9863	9940	.1673	2236	5.9758	7764	30
40	.1679	2251	.9858	9938	.1703	2313	5.8708	7687	20
50	.1708	2324	.9853	9936	.1733	2389	5.7694	7611	10
10° 00′	.1736	9.2397	.9848	9.9934	.1763	9.2463	5.6713	0.7537	80° 00′
10	.1765	2468	.9843	9931	.1793	2536	5.5764	7464	50
20	.1794	2538	.9838	9929	.1823	2609	5.4845	7391	40
30	.1822	2606	.9833	9927	.1853	2680	5.3955	7320	30
40	.1851	2674	.9827	9924	.1883	2750	5.3093	7250	20
50	.1880	2740	.9822	9922	.1914	2819	5.2257	7181	10
11° 00′	.1908	9.2806	.9816	9.9919	.1944	9.2887	5.1446	0.7113	79° 00′
10	.1937	2870	.9811	9917	.1974	2953	5.0658	7047	50
20	.1965	2934	.9805	9914	.2004	3020	4.9894	6980	40
30	.1994	2997	.9799	9912	.2035	3085	4.9152	6915	30
40	.2022	3058	.9793	9909	.2065	3149	4.8430	6851	20
50	.2051	3119	.9787	9907	.2095	3212	4.7729	6788	10
12° 00′	.2079	9.3179	.9781	9.9904	.2126	9.3275	4.7046	0.6725	78° 00′
10	.2108	3238	.9775	9901	.2156	3336	4.6382	6664	50
20	.2136	3296	.9769	9899	.2186	3397	4.5736	6603	40
30	.2164	3353	.9763	9896	.2217	3458	4.5107	6542	30
40	.2193	3410	.9757	9893	.2247	3517	4.4494	6483	20
50	.2221	3466	.9750	9890	.2278	3576	4.3897	6424	10
13° 00′	.2250	9.3521	.9744	9.9887	.2309	9.3634	4.3315	0.6366	77° 00′
10	.2278	3575	.9737	9884	.2339	3691	4.2747	6309	50
20	.2306	3629	.9730	9881	.2370	3748	4.2193	6252	40
30	.2334	3682	.9724	9878	.2401	3804	4.1653	6196	30
40	.2363	3734	.9717	9875	.2432	3859	4.1126	6141	20
50	.2391	3786	.9710	9872	.2462	3914	4.0611	6086	10
14° 00′	.2419	9.3837	.9703	9.9869	.2493	9.3968	4.0108	0.6032	76° 00′
10	.2447	3887	.9696	9866	.2524	4021	3.9617	5979	50
20	.2476	3937	.9689	9863	.2555	4074	3.9136	5926	40
30	.2504	3986	.9681	9859	.2586	4127	3.8667	5873	30
40	.2532	4035	.9674	9856	.2617	4178	3.8208	5822	20
50	.2560	4083	.9667	9853	.2648	4230	3.7760	5770	10
15° 00′	.2588	9.4130	.9659	9.9849	.2679	9.4281	3.7321	0.5719	75° 00′
10	.2616	4177	.9652	9846	.2711	4331	3.6891	5669	50
20	.2644	4223	.9644	9843	.2742	4381	3.6470	5619	40
30	.2672	4269	.9636	9839	.2773	4430	3.6059	5570	30
40	.2700	4314	.9628	9836	.2805	4479	3.5656	5521	20
50	.2728	4359	.9621	9832	.2836	4527	3.5261	5473	10
16° 00′	.2756	9.4403	.9613	9.9828	.2867	9.4575	3.4874	0.5425	74° 00′
10	.2784	4447	.9605	9825	.2899	4622	3.4495	5378	50
20	.2812	4491	.9596	9821	.2931	4669	3.4124	5331	40
30	.2840	4533	.9588	9817	.2962	4716	3.3759	5284	30
40	.2868	4576	.9580	9814	.2994	4762	3.3402	5238	20
50	.2896	4618	.9572	9810	.3026	4808	3.3052	5192	10
17° 00′	.2924	9.4659	.9563	9.9806	.3057	9.4853	3.2709	0.5147	73° 00′
10	.2952	4700	.9555	9802	.3089	4898	3.2371	5102	50
20	.2979	4741	.9546	9798	.3121	4943	3.2041	5057	40
30	.3007	4781	.9537	9794	.3153	4987	3.1716	5013	30
40	.3035	4821	.9528	9790	.3185	5031	3.1397	4969	20
50	.3062	4861	.9520	9786	.3217	5075	3.1084	4925	10
18° 00′	.3090	9.4900	.9511	9.9782	.3249	9.5118	3.0777	0.4882	72° 00′
	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	
Angulos	Cosenos		Senos		Cotangentes		Tangentes		Angulos

Angulos	Senos		Cosenos		Tangentes		Cotangentes		Angulos
	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	
18° 00′	.3090	9.4900	.9511	9.9782	.3249	9.5118	3.0777	0.4882	72° 00′
10	.3118	4939	.9502	9778	.3281	5161	3.0475	4839	50
20	.3145	4977	.9492	9774	.3314	5203	3.0178	4797	40
30	.3173	5015	.9483	9770	.3346	5245	2.9887	4755	30
40	.3201	5052	.9474	9765	.3378	5287	2.9600	4713	20
50	.3228	5090	.9465	9761	.3411	5329	2.9319	4671	10
19° 00′	.3256	9.5126	.9455	9.9757	.3443	9.5370	2.9042	0.4630	71° 00′
10	.3283	5163	.9446	9752	.3476	5411	2.8770	4589	50
20	.3311	5199	.9436	9748	.3508	5451	2.8502	4549	40
30	.3338	5235	.9426	9743	.3541	5491	2.8239	4509	30
40	.3365	5270	.9417	9739	.3574	5531	2.7980	4469	20
50	.3393	5306	.9407	9734	.3607	5571	2.7725	4429	10
20° 00′	.3420	9.5341	.9397	9.9730	.3640	9.5611	2.7475	0.4389	70° 00′
10	.3448	5375	.9387	9725	.3673	5650	2.7228	4350	50
20	.3475	5409	.9377	9721	.3706	5689	2.6985	4311	40
30	.3502	5443	.9367	9716	.3739	5727	2.6746	4273	30
40	.3529	5477	.9356	9711	.3772	5766	2.6511	4234	20
50	.3557	5510	.9346	9706	.3805	5804	2.6279	4196	10
21° 00′	.3584	9.5543	.9336	9.9702	.3839	9.5842	2.6051	0.4158	69° 00′
10	.3611	5576	.9325	9697	.3872	5879	2.5826	4121	50
20	.3638	5609	.9315	9692	.3906	5917	2.5605	4083	40
30	.3665	5641	.9304	9687	.3939	5954	2.5386	4046	30
40	.3692	5673	.9293	9682	.3973	5991	2.5172	4009	20
50	.3719	5704	.9283	9677	.4006	6028	2.4960	3972	10
22° 00′	.3746	9.5736	.9272	9.9672	.4040	9.6064	2.4751	0.3936	68° 00′
10	.3773	5767	.9261	9667	.4074	6100	2.4545	3900	50
20	.3800	5798	.9250	9661	.4108	6136	2.4342	3864	40
30	.3827	5828	.9239	9656	.4142	6172	2.4142	3828	30
40	.3854	5859	.9228	9651	.4176	6208	2.3945	3792	20
50	.3881	5889	.9216	9646	.4210	6243	2.3750	3757	10
23° 00′	.3907	9.5919	.9205	9.9640	.4245	9.6279	2.3559	0.3721	67° 00′
10	.3934	5948	.9194	9635	.4279	6314	2.3369	3686	50
20	.3961	5978	.9182	9629	.4314	6348	2.3183	3652	40
30	.3987	6007	.9171	9624	.4348	6383	2.2998	3617	30
40	.4014	6036	.9159	9618	.4383	6417	2.2817	3583	20
50	.4041	6065	.9147	9613	.4417	6452	2.2637	3548	10
24° 00′	.4067	9.6093	.9135	9.9607	.4452	9.6486	2.2460	0.3514	66° 00′
10	.4094	6121	.9124	9602	.4487	6520	2.2286	3480	50
20	.4120	6149	.9112	9596	.4522	6553	2.2113	3447	40
30	.4147	6177	.9100	9590	.4557	6587	2.1943	3413	30
40	.4173	6205	.9088	9584	.4592	6620	2.1775	3380	20
50	.4200	6232	.9075	9579	.4628	6654	2.1609	3346	10
25° 00′	.4226	9.6259	.9063	9.9573	.4663	9.6687	2.1445	0.3313	65° 00′
10	.4253	6286	.9051	9567	.4699	6720	2.1283	3280	50
20	.4279	6313	.9038	9561	.4734	6752	2.1123	3248	40
30	.4305	6340	.9026	9555	.4770	6785	2.0965	3215	30
40	.4331	6366	.9013	9549	.4806	6817	2.0809	3183	20
50	.4358	6392	.9001	9543	.4841	6850	2.0655	3150	10
26° 00′	.4384	9.6418	.8988	9.9537	.4877	9.6882	2.0503	0.3118	64° 00′
10	.4410	6444	.8975	9530	.4913	6914	2.0353	3086	50
20	.4436	6470	.8962	9524	.4950	6946	2.0204	3054	40
30	.4462	6495	.8949	9518	.4986	6977	2.0057	3023	30
40	.4488	6521	.8936	9512	.5022	7009	1.9912	2991	20
50	.4514	6546	.8923	9505	.5059	7040	1.9768	2960	10
27° 00′	.4540	9.6570	.8910	9.9499	.5095	9.7072	1.9626	0.2928	63° 00′
	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	
Angulos	Cosenos		Senos		Cotangentes		Tangentes		Angulos

Angulos	Senos		Cosenos		Tangentes		Cotangentes		Angulos
	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	
27° 00′	.4540	9.6570	.8910	9.9499	.5095	9.7072	1.9626	0.2928	63° 00′
10	.4566	6595	.8897	9492	.5132	7103	1.9486	2897	50
20	.4592	6620	.8884	9486	.5169	7134	1.9347	2866	40
30	.4617	6644	.8870	9479	.5206	7165	1.9210	2835	30
40	.4643	6668	.8857	9473	.5243	7196	1.9074	2804	20
50	.4669	6692	.8843	9466	.5280	7226	1.8940	2774	10
28° 00′	.4695	9.6716	.8829	9.9459	.5317	9.7257	1.8807	0.2743	62° 00′
10	.4720	6740	.8816	9453	.5354	7287	1.8676	2713	50
20	.4746	6763	.8802	9446	.5392	7317	1.8546	2683	40
30	.4772	6787	.8788	9439	.5430	7348	1.8418	2652	30
40	.4797	6810	.8774	9432	.5467	7378	1.8291	2622	20
50	.4823	6833	.8760	9425	.5505	7408	1.8165	2592	10
29° 00′	.4848	9.6856	.8746	9.9418	.5543	9.7438	1.8040	0.2562	61° 00′
10	.4874	6878	.8732	9411	.5581	7467	1.7917	2533	50
20	.4899	6901	.8718	9404	.5619	7497	1.7796	2503	40
30	.4924	6923	.8704	9397	.5658	7526	1.7675	2474	30
40	.4950	6946	.8689	9390	.5696	7556	1.7556	2444	20
50	.4975	6968	.8675	9383	.5735	7585	1.7437	2415	10
30° 00′	.5000	9.6990	.8660	9.9375	.5774	9.7614	1.7321	0.2386	60° 00′
10	.5025	7012	.8646	9368	.5812	7644	1.7205	2356	50
20	.5050	7033	.8631	9361	.5851	7673	1.7090	2327	40
30	.5075	7055	.8616	9353	.5890	7701	1.6977	2299	30
40	.5100	7076	.8601	9346	.5930	7730	1.6864	2270	20
50	.5125	7097	.8587	9338	.5969	7759	1.6753	2241	10
31° 00′	.5150	9.7118	.8572	9.9331	.6009	9.7788	1.6643	0.2212	59° 00′
10	.5175	7139	.8557	9323	.6048	7816	1.6534	2184	50
20	.5200	7160	.8542	9315	.6088	7845	1.6426	2155	40
30	.5225	7181	.8526	9308	.6128	7873	1.6319	2127	30
40	.5250	7201	.8511	9300	.6168	7902	1.6212	2098	20
50	.5275	7222	.8496	9292	.6208	7930	1.6107	2070	10
32° 00′	.5299	9.7242	.8480	9.9284	.6249	9.7958	1.6003	0.2042	58° 00′
10	.5324	7262	.8465	9276	.6289	7986	1.5900	2014	50
20	.5348	7282	.8450	9268	.6330	8014	1.5798	1986	40
30	.5373	7302	.8434	9260	.6371	8042	1.5697	1958	30
40	.5398	7322	.8418	9252	.6412	8070	1.5597	1930	20
50	.5422	7342	.8403	9244	.6453	8097	1.5497	1903	10
33° 00′	.5446	9.7361	.8387	9.9236	.6494	9.8125	1.5399	0.1875	57° 00′
10	.5471	7380	.8371	9228	.6536	8153	1.5301	1847	50
20	.5495	7400	.8355	9219	.6577	8180	1.5204	1820	40
30	.5519	7419	.8339	9211	.6619	8208	1.5108	1792	30
40	.5544	7438	.8323	9203	.6661	8235	1.5013	1765	20
50	.5568	7457	.8307	9194	.6703	8263	1.4919	1737	10
34° 00′	.5592	9.7476	.8290	9.9186	.6745	9.8290	1.4826	0.1710	56° 00′
10	.5616	7494	.8274	9177	.6787	8317	1.4733	1683	50
20	.5640	7513	.8258	9169	.6830	8344	1.4641	1656	40
30	.5664	7531	.8241	9160	.6873	8371	1.4550	1629	30
40	.5688	7550	.8225	9151	.6916	8398	1.4460	1602	20
50	.5712	7568	.8208	9142	.6959	8425	1.4370	1575	10
35° 00′	.5736	9.7586	.8192	9.9134	.7002	9.8452	1.4281	0.1548	55° 00′
10	.5760	7604	.8175	9125	.7046	8479	1.4193	1521	50
20	.5783	7622	.8158	9116	.7089	8506	1.4106	1494	40
30	.5807	7640	.8141	9107	.7133	8533	1.4019	1467	30
40	.5831	7657	.8124	9098	.7177	8559	1.3934	1441	20
50	.5854	7675	.8107	9089	.7221	8586	1.3848	1414	10
36° 00′	.5878	9.7692	.8090	9.9080	.7265	9.8613	1.3764	0.1387	54° 00′
	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	Nat.	Log.	
Angulos	Cosenos		Senos		Cotangentes		Tangentes		Angulos

TABLA II — FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (continuación)

Angulos	Senos Nat.	Senos Log.	Cosenos Nat.	Cosenos Log.	Tangentes Nat.	Tangentes Log.	Cotangentes Nat.	Cotangentes Log.	Angulos
36° 00′	.5878	9.7692	.8090	9.9080	.7265	9.8613	1.3764	0.1387	54° 00′
10	.5901	7710	.8073	9070	.7310	8639	1.3680	1361	50
20	.5925	7727	.8056	9061	.7355	8666	1.3597	1334	40
30	.5948	7744	.8039	9052	.7400	8692	1.3514	1308	30
40	.5972	7761	.8021	9042	.7445	8718	1.3432	1282	20
50	.5995	7778	.8004	9033	.7490	8745	1.3351	1255	10
37° 00′	.6018	9.7795	.7986	9.9023	.7536	9.8771	1.3270	0.1229	53° 00′
10	.6041	7811	.7969	9014	.7581	8797	1.3190	1203	50
20	.6065	7828	.7951	9004	.7627	8824	1.3111	1176	40
30	.6088	7844	.7934	8995	.7673	8850	1.3032	1150	30
40	.6111	7861	.7916	8985	.7720	8876	1.2954	1124	20
50	.6134	7877	.7898	8975	.7766	8902	1.2876	1098	10
38° 00′	.6157	9.7893	.7880	9.8965	.7813	9.8928	1.2790	0.1072	52° 00′
10	.6180	7910	.7862	8955	.7860	8954	1.2723	1046	50
20	.6202	7926	.7844	8945	.7907	8980	1.2647	1020	40
30	.6225	7941	.7826	8935	.7954	9006	1.2572	0994	30
40	.6248	7957	.7808	8925	.8002	9032	1.2497	0968	20
50	.6271	7973	.7790	8915	.8050	9058	1.2423	0942	10
39° 00′	.6293	9.7989	.7771	9.8905	.8098	9.9084	1.2349	0.0916	51° 00′
10	.6316	8004	.7753	8895	.8146	9110	1.2276	0890	50
20	.6338	8020	.7735	8884	.8195	9135	1.2203	0865	40
30	.6361	8035	.7716	8874	.8243	9161	1.2131	0839	30
40	.6383	8050	.7698	8864	.8292	9187	1.2059	0813	20
50	.6406	8066	.7679	8853	.8342	9212	1.1988	0788	10
40° 00′	.6428	9.8081	.7660	9.8843	.8391	9.9238	1.1918	0.0762	50° 00′
10	.6450	8096	.7642	8832	.8441	9264	1.1847	0736	50
20	.6472	8111	.7623	8821	.8491	9289	1.1778	0711	40
30	.6494	8125	.7604	8810	.8541	9315	1.1708	0685	30
40	.6517	8140	.7585	8800	.8591	9341	1.1640	0659	20
50	.6539	8155	.7566	8789	.8642	9366	1.1571	0634	10
41° 00′	.6561	9.8169	.7547	9.8778	.8693	9.9392	1.1504	0.0608	49° 00′
10	.6583	8184	.7528	8767	.8744	9417	1.1436	0583	50
20	.6604	8198	.7509	8756	.8796	9443	1.1369	0557	40
30	.6626	8213	.7490	8745	.8847	9468	1.1303	0532	30
40	.6648	8227	.7470	8733	.8899	9494	1.1237	0506	20
50	.6670	8241	.7451	8722	.8952	9519	1.1171	0481	10
42° 00′	.6691	9.8255	.7431	9.8711	.9004	9.9544	1.1106	0.0456	48° 00′
10	.6713	8269	.7412	8699	.9057	9570	1.1041	0430	50
20	.6734	8283	.7392	8688	.9110	9595	1.0977	0405	40
30	.6756	8297	.7373	8676	.9163	9621	1.0913	0379	30
40	.6777	8311	.7353	8665	.9217	9646	1.0850	0354	20
50	.6799	8324	.7333	8653	.9271	9671	1.0786	0329	10
43° 00′	.6820	9.8338	.7314	9.8641	.9325	9.9697	1.0724	0.0303	47° 00′
10	.6841	8351	.7294	8629	.9380	9722	1.0661	0278	50
20	.6862	8365	.7274	8618	.9435	9747	1.0599	0253	40
30	.6884	8378	.7254	8606	.9490	9772	1.0538	0228	30
40	.6905	8391	.7234	8594	.9545	9798	1.0477	0202	20
50	.6926	8405	.7214	8582	.9601	9823	1.0416	0177	10
44° 00′	.6947	9.8418	.7193	9.8569	.9657	9.9848	1.0355	0.0152	46° 00′
10	.6967	8431	.7173	8557	.9713	9874	1.0295	0126	50
20	.6988	8444	.7153	8545	.9770	9899	1.0235	0101	40
30	.7009	8457	.7133	8532	.9827	9924	1.0176	0076	30
40	.7030	8469	.7112	8520	.9884	9949	1.0117	0051	20
50	.7050	8482	.7092	8507	.9942	9975	1.0058	0025	10
45° 00′	.7071	9.8495	.7071	9.8495	1.0000	0.0000	1.0000	0.0000	45° 00′
Angulos	Cosenos Nat.	Cosenos Log.	Senos Nat.	Senos Log.	Cotangentes Nat.	Cotangentes Log.	Tangentes Nat.	Tangentes Log.	Angulos

TABLA III — POTENCIAS Y RAICES

Núm.	Cuad.	Raíz Cuad.	cubo	Raíz cub.	Núm.	Cuad.	Raíz Cuad.	cubo	Raíz cub.
1	1	1.000	1	1.000	**51**	2,601	7.141	132,651	3.708
2	4	1.414	8	1.260	**52**	2,704	7.211	140,608	3.733
3	9	1.732	27	1.442	**53**	2,809	7.280	148,877	3.756
4	16	2.000	64	1.587	**54**	2,916	7.348	157,464	3.780
5	25	2.236	125	1.710	**55**	3,025	7.416	166,375	3.803
6	36	2.449	216	1.817	**56**	3,136	7.483	175,616	3.826
7	49	2.646	343	1.913	**57**	3,249	7.550	185,193	3.849
8	64	2.828	512	2.000	**58**	3,364	7.616	195,112	3.871
9	81	3.000	729	2.080	**59**	3,481	7.681	205,379	3.893
10	100	3.162	1,000	2.154	**60**	3,600	7.746	216,000	3.915
11	121	3.317	1,331	2.224	**61**	3,721	7.810	226,981	3.936
12	144	3.464	1,728	2.289	**62**	3,844	7.874	238,328	3.958
13	169	3.606	2,197	2.351	**63**	3,969	7.937	250,047	3.979
14	196	3.742	2,744	2.410	**64**	4,096	8.000	262,144	4.000
15	225	3.873	3,375	2.466	**65**	4,225	8.062	274,625	4.021
16	256	4.000	4,096	2.520	**66**	4,356	8.124	287,496	4.041
17	289	4.123	4,913	2.571	**67**	4,489	8.185	300,763	4.062
18	324	4.243	5,832	2.621	**68**	4,624	8.246	314,432	4.082
19	361	4.359	6,859	2.668	**69**	4,761	8.307	328,509	4.102
20	400	4.472	8,000	2.714	**70**	4,900	8.367	343,000	4.121
21	441	4.583	9,261	2.759	**71**	5,041	8.426	357,911	4.141
22	484	4.690	10,648	2.802	**72**	5,184	8.485	373,248	4.160
23	529	4.796	12,167	2.844	**73**	5,329	8.544	389,017	4.179
24	576	4.899	13,824	2.884	**74**	5,476	8.602	405,224	4.198
25	625	5.000	15,625	2.924	**75**	5,625	8.660	421,875	4.217
26	676	5.099	17,576	2.962	**76**	5,776	8.718	438,976	4.236
27	729	5.196	19,683	3.000	**77**	5,929	8.775	456,533	4.254
28	784	5.291	21,952	3.037	**78**	6,084	8.832	474,552	4.273
29	841	5.385	24,389	3.072	**79**	6,241	8.888	493,039	4.291
30	900	5.477	27,000	3.107	**80**	6,400	8.944	512,000	4.309
31	961	5.568	29,791	3.141	**81**	6,561	9.000	531,441	4.327
32	1,024	5.657	32,768	3.175	**82**	6,724	9.055	551,368	4.344
33	1,089	5.745	35,937	3.208	**83**	6,889	9.110	571,787	4.362
34	1,156	5.831	39,304	3.240	**84**	7,056	9.165	592,704	4.380
35	1,225	5.916	42,875	3.271	**85**	7,225	9.220	614,125	4.397
36	1,296	6.000	46,656	3.302	**86**	7,396	9.274	636,056	4.414
37	1,369	6.083	50,653	3.332	**87**	7,569	9.327	658,503	4.431
38	1,444	6.164	54,872	3.362	**88**	7,744	9.381	681,472	4.448
39	1,521	6.245	59,319	3.391	**89**	7,921	9.434	704,969	4.465
40	1,600	6.325	64,000	3.420	**90**	8,100	9.487	729,000	4.481
41	1,681	6.403	68,921	3.448	**91**	8,281	9.539	753,571	4.498
42	1,764	6.481	74,088	3.476	**92**	8.464	9.592	778,688	4.514
43	1,849	6.557	79,507	3.503	**93**	8,649	9.644	804,357	4.531
44	1,936	6.633	85,184	3.530	**94**	8,836	9.695	830,584	4.547
45	2,025	6.708	91,125	3.557	**95**	9,025	9.747	857,375	4.563
46	2,116	6.782	97,336	3.583	**96**	9,216	9.798	884,736	4.579
47	2,209	6.856	103,823	3.609	**97**	9,409	9.849	912,673	4.595
48	2,304	6.928	110,592	3.634	**98**	9,604	9.899	941,192	4.610
49	2,401	7.000	117,649	3.659	**99**	9,801	9.950	970,299	4.626
50	2,500	7.071	125,000	3.684	**100**	10,000	10.000	1,000,000	4.642

n	1½%	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	1.0150	1.0200	1.0250	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600
2	1.0302	1.0404	1.0506	1.0609	1.0816	1.1025	1.1236
3	1.0457	1.0612	1.0769	1.0927	1.1249	1.1576	1.1910
4	1.0614	1.0824	1.1038	1.1255	1.1699	1.2155	1.2625
5	1.0773	1.1041	1.1314	1.1593	1.2167	1.2763	1.3382
6	1.0934	1.1262	1.1597	1.1941	1.2653	1.3401	1.4185
7	1.1098	1.1487	1.1887	1.2299	1.3159	1.4071	1.5036
8	1.1265	1.1717	1.2184	1.2668	1.3686	1.4775	1.5938
9	1.1434	1.1951	1.2489	1.3048	1.4233	1.5513	1.6895
10	1.1605	1.2190	1.2801	1.3439	1.4802	1.6289	1.7908
11	1.1779	1.2434	1.3121	1.3842	1.5395	1.7103	1.8983
12	1.1956	1.2682	1.3449	1.4258	1.6010	1.7959	2.0122
13	1.2136	1.2936	1.3785	1.4685	1.6651	1.8856	2.1329
14	1.2318	1.3195	1.4130	1.5126	1.7317	1.9799	2.2609
15	1.2502	1.3459	1.4483	1.5580	1.8009	2.0789	2.3966
16	1.2690	1.3728	1.4845	1.6047	1.8730	2.1829	2.5404
17	1.2880	1.4002	1.5216	1.6528	1.9479	2.2920	2.6928
18	1.3073	1.4282	1.5597	1.7024	2.0258	2.4066	2.8543
19	1.3270	1.4568	1.5987	1.7535	2.1068	2.5270	3.0256
20	1.3469	1.4859	1.6386	1.8061	2.1911	2.6533	3.2071
21	1.3671	1.5157	1.6796	1.8603	2.2788	2.7860	3.3996
22	1.3876	1.5460	1.7216	1.9161	2.3699	2.9253	3.6035
23	1.4084	1.5769	1.7646	1.9736	2.4647	3.0715	3.8197
24	1.4295	1.6084	1.8087	2.0328	2.5633	3.2251	4.0489
25	1.4509	1.6406	1.8539	2.0938	2.6658	3.3864	4.2919
26	1.4727	1.6734	1.9003	2.1566	2.7725	3.5557	4.5494
27	1.4948	1.7069	1.9478	2.2213	2.8834	3.7335	4.8223
28	1.5172	1.7410	1.9965	2.2879	2.9987	3.9201	5.1117
29	1.5400	1.7758	2.0464	2.3566	3.1187	4.1161	5.4184
30	1.5631	1.8114	2.0976	2.4273	3.2434	4.3219	5.7435
31	1.5865	1.8476	2.1500	2.5001	3.3731	4.5380	6.0881
32	1.6103	1.8845	2.2038	2.5751	3.5081	4.7649	6.4534
33	1.6345	1.9222	2.2589	2.6523	3.6484	5.0032	6.8406
34	1.6590	1.9607	2.3153	2.7319	3.7943	5.2533	7.2510
35	1.6839	1.9999	2.3732	2.8139	3.9461	5.5160	7.6861
36	1.7091	2.0399	2.4325	2.8983	4.1039	5.7918	8.1473
37	1.7348	2.0807	2.4933	2.9852	4.2681	6.0814	8.6361
38	1.7608	2.1223	2.5557	3.0748	4.4388	6.3855	9.1543
39	1.7872	2.1647	2.6196	3.1670	4.6164	6.7048	9.7035
40	1.8140	2.2080	2.6851	3.2620	4.8010	7.0400	10.2857
41	1.8412	2.2522	2.7522	3.3599	4.9931	7.3920	10.9029
42	1.8688	2.2972	2.8210	3.4607	5.1928	7.7616	11.5570
43	1.8969	2.3432	2.8915	3.5645	5.4005	8.1497	12.2505
44	1.9253	2.3901	2.9638	3.6715	5.6165	8.5572	12.9855
45	1.9542	2.4379	3.0379	3.7816	5.8412	8.9850	13.7646
46	1.9835	2.4866	3.1139	3.8950	6.0748	9.4343	14.5905
47	2.0133	2.5363	3.1917	4.0119	6.3178	9.9060	15.4659
48	2.0435	2.5871	3.2715	4.1323	6.5705	10.4013	16.3939
49	2.0741	2.6388	3.3533	4.2562	6.8333	10.9213	17.3775
50	2.1052	2.6916	3.4371	4.3839	7.1067	11.4674	18.4202

TABLA V — VALOR ACTUAL (1 + r)n

n	1½%	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	.985 22	.980 39	.97561	.97087	.96154	.95238	.94340
2	.970 66	.961 17	.95181	.94260	.92456	.90703	.89000
3	.956 32	.942 32	.92860	.91514	.88900	.86384	.83962
4	.942 18	.923 85	.90595	.88849	.85480	.82270	.79209
5	.928 26	.905 73	.88385	.86261	.82193	.78353	.74726
6	.914 54	.887 97	.86230	.83748	.79031	.74622	.70496
7	.901 03	.870 56	.84127	.81309	.75992	.71068	.66506
8	.887 71	.853 49	.82075	.78941	.73069	.67684	.62741
9	.874 59	.836 76	.80073	.76642	.70259	.64461	.59190
10	.861 67	.820 35	.78120	.74409	.67556	.61391	.55839
11	.848 93	.804 26	.76214	.72242	.64958	.58468	.52679
12	.836 39	.788 49	.74356	.70138	.62460	.55684	.49697
13	.824 03	.773 03	.72542	.68095	.60057	.53032	.46884
14	.811 85	.757 88	.70773	.66112	.57748	.50507	.44230
15	.799 85	.743 01	.69047	.64186	.55526	.48102	.41727
16	.788 03	.728 45	.67362	.62317	.53391	.45811	.39365
17	.776 39	.714 16	.65720	.60502	.51337	.43630	.37136
18	.764 91	.700 16	.64117	.58739	.49363	.41552	.35034
19	.753 61	.686 43	.62553	.57029	.47464	.39573	.33051
20	.742 47	.672 97	.61027	.55368	.45639	.37689	.31180
21	.731 50	.659 78	.59539	.53755	.43883	.35894	.29416
22	.720 69	.646 84	.58086	.52189	.42196	.34185	.27751
23	.710 04	.634 16	.56670	.50669	.40573	.32557	.26180
24	.699 54	.621 72	.55288	.49193	.39012	.31007	.24698
25	.689 21	.609 53	.53939	.47761	.37512	.29530	.23300
26	.679 02	.597 58	.52623	.46369	.36065	.28124	.21981
27	.668 99	.585 86	.51340	.45019	.34682	.26785	.20737
28	.659 10	.574 37	.50088	.43708	.33348	.25509	.19563
29	.649 36	.563 11	.48866	.42435	.32069	.24295	.18456
30	.639 76	.552 07	.47674	.41199	.30832	.23138	.17411
31	.630 31	.541 25	.46511	.39999	.29646	.22036	.16425
32	.620 99	.530 63	.45377	.38834	.28506	.20987	.15496
33	.611 82	.520 23	.44270	.37703	.27409	.19987	.14619
34	.602 77	.510 03	.43191	.36604	.26355	.19035	.13791
35	.593 87	.500 03	.42137	.35538	.25342	.18129	.13011
36	.585 09	.490 22	.41109	.34503	.24367	.17266	.12274
37	.576 44	.480 61	.40107	.33498	.23430	.16444	.11579
38	.567 92	.471 19	.39128	.32523	.22529	.15661	.10924
39	.559 53	.461 95	.38174	.31575	.21662	.14915	.10306
40	.551 26	.452 89	.37243	.30656	.20829	.14205	.09722
41	.543 12	.444 01	.36335	.29763	.20028	.13528	.09172
42	.535 09	.435 30	.35448	.28896	.19257	.12884	.08653
43	.527 18	.426 77	.34584	.28054	.18517	.12270	.08163
44	.519 39	.418 40	.33740	.27237	.17805	.11686	.07701
45	.511 71	.410 20	.32917	.26444	.17120	.11130	.07265
46	.504 15	.402 15	.32115	.25674	.16461	.10600	.06854
47	.496 70	.394 27	.31331	.24926	.15828	.10095	.06466
48	.489 36	.386 54	.30567	.24200	.15219	.09614	.06100
49	.482 13	.378 96	.29822	.23495	.14634	.09156	.05755
50	.475 00	.371 53	.29094	.22811	.14071	.08720	.05429

TABLA VI — MONTO DE UNA RENTA $s_{\overline{n}|i}$

n	$1\frac{1}{2}\%$	2%	$2\frac{1}{2}\%$	3%	4%	5%	6%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0150	2.0200	2.0250	2.0300	2.0400	2.0500	2.0600
3	3.0452	3.0604	3.0756	3.0909	3.1216	3.1525	3.1836
4	4.0909	4.1216	4.1525	4.1836	4.2465	4.3101	4.3746
5	5.1523	5.2040	5.2563	5.3091	5.4163	5.5256	5.6371
6	6.2296	6.3081	6.3877	6.4684	6.6330	6.8019	6.9753
7	7.3230	7.4343	7.5474	7.6625	7.8983	8.1420	8.3938
8	8.4328	8.5830	8.7361	8.8923	9.2142	9.5491	9.8975
9	9.5593	9.7546	9.9545	10.1591	10.5828	11.0266	11.4913
10	10.7027	10.9497	11.2034	11.4639	12.0061	12.5779	13.1808
11	11.8633	12.1687	12.4835	12.8078	13.4864	14.2068	14.9716
12	13.0412	13.4121	13.7956	14.1920	15.0258	15.9171	16.8699
13	14.2368	14.6803	15.1404	15.6178	16.6268	17.7130	18.8821
14	15.4504	15.9739	16.5190	17.0863	18.2919	19.5986	21.0151
15	16.6821	17.2934	17.9319	18.5989	20.0236	21.5786	23.2760
16	17.9324	18.6393	19.3802	20.1569	21.8245	23.6575	25.6725
17	19.2014	20.0121	20.8647	21.7616	23.6975	25.8404	28.2129
18	20.4894	21.4123	22.3863	23.4144	25.6454	28.1324	30.9057
19	21.7967	22.8406	23.9460	25.1169	27.6712	30.5390	33.7600
20	23.1237	24.2974	25.5447	26.8704	29.7781	33.0660	36.7853
21	24.4705	25.7833	27.1833	28.6765	31.9692	35.7193	39.9927
22	25.8376	27.2990	28.8629	30.5368	34.2480	38.5052	43.3923
23	27.2251	28.8450	30.5844	32.4529	36.6179	41.4305	46.9958
24	28.6335	30.4219	32.3490	34.4265	39.0826	44.5020	50.8156
25	30.0630	32.0303	34.1578	36.4593	41.6459	47.7271	54.8645
26	31.5140	33.6709	36.0117	38.5530	44.3117	51.1135	59.1564
27	32.9867	35.3443	37.9120	40.7096	47.0842	54.6691	63.7058
28	34.4815	37.0512	39.8598	42.9309	49.9676	58.4026	68.5281
29	35.9987	38.7922	41.8563	45.2189	52.9663	62.3227	73.6398
30	37.5387	40.5681	43.9027	47.5754	56.0849	66.4388	79.0582
31	39.1018	42.3794	46.0003	50.0027	59.3283	70.7608	84.8017
32	40.6883	44.2270	48.1503	52.5028	62.7015	75.2988	90.8898
33	42.2986	46.1116	50.3540	55.0778	66.2095	80.0638	97.3432
34	43.9331	48.0338	52.6129	57.7302	69.8579	85.0670	104.1838
35	45.5921	49.9945	54.9282	60.4621	73.6522	90.3203	111.4348
36	47.2760	51.9944	57.3014	63.2759	77.5983	95.8363	119.1209
37	48.9851	54.0343	59.7339	66.1742	81.7022	101.6281	127.2681
38	50.7199	56.1149	62.2273	69.1594	85.9703	107.7095	135.9042
39	52.4807	58.2372	64.7830	72.2342	90.4091	114.0950	145.0585
40	54.2679	60.4020	67.4026	75.4013	95.0255	120.7998	154.7620
41	56.0819	62.6100	70.0876	78.6633	99.8265	127.8398	165.0477
42	57.9231	64.8622	72.8398	82.0232	104.8196	135.2318	175.9505
43	59.7920	67.1595	75.6608	85.4839	110.0124	142.9933	187.5076
44	61.6889	69.5027	78.5523	89.0484	115.4129	151.1430	199.7580
45	63.6142	71.8927	81.5161	92.7199	121.0294	159.7002	212.7435
46	65.5684	74.3306	84.5540	96.5015	126.8706	168.6852	226.5081
47	67.5519	76.8172	87.6679	100.3965	132.9454	178.1194	241.0986
48	69.5652	79.3535	90.8596	104.4084	139.2632	188.0254	256.5645
49	71.6087	81.9406	94.1311	108.5406	145.8337	198.4267	272.9584
50	73.6828	84.5794	97.4843	112.7969	152.6671	209.3480	290.3359

TABLA VII — VALOR ACTUAL DE RENTAS $a_{\overline{n}|i}$

n	$1\frac{1}{2}\%$	2%	$2\frac{1}{2}\%$	3%	4%	5%	6%
1	.9852	.9804	.9756	.9709	.9615	.9524	.9434
2	1.9559	1.9416	1.9274	1.9135	1.8861	1.8594	1.8334
3	2.9122	2.8839	2.8560	2.8286	2.7751	2.7232	2.6730
4	3.8544	3.8077	3.7620	3.7171	3.6299	3.5460	3.4651
5	4.7826	4.7135	4.6458	4.5797	4.4518	4.3295	4.2124
6	5.6972	5.6014	5.5081	5.4172	5.2421	5.0757	4.9173
7	6.5982	6.4720	6.3494	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824
8	7.4859	7.3255	7.1701	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098
9	8.3605	8.1622	7.9709	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017
10	9.2222	8.9826	8.7521	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601
11	10.0711	9.7868	9.5142	9.2526	8.7605	8.3064	7.8869
12	10.9075	10.5753	10.2578	9.9540	9.3851	8.8633	8.3838
13	11.7315	11.3484	10.9832	10.6350	9.9856	9.3936	8.8527
14	12.5434	12.1062	11.6909	11.2961	10.5631	9.8986	9.2950
15	13.3432	12.8493	12.3814	11.9379	11.1184	10.3797	9.7122
16	14.1313	13.5777	13.0550	12.5611	11.6523	10.8378	10.1059
17	14.9076	14.2919	13.7122	13.1661	12.1657	11.2741	10.4773
18	15.6726	14.9920	14.3534	13.7535	12.6593	11.6896	10.8276
19	16.4262	15.6785	14.9789	14.3238	13.1339	12.0853	11.1581
20	17.1686	16.3514	15.5892	14.8775	13.5903	12.4622	11.4699
21	17.9001	17.0112	16.1845	15.4150	14.0292	12.8212	11.7641
22	18.6208	17.6580	16.7654	15.9369	14.4511	13.1630	12.0416
23	19.3309	18.2922	17.3321	16.4436	14.8568	13.4886	12.3034
24	20.0304	18.9139	17.8850	16.9355	15.2470	13.7986	12.5504
25	20.7196	19.5235	18.4244	17.4131	15.6221	14.0939	12.7834
26	21.3986	20.1210	18.9506	17.8768	15.9828	14.3752	13.0032
27	22.0676	20.7069	19.4640	18.3270	16.3296	14.6430	13.2105
28	22.7267	21.2813	19.9649	18.7641	16.6631	14.8981	13.4062
29	23.3761	21.8444	20.4535	19.1885	16.9837	15.1411	13.5907
30	24.0158	22.3965	20.9303	19.6004	17.2920	15.3725	13.7648
31	24.6461	22.9377	21.3954	20.0004	17.5885	15.5928	13.9291
32	25.2671	23.4683	21.8492	20.3888	17.8736	15.8027	14.0840
33	25.8790	23.9886	22.2919	20.7658	18.1476	16.0025	14.2302
34	26.4817	24.4986	22.7238	21.1318	18.4112	16.1929	14.3681
35	27.0756	24.9986	23.1452	21.4872	18.6646	16.3742	14.4982
36	27.6607	25.4888	23.5563	21.8323	18.9083	16.5469	14.6210
37	28.2371	25.9695	23.9573	22.1672	19.1426	16.7113	14.7368
38	28.8051	26.4406	24.3486	22.4925	19.3679	16.8679	14.8460
39	29.3646	26.9026	24.7303	22.8082	19.5845	17.0170	14.9491
40	29.9158	27.3555	25.1028	23.1148	19.7928	17.1591	15.0463
41	30.4590	27.7995	25.4661	23.4124	19.9931	17.2944	15.1380
42	30.9941	28.2348	25.8206	23.7014	20.1856	17.4232	15.2245
43	31.5212	28.6616	26.1664	23.9819	20.3708	17.5459	15.3062
44	32.0406	29.0800	26.5038	24.2543	20.5488	17.6628	15.3832
45	32.5523	29.4902	26.8330	24.5187	20.7200	17.7741	15.4558
46	33.0565	29.8923	27.1542	24.7754	20.8847	17.8801	15.5244
47	33.5532	30.2866	27.4675	25.0247	21.0429	17.9810	15.5890
48	34.0426	30.6731	27.7732	25.2667	21.1951	18.0772	15.6500
49	34.5247	31.0521	28.0714	25.5017	21.3415	18.1687	15.7076
50	34.9997	31.4236	28.3623	25.7298	21.4822	18.2559	15.7619

TABLA VIII — AMERICAN EXPERIENCE MORTALITY TABLE

Edad	No. de personas	Personas que fallecen	Probabilidad anual de fallecimiento	Probabilidad anual de supervivencia	Edad	No. de personas	Personas que fallecen	Probabilidad anual de fallecimiento	Probabilidad anual de supervivencia
10	100 000	749	0.007 490	0.992 510	53	66 797	1 091	0.016 333	0.983 667
11	99 251	746	0.007 516	0.992 484	54	65 706	1 143	0.017 396	0.982 604
12	98 505	743	0.007 543	0.992 457	55	64 563	1 199	0.018 571	0.981 429
13	97 762	740	0.007 569	0.992 431	56	63 364	1 260	0.019 885	0.980 115
14	97 022	737	0.007 596	0.992 404	57	62 104	1 325	0.021 335	0.978 665
15	96 285	735	0.007 634	0.992 366	58	60 779	1 394	0.022 936	0.977 064
16	95 550	732	0.007 661	0.992 339	59	59 385	1 468	0.024 720	0.975 280
17	94 818	729	0.007 688	0.922 312	60	57 917	1 546	0.026 693	0.973 307
18	94 089	727	0.007 727	0.992 273	61	56 371	1 628	0.028 880	0.971 120
19	93 362	725	0.007 765	0.992 235	62	54 743	1 713	0.031 292	0.968 708
20	92 637	723	0.007 805	0.992 195	63	53 030	1 800	0.033 943	0.966 057
21	91 914	722	0.007 855	0.992 145	64	51 230	1 889	0.036 873	0.963 127
22	91 192	721	0.007 906	0.992 094	65	49 341	1 980	0.040 129	0.959 871
23	90 471	720	0.007 958	0.992 042	66	47 361	2 070	0.043 707	0.956 293
24	89 751	719	0.008 011	0.991 989	67	45 291	2 158	0.047 647	0.952 353
25	89 032	718	0.008 065	0.991 935	68	43 133	2 243	0.052 002	0.947 998
26	88 314	718	0.008 130	0.991 870	69	40 890	2 321	0.056 762	0.943 238
27	87 596	718	0.008 197	0.991 803	70	38 569	2 391	0.061 993	0.938 007
28	86 878	718	0.008 264	0.991 736	71	36 178	2 448	0.067 665	0.932 335
29	86 160	719	0.008 345	0.991 655	72	33 730	2 487	0.073 733	0.926 267
30	85 441	720	0.008 427	0.991 573	73	31 243	2 505	0.080 178	0.919 822
31	84 721	721	0.008 510	0.991 490	74	28 738	2 501	0.087 028	0.912 972
32	84 000	723	0.008 607	0.991 393	75	26 237	2 476	0.094 371	0.905 629
33	83 277	726	0.008 718	0.991 282	76	23 761	2 431	0.102 311	0.897 689
34	82 551	729	0.008 831	0.991 169	77	21 330	2 369	0.111 064	0.888 936
35	81 822	732	0.008 946	0.991 054	78	18 961	2 291	0.120 827	0.879 173
36	81 090	737	0.009 089	0.990 911	79	16 670	2 196	0.131 734	0.868 266
37	80 353	742	0.009 234	0.990 766	80	14 474	2 091	0.144 466	0.855 534
38	79 611	749	0.009 408	0.990 592	81	12 383	1 964	0.158 605	0.841 395
39	78 862	756	0.009 586	0.990 414	82	10 419	1 816	0.174 297	0.825 703
40	78 106	765	0.009 794	0.990 206	83	8 603	1 648	0.191 561	0.808 439
41	77 341	774	0.010 008	0.989 992	84	6 955	1 470	0.211 359	0.788 641
42	76 567	785	0.010 252	0.989 748	85	5 485	1 292	0.235 552	0.764 448
43	75 782	797	0.010 517	0.989 483	86	4 193	1 114	0.265 681	0.734 319
44	74 985	812	0.010 829	0.989 171	87	3 079	933	0.303 020	0.696 980
45	74 173	828	0.011 163	0.988 837	88	2 146	744	0.346 692	0.653 308
46	73 345	848	0.011 562	0.988 438	89	1 402	555	0.395 863	0.604 137
47	72 497	870	0.012 000	0.988 000	90	847	385	0.454 545	0.545 455
48	71 627	896	0.012 509	0.987 491	91	462	246	0.532 468	0.467 532
49	70 731	927	0.013 106	0.986 894	92	216	137	0.634 259	0.365 741
50	69 804	962	0.013 781	0.986 219	93	79	58	0.734 177	0.265 823
51	68 842	1 001	0.014 541	0.985 459	94	21	18	0.857 143	0.142 857
52	67 841	1 044	0.015 389	0.984 611	95	3	3	1,000 000	0.000 000

RESPUESTAS

NOTA: *Se proporcionan las respuestas de tres problemas por cada cuatro.*

EJERCICIO 1: ADICION Y SUSTRACCION

1: 6 2: 4 3: 2 5: 4 6: -7 7: 7 9: 2 10: 3
11: 17 13: 3 14: 30 15: -6 17: $4a$ 18: $3b$ 19: $7x$
21: $-2a + b$ 22: $2a + 7y$ 23: $10x - 10y$ 25: $6x - 4y + 5z$
26: $7w + 4t - 14u$ 27: $7r + 2u - 4t$ 29: $s - 4i - m$
30: $4t - 16u$ 31: $5s - 5a - y$ 33: $-s + 4a + 4w$
34: $-8b + 3u + 9t$ 35: $-5n + 2a + 6t$ 37: 12 38: 34
39: -23 41: $a - 2t$ 42: $h - e$ 43: $7a - s$ 45: $s + 7y$
46: $8m - 5a + 3n$ 47: $3y + 11s$ 49: 17 50: 33 51: 3
53: 1 54: 13 55: -1 57: $x + 2y$ 58: $5a - 2b + 2c$
59: $-3a + 2b + 5c$ 61: $4a + 3y$ 62: $5s - 3t$ 63: $-2a - b$
65: 0 66: 0 67: $5x + 3y$

EJERCICIO 2: MULTIPLICACION

1: a^5 2: a^9 3: b^4 5: $6a^5$ 6: $8x^8$ 7: $6y^5$ 9: $6a^7b^5$
10: $8a^5b^9$ 11: $15x^9y^7$ 13: $6a^4b^5c^4$ 14: $30a^3bc^5$ 15: $30x^3y^4z^2$
17: x^6 18: y^6 19: a^{20} 21: $8a^6b^9$ 22: $9a^6b^8$ 23: $625x^{12}y^4$
25: $2a^2 + a^2b + 2b^2$ 26: $2x^2 + 3y^2 - xy^2$ 27: $3x^2 - 4xy^2 + y^2$
29: $-4x^2 + 3x^2y - 3xy^2$ 30: $4a^2b$ 31: $-6a^2b$ 33: $2a^2 + 3ab - 2b^2$
34: $-2x^2 + 3xy + 9y^2$ 35: $8x^2 + 10xa - 3a^2$
37: $a^3 - a^2b - 7ab^2 - 2b^3$ 38: $2a^3 - 5a^2b + b^3$
39: $6x^3 - 19x^2y + 7xy^2 + 2y^3$ 41: $x^4 - x^2y^2 - 2xy^3 - y^4$
42: $x^4 + x^3y - 5x^2y^2 - 7xy^3 - 2y^4$ 43: $a^5 + a^4 - 3a^3 + 3a - 2$

EJERCICIO 3: DIVISION

1: x^5 2: y^2 3: w^3 5: $4x^6$ 6: $3x^6$ 7: $2x^5$ 9: ac
10: a^2b^4 11: x^5y 13: $3xy^2z^3$ 14: $3a^3b^3c^2$ 15: $4a^4bc^4$ 17: x^6/y^8

18: $27x^9/y^6$ 19: $16x^8/81y^{12}$ 21: $2x - 3$ 22: $a - 3$ 23: $a - 2b$
25: $2y - 1$ 26: $3y + 2$ 27: $2y^2 - 3y + 2$ 29: $y^2 + 2y - 1$
30: $x^2 - 3x + 1$ 31: $t + 2$ 33: $2x^2 - 3xy - y^2$ 34: $2x + 1$
35: $x - 2$ 37: $x^2 - 2x - 1, 1$ 38: $3x - 2, -2x - 3$
39: $x^2 - 2x + 3, -2$

EJERCICIO 4: OPERACIONES FUNDAMENTALES

1: -2 2: -3 3: 6 5: 6 6: 6 7: 1 9: -5 10: -19
11: -2 13: x 14: $-4a$ 15: $-10b$ 17: $3b - 4a$
18: $2x - 3y$ 19: $-2x - 2y$ 21: -3 22: -2 23: 8
25: -11 26: 30 27: -27 29: 10 30: -1 31: 6
33: 28 34: 210 35: 47 37: $6a + 2b - c$ 38: $-3y - 2z$
39: $9a + 2c$ 41: $2a + 2b + 6c$ 42: $-x - 4y - 3z$ 43: $3a - 2d + 2c$
45: $ab^2 - a^2b$ 46: $4x^3y^2$ 47: $4a^2b^3 - 6a^2b^2$ 49: $6a^2b^2$ 50: $3x^2y$
51: $-4x^3y^2$ 53: $-4a + 13b - 12c$ 54: $-2a - 28b + 3c$
55: $-a - b - 5c$ 57: $-a + 30b - 30c$ 58: $28t - 2r - 16s$
59: $-3x^2 + 3x - 6$ 61: $x^2 - 4xy + 3y^2$ 62: $x^2 + 5xy + 6y^2$
63: $2x^2 + 5xy - 3y^2$ 65: $a^2 - 4x^2 + 12xy - 9y^2$
66: $2a^2 - 7ax - ay + 3x^2 - 2xy - y^2$
67: $3a^2 - 7ab + 4ac + 2b^2 - 3bc + c^2$ 69: $a^4 + a^2b^2 + b^4$
70: $2x^4y^6 - x^8 - y^{12}$ 71: $a^6 + a^2b^4 - a^8 - b^4$ 73: $2a$ 74: $b^2 - b$
75: $x + 3xy - y^2$ 77: $3a - b$ 78: $3a + b$ 79: $3x - y$
81: $a^2 - ab + b^2$ 82: $a^2 - ab + b^2$ 83: $x^2 + xy - y^2$ 85: $a + b + c$
86: $2a + 3b - c$ 87: $3a + x - 2y$ 89: 0 90: x^5y^3 91: a^3b^4

EJERCICIO 5: BINOMIOS Y MULTINOMIOS

1: $x^2 + 5x + 6$ 2: $b^2 + 2b + 1$ 3: $3y^2 + 7y + 2$
5: $3x^2 + 5x - 2$ 6: $2x^2 - 7x + 3$ 7: $4b^2 + 9b + 2$
9: $7x^2 + 13x - 2$ 10: $6a^2 + 5a - 6$ 11: $16m^2 + 22m - 20$
13: $20a^2 - 27a - 14$ 14: $6r^2 + 12rs + 6s^2$ 15: $21i^2 - i - 10$
17: $8m^2 - 16mn + 6n^2$ 18: $72x^2 - 78xy + 15y^2$ 19: $12c^2 - 48cd + 21d^2$
21: $6w^2 + 17wz - 14z^2$ 22: $35i^2 - 11ji - 6j^2$
23: $50x^2 - 5xy - 10y^2$ 25: $x^2 + 4xy + 4y^2$
26: $4x^2 - 12x + 9$ 27: $a^2 + 6ab + 9b^2$ 29: $9a^2 - 6a + 1$
30: $9m^2 - 12mn + 4n^2$ 31: $9m^2 - 24mn + 16n^2$
33: $4a^2 - 12ab + 9b^2$ 34: $4x^2 + 20xy + 25y^2$
35: $16r^2 - 24rs + 9s^2$ 37: $16u^2 - 16uv + 4v^2$
38: $4i^2 + 28ji + 49j^2$ 39: $36z^2 - 60zw + 25w^2$ 41: 45 42: 396
43: 864 45: $x^2 - 9$ 46: $x^2 - 81$ 47: $m^2 - n^2$ 49: $x^2 - 9y^2$
50: $a^2 - 25b^2$ 51: $25x^2 - y^2$ 53: $9a^2 - 4b^2$ 54: $4x^2 - 9z^2$
55: $49y^2 - 16c^2$ 57: $4a^6 - 4b^2$ 58: $4x^4 - y^2$ 59: $9b^4 - 36c^6$
61: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25}$ 62: $\dfrac{9x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25}$ 63: $\dfrac{m^4}{9} - \dfrac{4n^6}{25}$
65: $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{9}{x^2}$ 66: $\dfrac{m^4}{9} - \dfrac{4}{25m^2}$ 67: $\dfrac{25a^2}{x^2} - \dfrac{y^2}{4b^2}$
69: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
70: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
71: $r^2 + s^2 + t^2 + 2rs - 2rt - 2st$
73: $a^2 + b^2 + 9c^2 - 2ab + 6ac - 6bc$
74: $x^2 + 9y^2 + z^2 - 6xy - 2xz + 6yz$
75: $x^4 + 14x^2 + 25 - 4x^3 - 20x$
77: $x^2 + 4y^2 + z^2 + 9r^2 - 4xy + 2xz - 6xr - 4yz + 12yr - 6zr$

78: $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 4w^2 + 12xy - 16xz - 8xw - 24yz - 12yw + 16zw$
79: $m^6 + 2m^5 - 3m^4 - 2m^3 + 6m^2 - 4m + 1$
81: $6a^2 + 12ab + 6b^2 - 5a - 5b - 6$
82: $60a^2 - 60ab + 15b^2 - 52a + 26b - 21$
83: $192a^2 - 96ac + 12c^2 + 20a - 5c - 25$ 85: $x^4 - 5x^2 + 4$
86: $a^4 + 5a^2 + 9$ 87: $9b^4 - 3b^2c^2 + c^4$ 89: $m^6 + m^4 - m^2 - 1$
90: $a^6 - 3a^4 + 7a^2 - 9$ 91: $9b^8 - 2b^5 + b^2 - b^6 - 4b^4$

EJERCICIO 6: FACTORIZACION

1: $x(z + y - x)$ 2: $2x(2x + y - 3y^2)$ 3: $3mn(m - 2n + 3m^2n)$
5: $2z(x + y)(1 + 2z)$ 6: $a(a + b)$ 7: $(2m - n)(3r + 5s - 4t)$
9: $(m - x)(m + x)$ 10: $(a - b)(a + b)$ 11: $(x - 3y)(x + 3y)$
13: $4(3x - y)(3x + y)$ 14: $(2m - n)(2m + n)$
15: $(a - 8b)(a + 8b)$ 17: $(3r - 5s)(3r + 5s)$
18: $4(b - 2d)(b + 2d)$ 19: $(3h - 5k)(3h + 5k)$
21: $4(2x^2 - y^3)(2x^2 + y^3)$ 22: $(5m^4 - 6n)(5m^4 + 6n)$
23: $(8x^3 - 7y^2)(8x^3 + 7y^2)$ 25: $(\frac{3}{4}r^2 - \frac{2}{5}s^2)(\frac{3}{4}r^2 + \frac{2}{5}s^2)$
26: $(\frac{4}{5}m^4 - \frac{4}{3}n^3)(\frac{4}{5}m^4 + \frac{4}{3}n^3)$ 27: $(\frac{9}{7}x^8 - \frac{5}{6}y^4)(\frac{9}{7}x^8 + \frac{5}{6}y^4)$
29: $(x^3 - y^2)(x^3 + y^2)$ 30: $(5a^2 - b^4)(5a^2 + b^4)$
31: $(7c^8 - 5c^2)(7c^8 + 5c^2)$ 33: $(x + 2)^2$ 34: $(m + n)^2$
35: $(a + 2)^2$ 37: $(3h + 1)^2$ 38: $(2k - 1)^2$ 39: $(5s - 1)^2$
41: $(3x + 2y)^2$ 42: $(4a + 3b)^2$ 43: $4(3m + 4n)^2$ 45: $\left(\frac{c}{4} - \frac{1}{c}\right)^2$
46: $\left(\frac{m}{2} + \frac{3}{n^2}\right)^2$ 47: $\left(\frac{x}{5} - \frac{y}{2}\right)^2$ 49: $(3h - 2k)^2$ 50: $(5a^4 - 3b^5)^2$
51: $(6x^3 + 5y^2)^2$ 53: $(x + 3)(x + 1)$ 54: $(5y + 1)(y + 1)$
55: $(9m + 1)(m + 1)$ 57: $(3c - 2)(c - 3)$ 58: $(5x - 3)(x - 5)$
59: $(6x - 5)(x - 1)$ 61: $(3y - 2)(y + 1)$ 62: $(5x + 2)(x - 1)$
63: $(7h - 3)(h + 1)$ 65: $(2r + 7)(3r - 1)$ 66: $3(2y - 1)(y + 1)$
67: $(3a - 5)(3a + 1)$ 69: $5(x + y)(x + 3y)$ 70: $(3a + 2b)(a + 8b)$
71: $(6u - 5v)(2u - v)$ 73: $(h + 5k)(6h - k)$ 74: $(3c + 4d)(c - d)$
75: $(5a - 2b)(a + 3b)$ 77: $4(2p - q)(p - 2q)$
78: $(3y + 2z)(5y + 3z)$ 79: $(4b - 9c)(3b - c)$
81: $(9a - 4b)(2a + 3b)$ 82: $(7x - 4y)(2x + 3y)$
83: $3(2h - k)(3h + 5k)$ 85: $a^2(3a + 7)(4a - 5)$
86: $6x^3(x - 1)(3x + 4)$ 87: $3(3x^3 + 2y^2)(x^3 - y^2)$
89: $3(9a^4b^3 - 8)(a^4b^3 + 1)$ 90: $(15x^5y^4 - 16)(x^5y^4 + 2)$
91: $(3a^3 - 4b^5)(5a^3 + 3b^5)$ 93: $(x + y - z)(x + y + z)$
94: $(m - 3n - 3z)(m - 3n + 3z)$ 95: $(2a + b + 4c)(2a + b - 4c)$
97: $(6x - y - 3z)(6x + y + 3z)$ 98: $(7 - 3a + b)(7 + 3a - b)$
99: $(8a + 3b - 2c)(8a - 3b + 2c)$
101: $(m - 3n - y + 5z)(m - 3n + y - 5z)$
102: $(5a - 3b - 3m + 4n)(5a - 3b + 3m - 4n)$
103: $(3r - 5s - 9t - 5u)(3r - 5s + 9t + 5u)$

EJERCICIO 7: FACTORIZACION DE BINOMIOS

1: $(c - d)(c^2 + cd + d^2)$ 2: $(m - n)(m^2 + mn + n^2)$
3: $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ 5: $(c - 3d)(c^2 + 3cd + 9d^2)$
6: $(j - 2k)(j^2 + 2jk + 4k^2)$ 7: $(m + 3k)(m^2 - 3mk + 9k^2)$
9: $(3u - 5v)(9u^2 + 15uv + 25v^2)$ 10: $(4p - 5q)(16p^2 + 20pq + 25q^2)$
11: $8(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$ 13: $(m^2b - 3)(m^4b^2 + 3m^2b + 9)$
14: $(7x^3k^2 - 5)(49x^6k^4 + 35x^3k^2 + 25)$

15: $27(a^5b^4 + 2)(a^{10}b^8 - 2a^5b^4 + 4)$
17: $(m - n)(m + n)(m^2 + n^2)$ 18: $(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$
19: $(a + 3)(a - 3)(a^2 + 9)$
21: $(a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
22: $(y^2 + 9)(y^4 - 9y^2 + 81)$
23: $(2m - 1)(2m + 1)(4m^2 + 2m + 1)(4m^2 - 2m + 1)$
25: $(m - s)(m + s)(m^2 + ms + s^2)(m^2 - ms + s^2)$
26: $(p^2 - s)(p^2 + s)(p^4 + s^2)$ 27: $(p^4 + q^2)(p^8 - p^4q^2 + q^4)$
29: $(h^4 + k^4)(h^8 - h^4k^4 + k^8)$ 30: $(5a^9 - 1)(25a^{18} + 5a^9 + 1)$
31: $(x - y)(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6)$
33: $(m - n)(m + n)(m^2 + n^2)(m^8 + m^4n^4 + n^8)$
34: $(p - q)(p + q)(p^6 + p^5q + p^4q^2 + p^3q^3 + p^2q^4 + pq^5 + q^6)(p^6 - p^5q + p^4q^2 - p^3q^3 + p^2q^4 - pq^5 + q^6)$
35: $(a + y)(a^2 - ay + y^2)(a^6 - a^3y^3 + y^6)$
37: $(a - b - 1)(a^2 - 2ab + b^2 + a - b + 1)$
38: $(m + n + 2)(m^2 + 2mn + n^2 - 2m - 2n + 4)$
39: $(3x - y + 3)(9x^2 - 6xy + y^2 - 9x + 3y + 9)$
41: $(2 - 3b + 2c)(4 + 6b - 4c + 9b^2 - 12bc + 4c^2)$
42: $(5 + x - y)(25 - 5x + 5y + x^2 - 2xy + y^2)$
43: $(a^4 - a^2 + 1)(a^8 + a^6 - 2a^2 + 1)$

EJERCICIO 8: FACTORIZACION POR AGRUPACION

1: $(m + 1)(n + 1)$ 2: $(a + 1)(b + 3)$ 3: $(u + 5)(v + 2)$
5: $(r + 6)(s - 1)$ 6: $(c + 1)(c - 3d)$ 7: $(x + 3y)(2x - 5)$
9: $(m + n)(c + d)$ 10: $(a - b)(b + c)$ 11: $(3u - 5s)(2t + r)$
13: $(2h - 3k)(5h - 2j)$ 14: $3(2a - b)(a - 6c)$
15: $(7r - 3s)(3r + 5z)$ 17: $(x - y + z)(x - 1)$
18: $(m - n - p)(m + 1)$ 19: $(h - 3k - j)(h - p)$
21: $(a + b)(a - b - 1)$ 22: $(u - v)(u + v - 1)$
23: $(h - k)(h - k - j)$ 25: $(m + n)(m^2 - mn + n^2 - m - n)$
26: $(r + s)(r + s - r^2 + rs - s^2)$ 27: $(2a + b)(a - b - 4a^2 + 2ab - b^2)$
29: $(x + 2y - 4)(x - 2y + 4)$ 30: $(u + 5v + 2t)(u + 5v - 2t)$
31: $(3a + b - 2d)(3a - b + 2d)$
33: $(m - 3n + 2p + 2z)(m - 3n - 2p - 2z)$
34: $(5r - s + t - 2u)(5r - s - t + 2u)$
35: $(3x + 4y + z + 3t)(3x + 4y - z - 3t)$
37: $(a - b)(a - 3b + 2c)$ 38: $(x - y)(x - 3y + z)$
39: $(2s - 2m + 3n)(3m - 2n)$ 41: $(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$
42: $(a^2 - 3a - 5)(a^2 + 3a - 5)$ 43: $(m^2 + m + 2)(m^2 - m + 2)$
45: $(c^2 + 2c + 2)(c^2 - 2c + 2)$ 46: $(a^2 - 2ab + 3b^2)(a^2 + 2ab + 3b^2)$
47: $(x^2 + xy + 4y^2)(x^2 - xy + 4y^2)$
49: $(2c^2 - 2cd - 3d^2)(2c^2 + 2cd - 3d^2)$
50: $(3u^2 - 3uv + 4v^2)(3u^2 + 3uv + 4v^2)$
51: $(6a^2 - 2ab - 3b^2)(6a^2 + 2ab - 3b^2)$

EJERCICIO 9: PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACION

1: $2a^2 + 7a + 3$ 2: $3x^2 + 7x + 2$ 3: $4c^2 + 13cd + 3d^2$
5: $10s^2 - 26st + 12t^2$ 6: $21a^2 - 29ab + 10b^2$ 7: $6h^2 - 19hk + 15k^2$
9: $12s^2 + 7st - 10t^2$ 10: $21a^2 + 25ab - 10b^2$
11: $28t^2 + 2tu - 6u^2$ 13: $24x^2 - 47xy - 21y^2$
14: $20c^2 + 13cd - 21d^2$ 15: $15a^2 + 24ab - 63b^2$
17: $24h^2 - 18hk - 27k^2$ 18: $28x^2 + 27xy - 36y^2$

19: $35c^2 - 67cd - 22d^2$ 21: $m^2 - 25$ 22: $b^2 - 9$ 23: $9x^2 - 1$
25: $9x^2 - y^2$ 26: $4t^2 - s^2$ 27: $9a^2 - 4b^2$ 29: $16a^2 - 9b^2$
30: $36h^2 - 25k^2$ 31: $49m^2 - 25n^2$ 33: $m^2 + 6mn + 9n^2$
34: $9r^2 - 6rs + s^2$ 35: $36p^2 + 60pq + 25q^2$ 37: $\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}xy + 4y^2$
38: $\frac{4}{25}a^2 - 2ab + \frac{25}{4}b^2$ 39: $\frac{25}{16}r^2 + 2rs + \frac{16}{25}s^2$
41: $9a^4 - 12a^2b^3 + 4b^6$ 42: $4x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4$
43: $36p^{10} + 60p^5q^2 + 25q^4$ 45: $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$
46: $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ 47: $m^2 + 2mn + n^2 - 9p^2$
49: $x^2 + 10xz + 25z^2 - 4y^2$ 50: $9r^2 + 24rt + 16t^2 - 4s^2$
51: $h^2 - 9k^2 - 6jk - j^2$ 53: $r^2 + s^2 + t^2 + 2rs + 2rt + 2st$
54: $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$ 55: $a^2 + b^2 + 9c^2 + 2ab - 6ac - 6bc$
57: $m^2 + 9b^2 + c^2 + 4d^2 + 6mb + 2mc + 4md + 6bc + 12bd + 4cd$
58: $m^6 + 6m^5 + 7m^4 - 10m^3 - 11m^2 + 4m + 4$
59: $r^6 - 4r^5 - 2r^4 + 20r^3 - 7r^2 - 24r + 16$
61: $6a(a - 2b - 3c)$ 62: $2mn(m + 3n + 4s)$
63: $9xz(y - 2xt + 3x^2z)$ 65: $4xy(4xy^2 + 5x^2y + 7)$
66: $5pq(2p^2q^2 - 4p + 5q)$ 67: $4mn(3mn - 2mp - 5np)$
69: $(x + 4)(x - 4)$ 70: $(a + 3)(a - 3)$ 71: $9(u - 2b)(u + 2b)$
73: $3(3b^2 - 4c)(3b^2 + 4c)$ 74: $3(2a^3 + 3b^2)(2a^3 - 3b^2)$
75: $5cd(3c - 4d)(3c + 4d)$ 77: $(4a + b)^2$ 78: $(5x - y)^2$
79: $(4u + v)^2$ 81: $4(3h^3 - k)^2$ 82: $(5a^2 - 3b^4)^2$ 83: $(7x + 4y^5)^2$
85: $(x - 3)(x - 5)$ 86: $(y + 3)(y + 2)$ 87: $(m + 3)(m - 2)$
89: $(3x - 2y)(2x + y)$ 90: $(5r - t)(2r + 3t)$
91: $2(3a - b)(a + 2b)$ 93: $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
94: $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ 95: $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$
97: $8(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$ 98: $(3a^2 + 1)(9a^4 - 3a^2 + 1)$
99: $(2 + y^2)(4 - 2y^2 + y^4)$ 101: $z(y - 3)(x + 2)$
102: $c(a + b)(b - 3)$ 103: $(b + c + d)(x - y)$
105: $(m - 2b - 1)(m + 2b)$ 106: $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2 + 1)$
107: $(2x - y)(2x + y + 4x^2 + 2xy + y^2)$
109: $(m^2 + n^2)(m + n)(m - n)$ 110: $(a + 3)(a - 3)(a^2 + 9)$
111: $(z + 2w)(z - 2w)(z^2 + 4w^2)$
113: $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
114: $(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^6 - a^3b^3 + b^6)$
115: $(x^2 - y)(x^2 + y)(x^4 + x^2y + y^2)(x^4 - x^2y + y^2)$
117: $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
118: $(a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$
119: $(u - v)(u + v)(u^6 + u^5v + u^4v^2 + u^3v^3 + u^2v^4 + uv^5 + v^6)(u^6 - u^5v + u^4v^2 - u^3v^3 + u^2v^4 - uv^5 + v^6)$ 121: $(a^2 + a + 3)(a^2 - a + 3)$
122: $(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$ 123: $(3c^2 + c + 1)(3c^2 - c + 1)$
125: $(a^2 - 4ab - 2b^2)(a^2 + 4ab - 2b^2)$
126: $(2x^2 - xy + 3y^2)(2x^2 + xy + 3y^2)$
127: $(2b^2 + 3bc - 3c^2)(2b^2 - 3bc - 3c^2)$ 129: $(m - n - 1)(m + n)$
130: $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y)$ 131: $(a^2 + 2)(a^4 + a^2 + 4)$
133: $(3 + c - 2d)(3 - c + 2d)$ 134: $(2r^2 + r + 2s)(2r^2 - r - 2s)$
135: $(x - 3y + a - b)(x - 3y - a + b)$

EJERCICIO 10: CONVERSION Y REDUCCION DE FRACCIONES.

1: $\dfrac{-3}{2 - y}$ 2: $\dfrac{2y - x}{y - x}$ 3: $\dfrac{a - 3b + c}{-2a + b + c}$ 5: a^2/ab 6: c^2/cd

7: as/st 9: b^2/b 10: $3/x$ 11: $2/a$ 13: $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$

14: $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-1}$ 15: $\dfrac{a^2+7a+10}{a^2-25}$ 17: $\dfrac{a+2}{a+3}$ 18: $\dfrac{2a-1}{a-2}$

19: $\dfrac{x-3}{x+3}$ 21: $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}$ 22: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$ 23: $\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2+5x+2}$

25: $\dfrac{x-2}{x+2}$ 26: $\dfrac{x+1}{x-2}$ 27: $\dfrac{x+1}{x+3}$ 29: $\dfrac{a-b}{a+b}$ 30: $\dfrac{a+2b}{2a+b}$

31: $\dfrac{x+2y}{2x-y}$ 33: $\dfrac{x-y}{2x-y}$ 34: $\dfrac{x-y}{2x-y}$ 35: $\dfrac{s-t}{2s+t}$

37: $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ 38: $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}$ 39: x^2+y^2 41: $\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

42: $\dfrac{b^4+b^2d^2+d^4}{b^2+d^2}$ 43: $\dfrac{1}{x^2-y^2}$ 45: $\dfrac{2x+1}{x-1}$ 46: $\dfrac{3x+1}{3x-5}$

47: $\dfrac{1}{2x+1}$ 49: $\dfrac{2x-1}{2x+1}$ 50: $\dfrac{x+3}{2x+1}$ 51: $\dfrac{x}{2x+1}$

EJERCICIO 11: MULTIPLICACION Y DIVISION DE FRACCIONES

1: $5a^2/2b^2$ 2: $21/10y^5$ 3: $28\,ab^3c^2/15$ 5: $3x/2a$ 6: $3x/2$

7: $3y^4/4z^2$ 9: $ac/5$ 10: $5x^3/2z^4$ 11: $5a^2b/11c$ 13: $\frac{1}{6}$

14: $\frac{3}{2}$ 15: $4a/3b$ 17: $\dfrac{x+3}{2(x+4)}$ 18: $\dfrac{x+4}{3(2x+5)}$ 19: $\dfrac{x(x-2)}{x+1}$

21: $3(a-2b)/b$ 22: $8y(3x-2y)$ 23: $5xy^2$ 25: ab 26: xy

27: $y/2$ 29: $\dfrac{x+3}{x-3}$ 30: $\dfrac{x-3}{x-2}$ 31: $\dfrac{2x+1}{x+2}$ 33: $\dfrac{x+y}{x-y}$

34: $\dfrac{r-s}{r+s}$ 35: 1 37: $\dfrac{a+3}{a+1}$ 38: $\dfrac{b-2}{b+2}$ 39: $\dfrac{r-4}{r+2}$

41: $x-3$ 42: $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-2}$ 43: $\dfrac{(x-4)(x+1)^2}{(x-1)(x-2)^2}$ 45: 1

46: $\dfrac{a-1}{a+1}$ 47: $\dfrac{a-1}{3a-4}$

EJERCICIO 12: REDUCCION DE FRACCIONES

1: $2ac/3bc$ 2: $3xz/5yz$ 3: $15a^2yw/6ay^2$ 5: $\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$

6: $\dfrac{(x+3)(x-3)}{(2x-1)(x-3)}$ 7: $\dfrac{(2x-y)(x-2y)}{(3x+y)(x-2y)}$ 9: $\dfrac{15ab^2c}{6b^2c^2}, \dfrac{4abc}{6b^2c^2}, \dfrac{7abc}{6b^2c^2}$

10: $\dfrac{9a^3b^2}{15a^2b^3c^2}, \dfrac{30b^4c}{15a^2b^3c^2}, \dfrac{5ac^3}{15a^2b^3c^2}$ 11: $\dfrac{70a^3b^2c^3}{105a^2b^2c^3}, \dfrac{63b^3c^2}{105a^2b^2c^3}, \dfrac{75abc^4}{105a^2b^2c^3}$

13: $\dfrac{2(x+4)}{x^2-16}, \dfrac{3x(x-4)}{x^2-16}, \dfrac{x^2}{x^2-16}$

14: $\dfrac{x+2}{(x-2)^2(x+2)}, \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^2(x+2)}, \dfrac{3(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)}$

15: $\dfrac{(a-b)^2}{(a^2-b^2)(a+2b)}, \dfrac{(a+b)^2}{(a^2-b^2)(a+2b)}, \dfrac{(a+2b)^2}{(a^2-b^2)(a+2b)}$ 17: 1

18: $\frac{4}{3}$ 19: 1 21: $\dfrac{70x^2+63y^2-75z^2}{105xyz}$ 22: $\dfrac{45a^3-20ab+24c^2}{30a^2bc}$

23: $\dfrac{6a^3c-4ab^3+5bc^3}{18a^2b^2c^2}$ 25: $\dfrac{8rs-6st-2rt+3t^2}{12rst}$ 26: $\dfrac{3(b-a)}{4ab}$

27: $\dfrac{2y-x}{4xy}$ 29: $\dfrac{a-2b}{a}$ 30: $\dfrac{r+s}{r}$ 31: 1 33: $\dfrac{x+1}{x(x+2)}$

34: $\dfrac{x-2}{x(x-1)}$ 35: $\dfrac{a-b}{a(a+2b)}$ 37: $\dfrac{2}{(2r-3s)(2r+s)}$ 38: 0

39: $\dfrac{3}{(x-y)(x-2y)}$ 41: $\dfrac{4}{3a-2b}$ 42: $\dfrac{ab}{2a-b}$ 43: $\dfrac{2x+y}{x+3y}$

45: $\dfrac{1}{r+s}$ 46: $\dfrac{x+y}{(x-y)(z-y)}$ 47: $\dfrac{-2y^3(x^2+y^2)}{x^6-y^6}$

EJERCICIO 13: REDUCCION DE FRACCIONES COMPLEJAS

1: $\frac{4}{5}$ 2: $\frac{7}{3}$ 3: $\frac{90}{49}$ 5: $2x-1$ 6: $\dfrac{2x-1}{x}$ 7: $\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$

9: $x-1$ 10: $x-2$ 11: $\dfrac{x-1}{x+3}$ 13: $\dfrac{2(a-3b)}{2a-3b}$ 14: 1

15: $\dfrac{2(x-y)}{x+y}$ 17: $\dfrac{x}{x-2}$ 18: $\dfrac{x+2}{x-1}$ 19: 1 21: $\dfrac{x-1}{x+3}$

22: $\dfrac{x-2}{2x-1}$ 23: $\dfrac{3x-2}{x-1}$ 25: $(a-2)(a-1)$ 26: $\dfrac{a+b}{3a-b}$

27: $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ 29: $\dfrac{a+b}{a+2b}$ 30: $\dfrac{x+y}{x-y}$ 31: $\dfrac{b(b-a)}{a}$

EJERCICIO 14: OPERACION CON FRACCIONES

1: $\frac{4}{10}$ 2: $\frac{9}{21}$ 3: $\frac{2}{3}$ 5: $6a^2b^2c/3abc^2$ 6: $20x^4y^2/5x^2yz^3$

7: $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$ 9: $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^2-7x+6}$ 10: $\dfrac{9x^2-1}{3x^2+10x+3}$

11: $\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}$ 13: $\dfrac{x-1}{x+3}$ 14: $\dfrac{2x-1}{2x+1}$ 15: $\dfrac{a-2b}{a+2b}$

17: $\dfrac{b+y}{b-y}$ 18: $\dfrac{2x-y}{x-2y}$ 19: $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ 21: $(a+b)(a-b)$

22: $\dfrac{3x+1}{3x-4}$ 23: $\dfrac{2x+5}{2x+3}$ 25: $\dfrac{2x-3}{2x-1}$ 26: $\dfrac{2x-1}{2x-3}$ 27: $a^2/9b^3$

29: $3xy^5/2$ 30: $2x^2y^2/3$ 31: $7b^2/3a^5x^5$ 33: $\frac{1}{6}$ 34: $\frac{3}{4}$

35: $\dfrac{a+2}{3(x+3)}$ 37: $\dfrac{3x^2(x-3y)}{y^2}$ 38: $\dfrac{1}{2st(3t+2)(2t-3)}$ 39: $2x$

41: $\dfrac{x-1}{x+2}$ 42: $\dfrac{4x+1}{x+4}$ 43: $\dfrac{2a+3b}{a+3b}$ 45: $\dfrac{3x+1}{x+1}$ 46: $\dfrac{2x-1}{x+2}$

47: $\dfrac{a-3}{a-1}$ 49: $\dfrac{2x-3}{x-3}$ 50: $\dfrac{x-3}{x-2}$ 51: $\dfrac{28a^2b^2c}{42a^2bc}, \dfrac{105a^3b}{42a^2bc}, \dfrac{18ac^3}{42a^2bc}$

53: $\dfrac{(x+y)^2}{(x+y)(x+2y)(x-3y)}, \dfrac{(x+2y)^2}{(x+y)(x+2y)(x-3y)}, \dfrac{(x-3y)^2}{(x+y)(x+2y)(x-3y)}$

54: $\dfrac{(2r-s)^2}{(2s-r)(s+3r)(2r-s)}, \dfrac{(2s-r)^2}{(2s-r)(s+3r)(2r-s)}, \dfrac{(s+3r)^2}{(2s-r)(s+3r)(2r-s)}$

55: $\frac{27}{70}$ 57: $(8a^2-15b^2+10c^2)/20abc$

58: $(45a^3c-20ab^3+18bc^3)/30a^2b^2c^2$ 59: $-1/5y$ 61: $\dfrac{x+2}{x}$

62: $\dfrac{x+2}{x(x-1)}$ 63: $\dfrac{1}{(x-2y)(x+3y)}$ 65: $\dfrac{1}{x-3y}$

66: $\dfrac{(3x-2y)(3x-y)}{(2x-y)(2x+y)(x+2y)}$ 67: $\frac{4}{5}$ 69: $3x+2$ 70: $\dfrac{2x-3}{2x+1}$

71: $\frac{x-1}{2x+1}$ 73: $\frac{x+2}{3x+2}$ 74: $\frac{x+3}{x-2}$ 75: $\frac{2x-1}{x-4}$ 77: $\frac{x+4}{x-6}$
78: $\frac{1}{2x-5y}$ 79: $\frac{(3x-4y)(x+y)}{(2x-3y)(y-x)}$

EJERCICIO 15: RESOLUCION DE ECUACIONES

13: 3 14: 3 15: −2 17: −4 18: 3 19: $\frac{1}{2}$ 21: −3
22: 3 23: 5 25: 6 26: 12 27: 18 29: 6 30: 16
31: 24 33: 10 34: 12 35: 5 37: $1/a$ 38: $\frac{ab}{a+b}$
39: $\frac{a}{a-b}$ 41: 7 42: 3 43: 5 45: 6 46: 9 47: 11
49: 3 50: 4 51: 2 53: a/b 54: $\frac{cd}{c+2d}$ 55: $\frac{rs}{r+s}$
57: 4 58: 6 59: 7 61: 5 62: 3 63: 7 65: −3
66: 6 67: −4 69: 3 70: 2 71: 2 81: $\frac{mn-3}{m}$
82: $\frac{2-2d}{3}$ 83: $\frac{S-a}{S-l}$ 85: $\frac{L_2-L_1}{\alpha L_1}$ 86: $\frac{2A-ah}{h}$
87: $\frac{W(v_1^2-v_2^2)}{2Pg}$ 89: $\frac{E_1-E_2}{vc}$ 90: $\frac{2Es+2e^2}{sr^2\omega^2}$ 91: $\frac{25L}{MF-L}$

EJERCICIO 16: RESOLUCION DE PROBLEMAS MEDIANTE EL USO DE ECUACIONES

1: 19, 20, 21 2: \$520, \$780 3: 20 5: 33, 45 6: 408 7:150 kms. 9: Juana, 6 horas; Julia, 5 horas; Josefa, 7 horas 10: \$2400 11: 180 kms. 13: 400 14: \$5000 15: 14 meses 17: 24 18: 315 19: Juan 2 años, Santiago 8 años 21: 195 kms. 22: 3 kms. por hora 23: Samuel, 40 kms. por hora: Tomás, 50 kms. por hora 25: 16 kms. 26: 54 minutos 27: 14.4 minutos 29: $3\frac{1}{3}$ horas 30: $1\frac{1}{5}$ horas 31: $5\frac{5}{6}$ horas 33: 1 hora 16 minutos 34: 8 horas 15 minutos 35: 19 horas 12 minutos 37: $\frac{3}{4}$ de docena de rosas, $1\frac{1}{4}$ de docena de claveles 38: 2.5 litros 39: 0.2 litros 41: 55 kms. por hora 42: Automóvil, 20 kms. por hora; tren, 40 kms. por hora 43: 5 kms. por hora 45: 15 millas 46: 5 kms. 47: \$10.

EJERCICIO 17: FUNCIONES

1: 7, —11, —5, —2 2: 8, —7, —12, 1 3: 10, —11, 0, 7 5: 0, 0, 10
6: 14, 10, 7 7: 38, 4, 10 9: $\frac{5}{12}$, 0, $\frac{3}{4}$ 10: $\frac{1}{21}$, $-\frac{8}{3}$, 0
11: 0, $\frac{5}{12}$, no hay valor 13: 0, no hay valor, $-\frac{5}{3}$ 14: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$
15: $\frac{25}{4}$, 0, —50 17: $(x-1)(x-2)$, $(x-2)(x-3)$, $2(2x-1)(x-1)$
18: s^2+2s-1, s^2+4s+2, $4s^2+4s-1$
19: $2t^2-3t+5$, $2t^2-11t+19$, $18t^2-9t+5$ 21: $(t-2)(t+2)$
22: y^2 23: $(c+1)/(c-2)$ 25: 5, —11 26: —23, —9
27: 2,0 29: 296, 528 30: 81, 18 31: $\frac{1+t-t^2}{1+t+t^2}$, $1-2t$

EJERCICIO 18: GRAFICAS

2: En el eje Y; en el eje X; en el primer o tercer cuadrantes; en el segundo o cuarto cuadrantes

3: 5 unidades sobre el eje X; 2 unidades a la derecha del eje Y; 4 unidades a la izquierda del eje Y; 1 unidad bajo el eje X

5: 3   6: -4 7: -2 9: 1.5   10: 0.7   11: 1.8

13: 3.5   14: 2.7   15: -1.8 17: 3.4, 6   18: -4.3, $-.7$

19: 2.7, 0.3   21: -3.8, 1.4   22: -1.2, 0.6   23: 3.4, $-.4$

EJERCICIO 20: RESOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES

1: $x = 4.0$, $y = -2.0$ 2: $x = -1.0$, $y = 3.0$ 3: $x = 2.0$, $y = -3.0$

5: $x = 0.5$, $y = -1.0$ 6: $x = 2.0$, $y = -1.5$ 7: $x = 2.5$, $y = 2.0$

9: $x = 1.3$, $y = -2.3$ 10: Inconsistentes   11: Inconsistentes

13: Dependientes   14: Dependientes   15: $x = -1.2$, $y = 1.6$

17: Inconsistentes   18: Inconsistentes   19: $x = 2.0$, $y = 0.2$

21: $x = 0$, $y = 0.8$ 22: Dependientes   23: $x = 0.3$, $y = 0.4$

25: $x = 6.7$, $y = 2.0$ 26: $x = \frac{2}{3}$, $y = 1.6$ 27: $x = -2$, $y = -1.2$

EJERCICIO 21: RESOLUCION ALGEBRAICA DE ECUACIONES

1: $x = 2, y = 3$ 2: $x = -1, y = -2$ 3: $x = 1, y = 2$

5: $x = 3, y = -1$ 6: $x = 2, y = -3$ 7: $x = -3, y = -4$

9: $x = \frac{1}{2}, y = 2$ 10: $x = 1\frac{1}{2}, y = 1\frac{1}{3}$ 11: $x = 2\frac{1}{4}, y = -1\frac{2}{3}$

13: $x = 6, y = 4$ 14: $x = -3, y = 0$ 15: $x = -2, y = \frac{3}{4}$

17: $x = -2, y = 1$ 18: $x = 3, y = 2$ 19: $x = 2, y = -1$

21: $x = 4, y = -6$ 22: $x = 2, y = -5$ 23: $x = 4, y = -6$

25: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{5}{6}$ 26: $x = \frac{4}{3}, y = \frac{3}{2}$ 27: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$

29: $x = 3, y = 1$ 30: $x = 2, y = 5$ 31: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}$

33: $x = -2, y = 1$ 34: $x = 2, y = -1$ 35: $x = 3, y = 2$

37: $x = -3, y = 2$ 38: $x = 5, y = 3$ 39: $x = 10, y = 2$

41: $x = 3, y = 1$ 42: $x = 4, y = 5$ 43: $x = 2, y = 1$

45: $x = a/b, y = b/a$ 46: $x = a - b, y = 2a$

47: $x = b^2/a, y = a^2/b$ 49: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{5}$ 50: $x = -3, y = -4$

51: $x = 4, y = \frac{3}{2}$ 53: $x = -3, y = \frac{5}{2}$ 54: $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

55: $x = 3, y = -5$

EJERCICIO 22: RESOLUCION DE ECUACIONES CON TRES INCOGNITAS

1: $x = 3, y = 1, z = -2$ 2: $x = -3, y = 2, z = 4$

3: $x = 5, y = -3, z = 1$ 5: $x = 3, y = 4, z = -5$

6: $x = -4, y = -5, z = 2$ 7: $x = 3, y = 1, z = 6$

9: $x = 3, y = -4, z = 6$ 10: $x = -5, y = 6, z = 4$

11: $x = 7, y = 6, z = 5$ 13: $x = \frac{3}{5}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{6}$

14: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{3}{4}$ 15: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{6}, z = \frac{1}{3}$

17: $x = -\frac{5}{6}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{7}{8}$ 18: $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}$

19: $x = -\frac{3}{4}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{5}{2}$ 21: $x = -5, y = 3, z = 2$

22: $x = 2, y = -3, z = 4$ 23: $x = 7, y = 4, z = -5$

25: $x = 3, y = 5, z = -2$ 26: $x = -7, y = -2, z = 3$

27: $x = 5, y = 2, z = -8$

EJERCICIO 23: PROBLEMAS RELACIONADOS CON ECUACIONES SIMULTANEAS

1: Hermano mayor, \$2 000; hermano menor, \$1 800

2: 48 kms., 20 kms.

3: Tomás, $ 425; Ricardo, $200 5: 60 plumas, 40 lápices
6: 300 distintivos, 250 calcomanías 7: Helicóptero, 5; camión, 2
9: $750, $2000 10: Binoculares, $400; radio, $500
11: 250 paquetes de dulces, 315 bolsas de nueces 13: 53
14: $5250 al 4%, $3085 al 3% 15: 321 kms. por hora, 15 kms. por hora
17: 65 kms. en automóvil, 320 kms. en autobús
18: Hermano mayor, 4 horas; hermano menor, 5 horas
19: 64 kms. por hora, camión; 80 kms. por hora, autobús
21: 20000 metros cuadrados, área original; 10000 metros cuadrados, nueva área
22: 20 horas 23: 20 días, 294 kms.
25: Vestido, $200; zapatos, $160; bolso, $50
26: Roberto, $840; Guillermo, $760; Juan, $860
27: 90 blancos, 60 azules, 135 amarillos
29: 150 ramilletes, 200 listones, 300 banderolas
30: Raymundo, 6 horas; Teodoro, $4\frac{1}{2}$ horas; Juan, $3\frac{3}{5}$ horas
31: Tren, 7 horas; taxi, 0.1 horas; autobús, 0.5 horas

EJERCICIO 24: DETERMINANTES

1: 2 2: 1 3: 26 5: 10 6: 28 7: 5 9: 46 10: −69
11: −61 13: 178 14: 214 15: 390 17: $x = 3, y = 2$
18: $x = 2, y = -1$ 19: $x = -1, y = 3$ 21: $x = 3, y = \frac{1}{2}$
22: $x = \frac{1}{2}, y = 2$ 23: $x = \frac{1}{4}, y = 0$ 25: $x = b, y = a + b$
26: $x = a, y = b$ 27: $x = a - b, y = a + b$ 29: $x = 2, y = 1, z = 3$
30: $x = 1, y = 3, z = 1$ 31: $x = -2, y = 2, z = -1$
33: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = 0$ 34: $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{3}{4}$
35: $x = \frac{2}{9}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{5}{18}$ 37: $x = 3, y = 2, z = 2$
38: $x = 3, y = -1, z = 2$ 39: $x = 3, y = 2, z = 0$
41: $x = a, y = -b, z = a - b$ 42: $x = a + b, y = 2a, z = -b$
43: $x = a - 2b, y = 2a, z = 2b$

EJERCICIO 25: SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES EXPONENCIALES

1: 243 2: 32 3: 3125 5: 16 6: 27 7: 36 9: 36
10: 1296 11: 8 13: $\frac{8}{27}$ 14: $\frac{27}{125}$ 15: $\frac{81}{16}$ 17: 4096
18: 729 19: 5184 21: $6a^5$ 22: $8x^6$ 23: $6x^7$ 25: b^3
26: a^4 27: $6b^5$ 29: $4x^6$ 30: $8x^{12}$ 31: $-27x^9$ 33: $3ab^3$
34: $2y^2z^4$ 35: $5x/4a^2$ 37: $3ax/2y^3$ 38: $8b^3/3y^3t^3$ 39: $11a^3/4b^2$
41: $a^3b^2/4c^2$ 42: $4a^2b^4/f^3$ 43: $9a^4/x^2$ 45: $8h^3/27a^3$ 46: $a^4k^6/4$
47: $16m^4/625a^8$ 49: $216a^{15}t^6$ 50: $144b^6z^{10}$ 51: $216t^{12}h^{18}$
53: $a^9b^3c^3$ 54: b^8c^2/d^2 55: $p^{20}d^4q^8$ 57: b^3a^4/t 58: c^2/ow^7
59: pq^3/d^2 61: k^{3a+1} 62: t 63: a^{4-b} 65: a^3/c^2
66: $b^{2n-5}c^{n+3}$ 67: x^{a+2}/y^{2a} 69: a^4b^{2n} 70: $a^{3n}b^{n+5}$ 71: $x^{5n-1}y$

EJERCICIO 26: ELIMINACION DE EXPONENTES NEGATIVOS

1: $\frac{1}{9}$ 2: $\frac{1}{4}$ 3: $\frac{1}{125}$ 5: $\frac{1}{8}$ 6: 3 7: 25 9: 81
10: $\frac{1}{64}$ 11: $\frac{1}{16}$ 13: $\frac{81}{256}$ 14: $\frac{512}{729}$ 15: $\frac{5}{16}$ 17: $\frac{4}{81}$
18: 81 19: 1 21: $2x^2y^3$ 22: x^3y^2 23: a^3b^{-2} 25: $2x^{-2}y^{-2}$
26: $(2^{-1})3x^2y^{-1}z^{-3}$ 27: $2a(3^{-1})y^{-2}w^{-1}$ 29: abc^3 30: $x^{-1}y$
31: $2a^2xy^4$ 33: y/a^2 34: $1/ay^2$ 35: $1/c^2$ 37: $8b^2/a^5$
38: $2a/b^3$ 39: $b^2/3a^4$ 41: $4y^3z/3x$ 42: x^4y/z^4 43: $2b^4/9a^2c^3$
45: a^4b^6 46: d^6/c^3 47: y^6 49: a^4/x^2 50: c^4/d^6 51: $1/c^9p^6$

53: $a^2b^6/16$ 54: $9y^{10}/x^6$ 55: $8b^3/a^6y^{12}$ 57: a^4/c^4 58: $x^4y^{12}z^4$

59: $b^2a^2t^2$ 61: $4x^2$ 62: $4/x^2$ 63: $1/x$ 65: $2ab$ 66: $2b/a$

67: $2/ab$ 69: $x(x-1)$ 70: $c(b^3-a^2)/a^2b^3$ 71: $(b^3-a^2)/b^3$

73: $\dfrac{x+y}{x-y}$ 74: $\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$ 75: $\dfrac{1}{x-y}$ 77: $x+2y$ 78: $x+y$

79: $\dfrac{1}{x-y}$ 81: $\dfrac{2(2-x)}{(x+1)^4}$ 82: $\dfrac{-5(x+3)}{(x-2)^3}$ 83: $\dfrac{(x-1)^3(x-5)}{(x-2)^4}$

85: $\dfrac{-1}{(2x-3)^2}$ 86: $\dfrac{-7(x+2)}{(3x-1)^3}$ 87: $\dfrac{12x+1}{(2x-1)^3(3x+2)^2}$

EJERCICIO 27: SIMPLIFICACIONES DE EXPRESIONES RADICALES EXPONENCIALES

1: 8 2: 5 3: 4 5: .1 6: .4 7: .2 9: 4 10: 8

11: 81 13: .001 14: .09 15: .0016 17: $\frac{8}{125}$ 18: $\frac{16}{81}$

19: $\frac{8}{27}$ 21: $\frac{1}{2}$ 22: $\frac{1}{2}$ 23: $\frac{1}{4}$ 25: $\frac{3}{2}$ 26: $\frac{4}{9}$ 27: $\frac{27}{8}$

29: 5 30: 8 31: 3 33: 8 34: 4 35: 2 37: $4ab^2$

38: $3a^2b^3$ 39: $2b^4c^3$ 41: $2xy^2$ 42: $3a^2c^3$ 43: $2yw^2$

45: $7x^2/yz^3$ 46: $y^2w^4/3t$ 47: $2/bc^2$ 49: $a\sqrt[3]{a}$ 50: $\sqrt[3]{b^2}$

51: $\sqrt[5]{a^3}$ 53: $\sqrt[4]{s^3t}$ 54: $b\sqrt[5]{a^2b}$ 55: $d\sqrt[3]{c^2d^2}$ 57: $b\sqrt[3]{a^2/c}$

58: $c\sqrt[4]{cd/b^3}$ 59: $b\sqrt[5]{b/a}/8$ 61: $x^{5/4}$ 62: $y^{7/6}$ 63: z

65: $g^{1/3}$ 66: $h^{1/6}$ 67: $j^{1/2}$ 69: $2xy^3$ 70: $3y^2$ 71: $2a^2$

73: $2h^{1/3}/k$ 74: $a^2/3b^{1/2}$ 75: $x^2/3y^{1/3}$ 77: $12/x^2a^2y^{2/15}$

78: $6y^{1/4}/ab^2$ 79: $9a^{1/3}/2bc^{2/5}$ 81: $6b$ 82: $2y^{3/5}/s^{3/2}$ 83: $6/ay^{1/3}$

85: $3a^{4/5}/y^{3/2}$ 86: $24y^2/x^{5/3}$ 87: $y^{1/5}/b$ 89: 1 90: 6

91: $2a^3/9$ 93: $3x^{3/2}/2y^{1/4}$ 94: $2/3a^{4/3}y^{1.6}$ 95: $c^{1/7}/2a^{3/4}b^{1/8}$

97: $a(a+1)(a-1)$ 98: $x-y$ 99: a^2+b^2 101: $3x/(2x-1)^{1/2}$

102: $(5x+1)/(3x+2)^{1/3}$ 103: $(19x-6)/(2x-1)^{1/4}$

105: $4x/(x+1)^{1/2}(x-1)^{2/3}$ 106: $3(4x-3)/(2x-5)^{1/2}(8x+1)^{3/4}$

107: $(13x-5)/(3x-2)^{2/3}(4x+1)^{3/4}$ 109: $x^{2/a}$ 110: x^a

111: $y^{b/(b-c)}$ 113: x^3 114: x^{ab} 115: $1/x^{a^2}$

EJERCICIO 28: SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES RADICALES

1: $3\sqrt{2}$ 2: $3\sqrt{5}$ 3: $4\sqrt{3}$ 5: $7\sqrt{2}$ 6: $8\sqrt{5}$ 7: $6\sqrt{6}$

9: $2\sqrt[3]{2}$ 10: $3\sqrt[3]{4}$ 11: $5\sqrt[3]{2}$ 13: $2\sqrt[4]{2}$ 14: $3\sqrt[4]{5}$

15: $4\sqrt[4]{2}$ 17: $x\sqrt{3}$ 18: $x^2y\sqrt{5}$ 19: $a^4b^2\sqrt{7}$ 21: $ab^2\sqrt[3]{5}$

22: $x^2y^3\sqrt[3]{6}$ 23: $xy\sqrt[3]{7}$ 25: $3x^2\sqrt{2x}$ 26: $2xy^2\sqrt{3xy}$

27: $2a^3\sqrt{6a}$ 29: $2a^2$ 30: $5a^3$ 31: $2x^2y\sqrt[3]{2y}$ 33: $2ab\sqrt[4]{3b^2}$

34: $3bc\sqrt[4]{2c}$ 35: $5xy^2\sqrt[4]{xy}$ 37: $2ab\sqrt[5]{2a^2b^3}$ 38: $3xy^2\sqrt[5]{2x^2y}$

39: $2xy^2\sqrt[6]{x^3y}$ 41: $\dfrac{\sqrt{2a}}{3b}$ 42: $\dfrac{x}{2y^2}\sqrt{3x}$ 43: $\dfrac{a^2}{4b^3}\sqrt{5a}$ 45: $\dfrac{x}{2y^3}\sqrt[3]{6}$

46: $\dfrac{\sqrt[4]{3a}}{2y^2}$ 47: $\dfrac{\sqrt[4]{2x^3}}{3a^3}$ 49: $\dfrac{8x}{3}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 50: $\dfrac{4x}{3y^2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ 51: $\dfrac{2a^2}{b^3}\sqrt{\dfrac{2a}{3b}}$

53: $\dfrac{2a^2b^2}{3c^2}\sqrt[3]{\dfrac{3b}{2c^2}}$ 54: $\dfrac{5x}{4y^2z^2}\sqrt[3]{\dfrac{2x}{3z}}$ 55: $\dfrac{3xy}{2a}\sqrt[5]{\dfrac{2xy^4}{a^2}}$ 57: $(x+y)\sqrt{x-y}$

58: $(x-2y)\sqrt{x+2y}$ 59: $(x-1)\sqrt{(x+2)(2x+1)}$

61: $a^nb^{2n}\sqrt{b^n}$ 62: $b^n\sqrt[5]{a^{2n}}$ 63: a^2b^5 65: $\sqrt[3]{2}$ 66: $\sqrt{2}$

67: $\sqrt{3}$ 69: $x^2\sqrt{2}$ 70: $x\sqrt{5}$ 71: $2\sqrt[3]{a}$ 73: $2xy^3\sqrt{2x}$

74: $2xy\sqrt{y}$ 75: $y\sqrt[3]{4x^2}$ 77: $2\sqrt{x-1}$ 78: $(3x-2)\sqrt{2(3x-2)}$

79: $2(3x-1)\sqrt{2(3x-1)}$ 81: $\sqrt{x}$ 82: $\sqrt[5]{a^2}$ 83: $\sqrt[3]{x^2}$

85: $\sqrt[5]{2a}$ 86: $\sqrt[5]{3x^2}$ 87: $\sqrt{2b}$

EJERCICIO 29: SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES RADICALES

1: 6 2: 10 3: 9 5: 3 6: 4 7: 5 9: $\sqrt{6}/2$
10: $2\sqrt{5}/5$ 11: $\sqrt{42}/6$ 13: 4 14: 6 15: 3 17: $\frac{3}{2}$
18: $\sqrt{15}/3$ 19: $\sqrt{70}/14$ 21: $4xy\sqrt{y}$ 22: $3ab^2\sqrt{2}$
23: $2xy^3\sqrt{3x}$ 25: $7h^2k\sqrt{2k}$ 26: $4a^4\sqrt{b}$ 27: $9at^3\sqrt{a}$
29: $4uv\sqrt[3]{uv^2}$ 30: $2dt^2\sqrt[3]{9t}$ 31: $\sqrt{6pq}$ 33: $\frac{2a}{5b^3}\sqrt{ab}$
34: $\frac{2x^2}{15y^2}\sqrt{10y}$ 35: $\frac{7x}{6y^3}\sqrt{6y}$ 37: $\frac{x\sqrt{6y}}{6y}$ 38: $\frac{y^2}{4x}\sqrt{14}$
39: $\frac{a}{2b}\sqrt{6a}$ 41: $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2ab^2}$ 42: $\sqrt{10bx}/5x$ 43: $\sqrt{3ah}$ 45: 6
46: 7 47: $\frac{1}{6}$ 49: $\sqrt{2xyz}/2$ 50: $xy^2\sqrt{z}/14z^4$ 51: $t\sqrt[3]{4h^2k}/2h^2$
53: $5y^3\sqrt{6ay}/3a^3$ 54: $\sqrt{14b}/4u^2b^2$ 55: $\sqrt{210k}/10hk^3$
57: $(x+y)\sqrt{x-y}/(x-y)$ 58: $\sqrt{x-y}/(x-y)$ 59: $\sqrt{x+y}$
61: $\sqrt[3]{a-b}/(a-b)$ 62: $\sqrt[3]{(b^2-c^2)^2}/(b+c)$ 63: $\sqrt[3]{(c-d)^2}/(c-d)$

EJERCICIO 30: ADICION Y SUSTRACCION DE EXPRESIONES RADICALES

1: $4\sqrt{2}$ 2: $2\sqrt{3}$ 3: 0 5: $3\sqrt[3]{2}$ 6: $-5\sqrt[3]{3}$ 7: $4\sqrt[3]{5}$
9: $7\sqrt[3]{3}-3\sqrt{3}$ 10: $8\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}$ 11: $7\sqrt{3}-3\sqrt{2}$
13: $3x^2\sqrt{y}$ 14: $(2q-3p+4pq)\sqrt{pq}$ 15: $a(b^2+2a-5a^2b)\sqrt{2ab}$
17: $\sqrt{x}/x$ 18: $\sqrt{a}/a$ 19: $4x\sqrt{2x}/\mathrm{y}$ 21: $u\sqrt{v}+3v\sqrt{u}$
22: $(s+2a^2)\sqrt{3sa}+a(a^2-s)\sqrt{a}$ 23: $(q+2p)(\sqrt[3]{p^2q}-p\sqrt[3]{pq^2})$
25: $(2b+a)\sqrt{2a}/4+(3-a^3)\sqrt{3b}/3a$ 26: $3\sqrt{2hk}/k+\sqrt{hk}/h$
27: $\sqrt{2ab}/b^2$ 29: $3\sqrt{3xy}$ 30: 0 31: $6\sqrt{3ab}/b$
33: $-2y\sqrt{4x^2-y^2}/(4x^2-y^2)$ 34: $2x\sqrt{x^2-9y^2}/(x^2-9y^2)$
35: $-b^2\sqrt{a^2-b^2}/(a^2-b^2)$ 37: $-\sqrt{p+3}/2$
38: $2(2q-3)\sqrt{q-2}/(q-2)$ 39: $(7x+23)\sqrt{x+5}/2(x+5)$

EJERCICIO 31: OPERACIONES CON EXPRESIONES RADICALES

1: -2 2: 4 3: 14 5: $16-5\sqrt{15}$ 6: $5\sqrt{6}$
7: $54-13\sqrt{14}$ 9: a^2-b 10: $u-v$ 11: $a\sqrt{a}-b\sqrt{b}$
13: $a-b+2b\sqrt{a}-ab$ 14: $x-2\sqrt{xy}+y-xy$
15: $a+2\sqrt{ab}+b-c$ 17: $\sqrt{18}, \sqrt{20}, \sqrt{24}$ 18: $\sqrt{45}, \sqrt{48}, \sqrt{54}$
19: $\sqrt{117}, \sqrt{120}, \sqrt{125}$ 21: $\sqrt[3]{54}, \sqrt[3]{56}, \sqrt[3]{64}$
22: $\sqrt[3]{192}, \sqrt[3]{208}, \sqrt[3]{216}$ 23: $\sqrt[3]{243}, \sqrt[3]{248}, \sqrt[3]{250}$
25: $\sqrt{2a}, \sqrt{2a^3}, \sqrt{2a^5}$ 26: $\sqrt{24a^2b^3}, \sqrt{27a^2b^3}, \sqrt{28a^2b^3}$
27: $\sqrt{63a^3b^3}, \sqrt{64a^3b^3}, \sqrt{65a^3b^3}$ 29: $\sqrt[6]{8y^3}, \sqrt[6]{9y^4}$
30: $\sqrt[6]{125w^3}, \sqrt[6]{81w^4}$ 31: $\sqrt[12]{625x^8}, \sqrt[12]{512x^3}$
33: $\sqrt[12]{729x^6}, \sqrt[12]{729x^6}, \sqrt[12]{16x^4}$ 34: $\sqrt[30]{a^{15}}, \sqrt[30]{a^{10}}, \sqrt[30]{a^6}$
35: $\sqrt[18]{x^{12}y^6}, \sqrt[18]{8x^{15}y^6}, \sqrt[18]{3x^7y^3}$ 37: $\sqrt[6]{108}$ 38: $\sqrt[12]{2048}$
39: $9x^2\sqrt[6]{3x}$ 41: $\sqrt[12]{3^7a^5}$ 42: $\sqrt[12]{729a^8b^7}$ 43: $x\sqrt[6]{3y^2}$
45: $\sqrt{2}-1$ 46: $(\sqrt{3}+1)/2$ 47: $2(\sqrt{5}+2)/3$ 49: $3+2\sqrt{3}$
50: $\sqrt{5}$ 51: $-(5+3\sqrt{3})/2$ 53: $\sqrt{2}$ 54: $\sqrt{3}$
55: $-\sqrt{3}-2\sqrt{7}$ 57: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 58: $\sqrt{a}-2\sqrt{b}$ 59: $a-\sqrt{b}$
61: $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 62: $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 63: $\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3}$

65: $1/(\sqrt{3}+1)$ 66: $1/(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ 67: $1/(\sqrt{7}+\sqrt{3})$
69: $-5/(\sqrt{7}+6\sqrt{2})$ 70: $1/(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ 71: $1/(\sqrt{7}-\sqrt{2})$

EJERCICIO 32: ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1: $\pm\frac{7}{2}$ 2: $\pm\frac{5}{3}$ 3: $\pm\frac{9}{4}$ 5: ± 3 6: ± 2 7: ± 4
9: $\pm 5\sqrt{3}/3$ 10: $\pm 2\sqrt{5}/5$ 11: $\pm\sqrt{2}$ 13: $\pm 3i$ 14: $\pm 2i$
15: $\pm 2i$ 17: $\pm\dfrac{4i}{3}$ 18: $\pm\dfrac{4\sqrt{3}i}{3}$ 19: $\pm\sqrt{3}i$ 21: $-1,\ 3$
22: $2,\ -3$ 23: $1,\ -5$ 25: $2,\ -5$ 26: $3,\ 2$ 27: $-4,\ 0$
29: $\frac{3}{2},\ -3$ 30: $2,\ -\frac{1}{3}$ 31: $-\frac{3}{2},\ 0$ 33: $\frac{2}{3},\ -4$ 34: $-\frac{3}{4},\ 0$
35: $3,\ -\frac{3}{4}$ 37: $-\frac{4}{3},\ \frac{3}{2}$ 38: $0,\ -\frac{2}{3}$ 39: $\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}$ 41: $\frac{4}{3},\ \frac{3}{4}$
42: $-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{5}$ 43: $\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}$ 45: $\frac{4}{5},\ -\frac{2}{3}$ 46: $\frac{6}{7},\ -\frac{3}{2}$ 47: $\frac{1}{5},\ 0$
49: $\frac{5}{6},\ -\frac{4}{5}$ 50: $\frac{5}{6},\ -\frac{3}{4}$ 51: $\frac{6}{5},\ 0$ 53: $-\frac{3}{8},\ -\frac{5}{6}$ 54: $\frac{7}{6},\ \frac{5}{6}$
55: $-\frac{9}{16},\ 0$ 57: $\frac{8}{9},\ \frac{6}{5}$ 58: $\frac{5}{12},\ -\frac{7}{6}$ 59: $-\frac{5}{3},\ \frac{7}{18}$ 61: $3c,\ -2c$
62: $\dfrac{2b}{3},\ -\dfrac{3b}{2}$ 63: $\dfrac{5q}{2p},\ -\dfrac{3q}{p}$ 65: $n,\ -\dfrac{m}{2}$ 66: $\dfrac{g}{f},\ -\dfrac{f}{g}$
67: $d^2,\ -\dfrac{1}{2c^2}$

EJERCICIO 33: SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETANDO EL CUADRADO

1: $5,\ -3$ 2: $8,\ -3$ 3: $2,\ -9$ 5: $-1,\ \frac{3}{2}$ 6: $1,\ -\frac{4}{3}$
7: $-2,\ \frac{7}{2}$ 9: $-\frac{3}{2},\ \frac{5}{3}$ 10: $-\frac{9}{8},\ \frac{1}{2}$ 11: $\frac{3}{2},\ -\frac{4}{5}$ 13: $3\pm 3\sqrt{3}$
14: $2\pm\sqrt{7}$ 15: $4\pm 2\sqrt{6}$ 17: $\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ 18: $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
19: $\dfrac{-7\pm\sqrt{13}}{2}$ 21: $\dfrac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$ 22: $\dfrac{3\pm\sqrt{11}}{3}$ 23: $\dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{2}$
25: $\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}$ 26: $\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{2}$ 27: $\dfrac{4\pm\sqrt{10}}{3}$ 29: $\dfrac{-9\pm\sqrt{21}}{10}$
30: $\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$ 31: $\dfrac{-7\pm\sqrt{17}}{8}$ 33: $2\pm i$ 34: $3\pm i$
35: $1\pm 2i$ 37: $\dfrac{-5\pm i}{2}$ 38: $\dfrac{-2\pm i}{3}$ 39: $\dfrac{-1\pm 2i}{3}$
41: $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}i}{2}$ 42: $\dfrac{9\pm\sqrt{3}i}{6}$ 43: $\dfrac{5\pm\sqrt{5}i}{2}$ 45: $\dfrac{5\pm\sqrt{11}i}{6}$
46: $\dfrac{1\pm\sqrt{19}i}{10}$ 47: $\dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{8}$ 49: $b+a,\ -a$ 50: $a-2b,\ b$
51: $2ab,\ -ab$ 53: $1,\ \dfrac{-b-a}{a}$ 54: $\dfrac{b+a}{ab},\ -\dfrac{1}{b}$ 55: $-\dfrac{b+1}{a},\ \dfrac{2}{a}$
57: $\dfrac{2a}{a-b},\ -2$ 58: $\dfrac{b+a}{3},\ -\dfrac{b}{2}$ 59: $\dfrac{2a+b}{a},\ -\dfrac{b}{a}$
61: 5.464, −1.464 62: 3.828, −1.828 63: 9.656, −1.656
65: 3.159, −.159 66: 2.155, −.155 67: 2.264, .736
69: −1.721, .387 70: −2.781, −.719 71: −1.290, −.310

EJERCICIO 34: EMPLEO DE LA FORMULA DE LA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

1: $3,\ -4$ 2: $6,\ -7$ 3: $7,\ -5$ 5: $6,\ -\frac{7}{2}$ 6: $\frac{7}{3},\ -5$
7: $2,\ -\frac{9}{5}$ 9: $\frac{6}{7},\ -\frac{5}{6}$ 10: $\frac{7}{12},\ -\frac{5}{4}$ 11: $\frac{10}{9},\ -\frac{3}{4}$ 13: $5\pm 2\sqrt{5}$

14: $4 \pm 3\sqrt{2}$ 15: $6 \pm 4\sqrt{2}$ 17: $\dfrac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ 18: $\dfrac{-11 \pm \sqrt{5}}{2}$
19: $\dfrac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ 21: $\dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{8}$ 22: $\dfrac{1 \pm 3\sqrt{2}}{3}$ 23: $\dfrac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$
25: $\dfrac{11 \pm \sqrt{21}}{10}$ 26: $\dfrac{6 \pm 2\sqrt{2}}{7}$ 27: $\dfrac{3 \pm 3\sqrt{3}}{4}$ 29: $\dfrac{-4 \pm 3\sqrt{3}}{11}$
30: $\dfrac{6 \pm 4\sqrt{6}}{15}$ 31: $\dfrac{8 \pm 9\sqrt{2}}{14}$ 33: $3 \pm 2i$ 34: $6 \pm 3i$
35: $4 \pm 2i$ 37: $\dfrac{-7 \pm i}{2}$ 38: $(1 \pm i)/2$ 39: $(1 \pm 2i)/3$
41: $4x^2 = 6x - 3$ 42: $(-2 \pm \sqrt{6}i)/5$ 43: $(4 \pm \sqrt{2}i)/3$
45: $(3 \pm \sqrt{5}i)/7$ 46: $(-4 \pm \sqrt{6}i)/11$ 47: $(-7 \pm \sqrt{11}i)/12$
49: $a - b, -a$ 50: $a, -b$ 51: $b, -2a$ 53: $(m + n)/m, -1$
54: $(q + 1)/p, -q/p$ 55: $1, (-c - d)/c$ 57: $-2, -2/(u^2 - 1)$
58: $(r \pm 3)/r$ 59: $2v/w, (2 - 2v)/w$ 61: $x - 3, -x + 2$
62: $x + 1, -x - 3$ 63: $y + 5, -y - 2$ 65: $x - 2, \dfrac{-2x + 5}{2}$
66: $-x - 2, \dfrac{3x + 4}{3}$ 67: $\dfrac{5y + 3}{5}, -y - 1$ 69: 1.707, .293
70: 1.549, −.215 71: 2.633, −.633 73: 1.380, −.580
74: .631, .227 75: 1.522, −.094 77: .730, −.422 78: .557, −.128
79: .638, −.105

EJERCICIO 35: REDUCCION DE ECUACIONES A LA FORMA CUADRATICA

1: $\pm 4, \pm 2$ 2: $\pm 6, \pm 2$ 3: $\pm\frac{1}{3}, \pm 2$ 5: $\pm 2, \pm\sqrt{3}$
6: $\pm 3, \pm\sqrt{3}$ 7: $\pm 2, \pm\sqrt{6}$ 9: $\pm\sqrt{5}, \pm 2i$ 10: $\pm\sqrt{3}, \pm 3i$
11: $\pm\sqrt{2}, \pm 2i$ 13: $\pm\sqrt{2}/2, \pm\frac{3}{2}i$ 14: $\pm 2\sqrt{3}/3, \pm\sqrt{6}i/2$
15: $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}i$ 17: $\frac{2}{3}, -1$ 18: $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 19: $-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$ 21: $\frac{2}{3}, 1$
22: $-2, -1$ 23: $\frac{3}{2}, -1$ 25: $\pm 2, \pm 1$ 26: $\pm 3, \pm 1$
27: $\pm 2, \pm 3$ 29: $3, -4, 2, -3$ 30: $1, -4, 2, -5$
31: $\frac{3}{2}, -3, -\frac{1}{2}, -1$ 33: $1, -4, (-3 \pm \sqrt{5})/2$ 34: $2, -1, (1 \pm \sqrt{5})/2$
35: $\frac{3}{2}, 1, (5 \pm \sqrt{17})/4$ 37: $\frac{4}{3}$ 38: $4, \frac{5}{2}$ 39: $3, -7$ 41: $2, 1$
42: $\frac{7}{3}, \frac{5}{2}$ 43: $\frac{9}{4}, 4$ 45: $4, \frac{3}{2}$ 46: $3, -1$ 47: $1, \frac{17}{12}$

EJERCICIO 36: SOLUCION DE ECUACIONES QUE COMPRENDEN RADICALES

1: 3 2: 2 3: 5 5: 14 6: 10 7: No hay solución 9: 2,3
10: 1, −3 11: 4, −5 13: 2 14: 3 15: 5 17: $\frac{1}{2}$
18: $\frac{3}{2}$ 19: $\frac{2}{3}$ 21: 3, −1 22: 5, 1 23: 10 25: 3
26: −1 27: 5 29: 8 30: 4 31: 2 33: 3 34: 5
35: 7 37: 6, 2 38: 8, 0 39: 5 41: $2a$ 42: $3b, -b$
43: $-c$

EJERCICIO 37: PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1: 7,8 2: 8 3: 64 5: 10, 19 6: 20, 24 7: 9, 18
9: 2 10: 2 11: $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$ 13: 7 metros, 12 metros
14: 14 metros, 18 metros 15: 1.73 metros de ancho, 5.76 metros de largo
17: $\frac{3}{4}$ de milla, 1 milla 18: 169 metros cuadrados 19: 5 por 7 metros

21: 60 millas por hora, primer automóvil; 50 millas por hora, segundo automóvil
22: 60 millas por hora, 45 millas por hora 23: 160 millas por hora
25: 5 horas, $7\frac{1}{2}$ horas 26: María, 14 horas; Elena, $18\frac{2}{3}$ horas
27: \$60 000, \$80 000 29: 50,60 30: 5 31: 3 metros cúbicos por minuto

EJERCICIO 38: USO DEL DISCRIMINANTE

1: Racionales y diferentes 2: Imaginarias 3: Racionales e iguales
5: Irracionales y diferentes 6: Racionales e iguales
7: Irraciones y diferentes 9: Racionales y diferentes
10: Racionales e iguales 11: Racionales e iguales
13: Reales y diferentes 14: Reales e iguales 15: Reales y diferentes
17: Reales e iguales 18: Reales y diferentes 19: Imaginarias
21: Suma, $-\frac{4}{3}$; producto, $\frac{2}{3}$ 22: Suma, $\frac{5}{2}$; producto, $\frac{7}{2}$
23: Suma, $\frac{2}{5}$; producto, $-\frac{3}{5}$ 25: Suma, -3; producto, 2
26: Suma, $\frac{7}{2}$; producto, $\frac{3}{2}$ 27: Suma, $\frac{5}{3}$; producto, $-\frac{9}{3}$
29: Suma, $\sqrt{2}$; producto, $\sqrt{3}$ 30: Suma, $-2\sqrt{5}$; producto, $\sqrt{2}$
31: Suma, $2-\sqrt{3}$; producto, $1+\sqrt{3}$ 33: 0,8 34: -2 35: 1, -3
37: -1 38: 1 39: 2 41: 3 42: $\frac{1}{5}$ 43: 2, 3
45: $x^2+2x-15$ 46: $x^2-7x+12$ 47: x^2+4x+3
49: $12x^2+7x-12$ 50: $6x^2-7x+2$ 51: $18x^2-45x+25$
53: $x^2-10x+22$ 54: $9x^2+6x-4$ 55: x^2-x+1
57: $(20x-27)(2x+1)$ 58: $(16x-9)(3x+5)$
59: $(14x-25)(4x+3)$ 61: $(4x+5)(19x-12)$
62: $(3x-2)(14x+13)$ 63: $(x-2)(36x+53)$

EJERCICIO 39: GRAFICAS DE FUNCIONES DE SEGUNDO GRADO

1: 0.7, -2.7 2: 0.6, -1.6 3: No hay ceros 5: No hay ceros
6: 4.4,1.6 7: 0.8, -3.8, 9: 0.8, -1.8 10: 0.2, 2.3 11: No hay ceros
13: $y=0$ en $x=2$, un punto 14: $y=0$ en $x=1$, un punto
15: $y=-2$ en $x=-3$, dos puntos 17: $y=-3\frac{1}{4}$, en $x=-\frac{3}{4}$, dos puntos
18: $y=\frac{1}{12}$ en $x=\frac{5}{6}$, dos puntos 19: $y=\frac{1}{5}$ en $x=\frac{4}{5}$, dos puntos
21: 0.375 metros por 0.375 metros 22: $\frac{1}{2}$ 23: 60 por 60

EJERCICIO 40: SOLUCION GRAFICA DE PARES DE ECUACIONES

Las soluciones se dan como coordenadas de un punto.
33: (.5,3), $(-2.1,-2.2)$ 34: (0,0), (.4,1.3) 35: (.5,2), $(-1.4,-1.8)$
37: $(-1.9,2.8)$, $(-1.9,-2.8)$ 38: (0,0), (5,6.3)
39: $(1.2,-7)$, $(-1.2,-7)$ 41: Ninguna 42: (1.8,8), $(-1.8,.8)$
43: (1,0), $(-1,0)$ 45: Ninguna 46: (1.2,.9), $(1.2,-.9)$
47: (.9,.9), $(.9,-.9)$, $(-.9,.9)$, $(-.9,-.9)$

EJERCICIO 41: SOLUCION ALGEBRAICA DE PARES DE ECUACIONES

Las soluciones se dan como coordenadas de un punto.
1: $(1,2)$, $(9,-6)$ **2:** $(6,4)$, $(3,1)$ **3:** $(0,0)$, $(2,2)$
5: $(2,1)$, $(-1,-2)$ **6:** $(2,-3)$, $(-1.2,3.4)$ **7:** $(1,\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},-1)$
9: $(2,0)$, $(1.2,-.8)$ **10:** $(0,3)$, $(-\frac{12}{13},\frac{15}{13})$ **11:** $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$
13: $(1,2)$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ **14:** $(2,-1)$ **15:** $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$

17: $(1 + i, 1 - i)$, $(1 - i, 1 + i)$ **18:** $(1 + 2i, -2i)$, $(1 - 2i, 2i)$
19: $(2 + i, 2 - i)$, $(2 - i, 2 + i)$ **21:** $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
22: $(1 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$, $(1 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$
23: $(2 + \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5})$, $(2 - \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5})$
25: $(2 + \sqrt{5}, -2 - 2\sqrt{5})$, $(2 - \sqrt{5}, -2 + 2\sqrt{5})$ **26:** $(2,0)$, $(2,0)$
27: $(3 + 2i, 1 + i)$, $(3 - 2i, 1 - i)$ **29:** $(2,0)$, $(3,1)$
30: $(2,1)$, $(-2.05, -.35)$
31: $(3,-2)$ **33:** $(a, a - b)$ **34:** $(a, 2a + b)$ **35:** $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)$, $(1,1)$

EJERCICIO 42: ECUACIONES SIMULTANEAS DE SEGUNDO GRADO

Las soluciones se dan como coordenadas de un punto.

1: $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$ **2:** $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$
3: $(3,2)$, $(3,-2)$, $(-3,2)$, $(-3,-2)$ **5:** $(\frac{1}{2},1)$, $(\frac{1}{2},-1)$, $(-\frac{1}{2},1)$, $(-\frac{1}{2},-1)$
6: $(\frac{1}{3},1)$, $(\frac{1}{3},-1)$, $(-\frac{1}{3},1)$, $(-\frac{1}{3},-1)$
7: $(2,\frac{1}{2})$, $(2,-\frac{1}{2})$, $(-2,\frac{1}{2})$, $(-2,-\frac{1}{2})$
9: $(\sqrt{2},1)$, $(\sqrt{2},-1)$, $(-\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},-1)$
10: $(1,\sqrt{3})$, $(1,-\sqrt{3})$, $(-1,\sqrt{3})$, $(-1,-\sqrt{3})$
11: $(\sqrt{3},\sqrt{2})$, $(\sqrt{3},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3},-\sqrt{2})$
13: $(2,\sqrt{3})$, $(2,-\sqrt{3})$, $(-2.6, 2i\sqrt{2.01})$, $(-2.6, -2i\sqrt{2.01})$
14: $(\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},1)$, $\left(\frac{\sqrt{155}}{7}, -\frac{12}{7}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{155}}{7}, -\frac{12}{7}\right)$
15: $(\sqrt{2},2)$, $(-\sqrt{2},2)$, $\left(\frac{\sqrt{223}}{11}, \frac{3}{11}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{223}}{11}, \frac{3}{11}\right)$
17: $(i,2)$, $(-i,2)$, $\left(\frac{\sqrt{62}}{17}, \frac{-5}{17}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{62}}{17}, \frac{-5}{17}\right)$
18: $(1,i)$, $(1,-i)$, $\left(\frac{19}{7}, \frac{i\sqrt{457}}{7}\right)$, $\left(\frac{19}{7}, \frac{-i\sqrt{457}}{7}\right)$
19: $(i\sqrt{2},3)$, $(-i\sqrt{2},3)$, $\left(\frac{i\sqrt{6}}{7}, \frac{-2}{7}\right)$, $\left(\frac{-i\sqrt{6}}{7}, \frac{-2}{7}\right)$
21: $(-2,\frac{1}{2})$, $(1,-2)$ **22:** $(2,-3)$, $(-2,1)$
23: $(3,1)$, $(1,3)$, $(-\frac{7}{3}, \frac{37}{21})$, $(-\frac{47}{21}, -\frac{7}{3})$ **25:** $(1 + i, 1)$, $(1 - i, 1)$
26: $(1 + i, 1)$, $(1 - i, 1)$ **27:** $(1, 1 + i)$, $(1, 1 - i)$
29: $(\sqrt{5},\sqrt{3})$, $(\sqrt{5},-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{5},\sqrt{3})$, $(-\sqrt{5},-\sqrt{3})$
30: $(\sqrt{15},\sqrt{14})$, $(\sqrt{15},-\sqrt{14})$, $(-\sqrt{15},\sqrt{14})$, $(-\sqrt{15},-\sqrt{14})$
31: $(\sqrt{6},2\sqrt{2})$, $(\sqrt{6},-2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{6},2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{6},-2\sqrt{2})$

EJERCICIO 43: ECUACIONES SIMULTANEAS DEL TIPO $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$

Las soluciones se dan como coordenadas de un punto.

1: $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$
2: $(1,2)$, $(-1,-2)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{39}}, \frac{-4}{\sqrt{39}}\right)$, $\left(\frac{-5}{\sqrt{39}}, \frac{4}{\sqrt{39}}\right)$
3: $(2,-1)$, $(-2,1)$, $\left(\frac{25i\sqrt{69}}{69}, \frac{14i\sqrt{69}}{69}\right)$, $\left(\frac{-25i\sqrt{69}}{69}, \frac{-14i\sqrt{69}}{69}\right)$
5: $(1,-1)$, $(-1,1)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$
6: $(1,1)$, $(1,-2)$, $(-1,-1)$, $(-1,2)$

7: $(2,-2)$, $(-2,2)$, $\left(\frac{8}{\sqrt{41}},\frac{2}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(\frac{-8}{\sqrt{41}},\frac{-2}{\sqrt{41}}\right)$
9: $(\frac{1}{2},1)$, $(-\frac{1}{2},-1)$, $\left(\frac{\sqrt{17}}{5.1},\frac{\sqrt{17}}{51}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{17}}{5.1},\frac{-\sqrt{17}}{51}\right)$
10: $(\frac{2}{3},2)$, $(-\frac{2}{3},-2)$, $\left(\frac{6\sqrt{11}}{11},\frac{-10\sqrt{11}}{11}\right)$, $\left(\frac{-6\sqrt{11}}{11},\frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$
11: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\frac{3}{4},1)$, $(-\frac{3}{4},-1)$
13: $(2,-\frac{1}{2})$, $(-2,\frac{1}{2})$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$
14: $(1,-\frac{2}{3})$, $(-1,\frac{2}{3})$, $\left(0,\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(0,\frac{-i\sqrt{3}}{3}\right)$
15: $(3,\frac{1}{2})$, $(-3,-\frac{1}{2})$, $(2i,2.5i)$, $(-2i,-2.5i)$
17: (i,i), $(-i,-i)$, $\left(\frac{3\sqrt{47}}{47},\frac{-4\sqrt{47}}{47}\right)$, $\left(\frac{-3\sqrt{47}}{47},\frac{4\sqrt{47}}{47}\right)$
18: $(i,-i)$, $(-i,i)$, $(i,-i)$, $(-i,i)$
19: $(2i,i)$, $(-2i,-i)$, $\left(\frac{4\sqrt{41}}{41},\frac{-7\sqrt{41}}{41}\right)$, $\left(\frac{-4\sqrt{41}}{41},\frac{7\sqrt{41}}{41}\right)$
21: $(1+i,i)$, $(-1-i,-i)$, $(1-i,-i)$, $(-1+i,i)$
22: $(2-i,i)$, $(-2-i,i)$, $(2+i,-i)$, $(-2+i,-i)$
23: $(1+2i,-2+i)$, $(-1-2i,2-i)$, $(-1+2i,2+i)$, $(1-2i,-2-i)$
25: $(3\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $\left(\frac{4i\sqrt{22}}{11},\frac{3i\sqrt{22}}{11}\right)$, $\left(\frac{-4i\sqrt{22}}{11},\frac{-3i\sqrt{22}}{11}\right)$
26: $(\sqrt{3},\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $\left(\frac{9i\sqrt{381}}{127},\frac{-7i\sqrt{381}}{127}\right)$, $\left(\frac{-9i\sqrt{381}}{127},\frac{7i\sqrt{381}}{127}\right)$
27: $(\sqrt{5},-\sqrt{5})$, $(\sqrt{5},-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$
29: $(1,-1)$, $(-1,1)$
30: $(\sqrt{5}-2,1+\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}+2,-1-\sqrt{5})$, $(\sqrt{5}+2,-1-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}-2,1-\sqrt{5})$
31: $(2+\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$, $(-2-\sqrt{3},-3-2\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3},3-2\sqrt{3})$, $(-2+\sqrt{3},-3+2\sqrt{3})$

EJERCICIO 44: SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO POR SUSTITUCION

Las soluciones se dan como coordenadas de un punto.

1: $(-1,-2)$, $(2,1)$ 2: $(0,-3)$, $(1,-1)$ 3: $(3,2)$, $(-8/3,35/9)$
5: $(1,0)$, $(1.08,.4)$ 6: $(-1,-1)$, $(2,-4)$ 7: $(-1,2)$, $(-2.28,.4)$
9: $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(i,-2i)$, $(-i,2i)$ 10: $(3,-2)$, $(-3,2)$, $(2,-3)$, $(-2,3)$
11: (i,i), $(-i,-i)$, $(i\sqrt{2},i\sqrt{2}/2)$, $(-i\sqrt{2},-i\sqrt{2}/2)$
13: $(1,1)$, $(1,1)$ 14: $(2,1)$, $(-5,3.8)$ 15: $(0,-2)$, $(3,-1)$
17: $(1,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{5}{6})$ 18: $(\frac{2}{3},1)$, $(\frac{1}{3},2)$ 19: $(\frac{2}{3},1)$, $(\frac{2}{3},1)$
21: $(2,1)$, $(\frac{17}{5},-\frac{9}{5})$ 22: $(1,-1)$, $(-\frac{7}{5},-\frac{9}{5})$ 23: $(3,2)$, $(-1,2)$
25: $(1,1)$, $(1,1)$ 26: $(2,2)$, $(2,2)$ 27: $(-1,-1)$, $(-1,-1)$
29: $(1,1)$, $(1,1)$, $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$
30: $(3,3)$, $(3,3)$ 31: $(-1,-1)$, $(-1,-1)$

EJERCICIO 45: PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1: 47,14 2: 55,44 3: 36,21 5: 7 metros, 24 metros 6: 8 metros 15 metros 7: 5 centímetros, 12 centímetros

9: $x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$
10: 6.47 metros, 23.20 metros incluyendo la banqueta en el jardín
11: 22 por 36 centímetros   13: 3 centímetros, 5 centímetros
14: 7 centímetros, 3 centímetros   15: Base 4 metros, altura 5 metros
17: *A* 30 días, *B* 20 días   18: 25   19: 75
21: *A* 300 millas por hora. *B* 360 millas por hora
22: 224 kms. por hora, 160 kms. por hora   23: 300, \$3450 **25:** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$
26: $\sqrt{6}+\sqrt{7}$ **27:** $\sqrt{6}+\sqrt{5}$ **29:** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ **30:** $\sqrt{6}+\sqrt{3}$
31: $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

EJERCICIO 46: RAZONES Y PROPORCIONES

1: $\frac{9}{2}$ **2:** $\frac{15}{2}$ **3:** $\frac{3}{1}$ **5:** $\frac{30}{1}$ **6:** $\frac{880}{1}$ **7:** $\frac{100}{3}$
9: \$1.25 por hora   **10:** \$11 por kilogramo **11:** 8 galletas por niño
13: $\frac{8}{15}$ **14:** $\frac{1}{40}$ **15:** 80   **17:** $4\frac{2}{3}$ **18:** $2\frac{1}{3}$ **19:** 3   **21:** 2
22: $-\frac{1}{7}$ **23:** 4, -3 **25:** ± 16 **26:** ± 24 **27:** ± 4 **29:** $16\frac{1}{3}$
30: 16.2   **31:** 18   **33:** 14   **34:** 12   **35:** 10
37: $x = 15, y = 9$ **38:** $x = 18, y = 6$ **39:** $x = 8, y = 10$
41: 2178 m   **42:** 7 m   **43:** 210 kms.

EJERCICIO 47: VARIACIONES

1: (*a*) $m = kn$, (*b*) $s = k/t$, (*c*) $r = ksm$, (*d*) $w = kx/y^2$ 2: 20   3: 6
5: 10   6: 90   7: 72   9: 15 centímetros cúbicos   10: 10 metros
11: \$121.50
13: La resistencia del aire para 60 kilómetros por hora es $\frac{9}{4}$ de la resistencia para 40 kilómetros por hora
14: El segundo poste requiere 1.125 de la pintura empleada en el primero
15: 78.26 kilómetro por hora   17: 84.12 kilogramos   18: 5 gramos
19: Aceleración de la primera fuerza es $\frac{5}{4}$ de la segunda
21: $P_2 = 1.485\, p_1$
22: La iluminación para 256 bujías es $\frac{4}{9}$ de la iluminación para 144 bujías
23: La primera tiene $\frac{1}{24}$ de la resistencia de la segunda   25: 24 joules
26: El primero es 22 veces el segundo   27: 670 días

EJERCICIO 48: OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

1: $8+5i$ **2:** $6+8i$ **3:** $3-i$ **5:** $3-2i$ **6:** $4+7i$
7: $-2+8i$ **9:** $10+i$ **10:** 0   **11:** $-1-18i$ **13:** $7+26i$
14: $-29+29i$ **15:** $21+i$ **17:** $7-24i$ **18:** $21+20i$
19: $24+70i$ **21:** $1+7i$ **22:** $7-9i$ **23:** $125+50i$
25: $3-4i$ **26:** $6+i$ **27:** $-2-3i$ **29:** $2+5i$ **30:** 7
31: $-4i$ **33:** $-1+3i$ **34:** $-1-43i$ **35:** $15+6i$
37: $(7-9i)/13$ **38:** $(16+11i)/13$ **39:** $(7+11i)/10$
41: $(9-13i)/2$ **42:** $(3+i)/5$ **43:** $(-39+52i)/25$
45: $-6-17i$ **46:** $1-17i$ **47:** $-7-11i$ **49:** $x = 2, y = 3$
50: $x = 3, y = 5$ **51:** $x = 6, y = 3$ **53:** $x = 3, y = 3$
54: $x = 2, y = 4$ **55:** $x = 1, y = -1$ **57:** $x = 2, y = 1$
58: $x = 1, y = 3$ **59:** $x = 2, y = 3$ **61:** $x = 3, y = 2$
62: $x = 2, y = 1$ **63:** $x = 5, y = 3$

EJERCICIO 49: REPRESENTACION GEOMETRICA DE NUMEROS COMPLEJOS

NOTA: en estas respuestas se empleara cis θ para representar cos θ i sen θ

17: $5 + 3i$ **18:** $5 + i$ **19:** $5 - 7i$ **21:** $1 + i$ **22:** $9i$
23: 2 **25:** $3 + 2i$ **26:** $3 + 2i$ **27:** $5 + 3i$ **29:** $1 + 7i$
30: $1 + 6i$ **31:** $-3 + 7i$ **33:** $\sqrt{2}$ cis 315° **34:** $\sqrt{2}$ cis 135°
35: $\sqrt{2}$ cis 225° **37:** 2 cis 60° **38:** 2 cis 300° **39:** 2 cis 120°
41: 2 cis 150° **42:** 2 cis 210° **43:** 2 cis 30° **45:** 5 cis arctan $\frac{-4}{-3}$
46: 13 cis arctan $\frac{12}{5}$ **47:** 17 cis arctan $\frac{-15}{8}$ **49:** 3 cis 90°
50: 2 cis 180° **51:** cis 270°

EJERCICIO 50: REPRESENTACION POLAR DE NUMEROS COMPLEJOS

1: 6 cis 30° $= 3(\sqrt{3} + i)$ **2:** cis 60° $= (1 + \sqrt{3}i)/2$
3: 2 cis 45° $= \sqrt{2}\,(1 + i)$ **5:** 12 cis 30° $= 6(\sqrt{3} + i)$
6: $2\sqrt{6}$ cis 90° $= 2\sqrt{6}i$ **7:** 10 cis 45° $= 5\sqrt{2}\,(1 + i)$
9: 3 cis 30° $= 1.5(\sqrt{3} + i)$ **10:** $\sqrt{2}$ cis 60° $= (1 + \sqrt{3}i)/\sqrt{2}$
11: 2 cis 135° $= \sqrt{2}(-1 + i)$ **13:** cis 60° $= (1 + \sqrt{3}i)/2$
14: 2 cis 150° $= -\sqrt{3} + i$ **15:** 10 cis 240° $= -5(1 + \sqrt{3}i)$
17: 4 cis 225° $= -2\sqrt{2}(1 + i)$ **18:** 3 cis 135° $= 1.5\sqrt{2}(-1 + i)$
19: 2.5 cis(−30°) $= 1.25(\sqrt{3} - i)$ **21:** $2\sqrt{2}$ cis 345°
22: $2\sqrt{2}$ cis 195° **23:** $2\sqrt{2}$ cis 345° **25:** $4\sqrt{2}$ cis 45°
26: $4\sqrt{2}$ cis 135° **27:** $4\sqrt{2}$ cis 225° **29:** 4 cis 180° **30:** 8 cis 270°
31: 4 cis 240° **33:** cis 30° **34:** cis 150° **35:** cis 90°
37: $2\sqrt{2}$ cis 45° **38:** cis 150° **39:** .5 cis 60°

EJERCICIO 51: POTENCIAS Y RAICES DE NUMEROS COMPLEJOS

1: $2\sqrt{2}$ cis 135° **2:** 4 cis 180° **3:** $4\sqrt{2}$ cis 315° **5:** 8 cis 180°
6: 4 cis 240° **7:** 16 cis 240° **9:** 3125 cis 265° 50′
10: 169 cis 225° 20′ **11:** 169 cis 134° 40′ **13:** cis 90°
14: 243 cis 0° **15:** 64 cis 180° **17:** $2^{1/6}$ cis(15° + n120°), $n = 0,1,2$
18: cis(30° + n120°), $n = 0,1,2$ **19:** $2^{1/3}$ cis(100° + n120°), $n = 0,1,2$
21: $2^{1/4}$ cis(78°45′ + n90°), $n = 0,1,2,3$
22: $2^{1/4}$ cis(15° + n90°), $n = 0,1,2,3$ **23:** 2 cis n90°, $n = 0,1,2,3$
25: $2^{1/5}$ cis(42° + n72°), $n = 0, \ldots, 4$
26: $2^{1/10}$ cis(63° + n72°), $n = 0, \ldots, 4$
27: $2^{1/10}$ cis(9° + n 72°), $n = 0, \ldots, 4$
29: $2^{1/6}$ cis (40° + n60°), $n = 0, \ldots, 5$
30: $2^{1/18}$ cis (5° + n40°), $n = 0, \ldots, 8$
31: $2^{1/8}$ cis (37°30′ + n45°), $n = 0, \ldots, 7$
33: 4 cis (135° + n180°), $n = 0,1$ **34:** 5 cis (45° + n180°), $n = 0,1$
35: 3 cis (90° + n120), $n = 0,1,2$ **37:** 2 cis n90°, $n = 0,1,2,3$
38: 3 cis (45° + n90°), $n = 0,1,2,3$
39: cis (18° + n72°), $n = 0,1, \ldots, 4$

EJERCICIO 52: USO DE LOS TEOREMAS DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

1: 6 2: -14 3: 26 5: -7 6: -14 7: 67 9: 4
10: 21 11: 1 13: 4 14: 95 15: -1 37: $1, -2, -1$
38: $3, -5, 2$ 39: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ 41: $-4, 1, 1$ 42: $2, -1, -5$
43: $-3, 1, 3$

EJERCICIO 53: DIVISION SINTETICA

1: $x^2 - 2x, -3$ 2: $x^2 + 3x - 9, 19$ 3: $2x^2 - x + 5, -16$
5: $-3x^2 - x - 1, -2$ 6: $-2x^2 - 2x + 1, 2$ 7: $-2x^2 + 4x - 7, 14$
9: $x^3 + 2x^2 + 3x + 6, 26$ 10: $x^3 + 3x - 8, 35$
11: $-3x^3 + 2x^2 - 2x + 1, -2$ 13: $x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 8, 19$
14: $x^4 - x^3 + 3x^2 + 3x + 1, -1$ 15: $-2x^4 - 3x^3 - 2x - 3, -1$
17: $2x^2 - 2x + 1, -2$ 18: $x^3 - 2x^2 + 5x - 10, 19$
19: $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x + 13, 26$ 21: $9x^3 + 3x^2 + 9x + 3, -3$
22: $4x^2 + 6, -6$ 23: $8x^2 - 4, 2$
25: $x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 2, -1$
26: $3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 5x - 6, 6$
27: $2x^4 - 6x^3 + 18x^2 + x - 3, 9$ 29: $x^2 - 3ax + 6a^2, -9a^3$
30: $3x^2 + 4ax + 5a^2, 8a^3$ 31: $2x^3 + ax^2 + a^2x + 2a^3, 2a^4$
33: 4 34: 5 35: -10 37: 2 38: 3 39: $-2, 5$

EJERCICIO 55: LOCALIZACION DE RAICES

En las respuestas 1 a 7, se da primero el grado y luego cada raíz seguida de su multiplicidad.

1: 5; 3,2; -4, 3 2: 5; 3, 1; -1, 1; 1,3 3: 7; -2, 2; 2, 1; -4,4
5: 9; $\frac{1}{2}$, 2; $-\frac{5}{3}$, 3; $-\frac{3}{2}$, 4 6: 10; $\frac{7}{3}$, 1; $-\frac{5}{2}$, 3; $-\frac{9}{4}$, 6
7: 10; $\frac{7}{2}$, 4; $-\frac{8}{3}$, 5; $\frac{1}{2}$, 1 9: -2 y 3; entre -2 y -1, 0 y 1, 1 y 2
10: -2 y 2; entre -2 y -1, 0 y 1, 1 y 2 11: 1 y 4; entre -1 y 0, 0 y 1, 3 y 4
13: -4 y 4; entre -3 y -2, -1 y 0, 3 y 4 14: 0 y 7; entre 0 y 1, 2 y 3, 3 y 4
15: -2 y 5; entre -2 y -1, 0 y 1, 4 y 5
17: -3 y 5; entre -3 y -2, -1 y 0, 1 y 2, 3 y 4
18: -2 y 7; entre -2 y -1, 0 y 1, 3 y 4, 4 y 5
19: -3 y 3; entre -3 y -2, -1 y 0, 1 y 2, 2 y 3
21: -6 y 8; entre -5 y -4, -2 y -1, 0 y 1, 7 y 8
22: -4 y 2; entre -4 y -3, -2 y -1, 0 y 1, 1 y 2
23: -5 y 2; entre -4 y -3, -3 y -2, 0 y 1, 1 y 2
25: 1 y 5; entre 1 y 2 26: 0 y 5; entre 2 y 3
27: 0 y 2; entre 0 y 1 29: -1 y 5; entre -1 y 0, 3 y 4
30: -1 y 4 ;entre -1 y 0, 2 y 3 31: -1 y 5, entre -1 y 0, 3 y 4
33: Entre -1 y $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y 0, 3 y 4
34: Entre -2 y $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ y -1, 3 y 4
35: Entre -1 y 0, 3 y $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ y 4 37: Entre 0 y 1, 1 y $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ y 2
38: Entre -1 y $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ y 0, 4 y 5
39: Entre -2 y $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ y 1, 0 y 1

EJERCICIO 56: DETERMINACION DE RAICES

1: $2, 3, -1$ 2: $1, -1, 4$ 3: $2, -2, 3$ 5: $\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, 2$
6: $-\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, 1$ 7: $-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{5}$ 9: $\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ 10: $-1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$
11: $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$ 13: $3, 2, -1, -2$ 14: $1, 1, -2, -2$
15: $2, -2, -2, -2$ 17: $\frac{1}{3}, 2, -2, -\frac{1}{2}$ 18: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
19: $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 2$ 21: $1, 1 \pm \sqrt{2}$ 22: $-2, (1 \pm \sqrt{3})/2$
23: $\frac{1}{2}, (1 \pm \sqrt{5})/2$ 25: $-\frac{1}{2}, (1 \pm \sqrt{3}i)/2$ 26: $\frac{1}{3}, (3 \pm \sqrt{3}i)/2$
27: $1\frac{1}{2}, (-5 \pm \sqrt{7}i)/4$ 29: $\pm 2, 1 \pm i$ 30: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \pm i$
31: $-1, -1, 1 \pm \sqrt{2}i$ 33: $1, -1, -1, 1 \pm 2i$ 34: $2, 2, 2, 2 \pm 2i$
35: $1, \frac{2}{3}, -1\frac{1}{2}, 1 \pm \sqrt{5}i$

EJERCICIO 57: REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

1: 2, 1 2: 1, 2 3: 3, 0 5: 0, 1 6: 1, 0 7: 1, 0
9: 3, 1 10: 4, 0 11: 2, 2 17: $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$
18: $x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$ 19: $x^3 - x^2 + x + 39 = 0$
21: $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$ 22: $x^4 - 10x^3 + 39x^2 - 70x + 50 = 0$
23: $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = 0$
25: $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 4x - 12 = 0$
26: $x^5 + 2x^3 + 10x^2 + x + 10 = 0$ 27: $x^5 - 2x^4 + 40x^2 - 41x - 78 = 0$

EJERCICIO 58: RAICES IRRACIONALES

1: $-1.9-, .7+, 2.2-$ 2: $-.9+, .7+, 3.1+$ 3: $-1.9-, .8+, 3.1-$
5: $-1.9-, -.1-, 2.5+$ 6: $-2.4+, -1.6+, 1.5-$
7: $-1.9-, .2-, 2.1-$ 9: .20 10: .77 11: .43 13: 1.91
14: 1.88 15: 1.93 17: .18 18: 1.82 19: .75

EJERCICIO 59: DECRECIMIENTO DE LAS RAICES DE ECUACIONES Y METODO DE HORNER

1: $x^3 + 6x^2 + 4x - 13 = 0$ 2: $x^3 + 8x^2 + 14x - 7 = 0$
3: $3x^3 + 16x^2 + 32x + 23 = 0$ 5: $x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 18x + 9 = 0$
6: $x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 28x - 3 = 0$
7: $2x^4 + 20x^3 + 68x^2 + 83x + 9 = 0$ 9: $x^3 + .3x^2 + 2.03x - .799 = 0$
10: $x^3 + 1.6x^2 - 1.48x + 1.648 = 0$ 11: $2x^3 - .2x^2 + .34x - .826 = 0$
13: .17 14: .07 15: .76 17: 1.29 18: 1.31 19: 2.82
21: .22 22: 1.75 23: 1.73 25: 3.351 26: 2.087
27: -3.940 29: $1.414, -1.414$ 30: $.866, -.866$ 31: 2.618, .382
33: 1.710 34: 1.817 35: 2.080 37: 1.316 38: 1.495
39: 1.149

EJERCICIO 60: SOLUCION DE ECUACIONES DE TERCERO Y CUARTO GRADOS

1: $1, 1 + i, 1 - i$ 2: $2, 1 + 3i, 1 - 3i$ 3: $2, 2 + 2i, 2 - 2i$
5: $2, 2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}$ 6: $-2, -2 + 3i\sqrt{3}, -2 - 3i\sqrt{3}$
7: $-3, -3 + 2i\sqrt{3}, -3 - 2i\sqrt{3}$ 9: $4, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$
10: $1, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$ 11: $1, 4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}$

13: $-3, -3+2\sqrt{3}, -3-2\sqrt{3}$ **14:** $2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, 2$
15: $3+3\sqrt{3}, 3-3\sqrt{3}, 3$ **17:** $\pm 1, 3, -2$ **18:** $\pm 2, -1, 3$
19: $1, 2, -3, \frac{1}{2}$ **21:** $\pm\sqrt{2}, 1, -3$ **22:** $\pm\sqrt{3}, -1, -2$
23: $\pm\sqrt{2}, 1\pm\sqrt{2}$ **25:** $1\pm\sqrt{3}, 1\pm\sqrt{2}$ **26:** $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{5}), \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$
27: $1\pm\sqrt{3}, 1\pm i$

EJERCICIO 62: SOLUCION DE DESIGUALDADES

1: $x > -\frac{1}{2}$ **2:** $x > \frac{4}{3}$ **3:** $x < \frac{5}{3}$ **5:** $x > 1$ **6:** $x > \frac{3}{2}$
7: $x < \frac{3}{2}$ **9:** $-.3 < x < 3.3$ **10:** $-1.6 < x < 3.6$
11: $x < -4.7, x > 1.6$ **13:** $x > 2.2, -2.2 < x < 1$
14: $x > 1.4, -1.4 < x < 1$ **15:** $x > 1, -2 < x < -1$ **17:** $x > 2$
18: $x > -4$ **19:** $x < 2$ **21:** $x > 2$ **22:** $x < 1$ **23:** $x > \frac{1}{2}$
25: $x < 2$ **26:** $x < -1.75$ **27:** $x < -\frac{2}{3}$ **29:** $x > -1$
30: $x < -11$ **31:** $x < 1.75$ **33:** $-.5 < x < 1$ **34:** $x < \frac{2}{3}, x > 2$
35: $x < -\frac{2}{3}, x > 1.5$ **37:** $x > 1, x < \frac{2}{3}$ **38:** $-3 < x < .5$
39: $x < -.5, x > \frac{2}{3}$ **41:** $x < -.5, 1 < x < 2$
42: $x < -1, 1.5 < x < 2$ **43:** $x < -1, \frac{2}{3} < x < 2.5$ **45:** $-1 < x < 3$
46: $-3 < x < -1$ **47:** $x < 2, x > 4$ **49:** $2 < x < 3$
50: $-\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$ **51:** $-1.5 < x < 2.5$ **53:** $x < -1, x > 2$
54: $x < -\frac{10}{3}, x > 2$ **55:** $x < -1, x > -\frac{1}{5}$ **57:** $x > a, x < -a$
58: Ninguna **59:** $a < x < -a$ **61:** $x > 3, x < -2$
62: $x > 1, x < -3$ **63:** $x > 3, x < -1$

EJERCICIO 63: EXPRESIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

1: $3^2 = 9$ **2:** $6^2 = 36$ **3:** $2^3 = 8$ **5:** $2^{-2} = \frac{1}{4}$ **6:** $3^{-3} = \frac{1}{27}$
7: $4^{-3} = \frac{1}{64}$ **9:** $4^{5/2} = 32$ **10:** $16^{3/4} = 8$ **11:** $(27)^{4/3} = 81$
13: $(\frac{1}{4})^{3/2} = \frac{1}{8}$ **14:** $(\frac{8}{27})^{2/3} = \frac{4}{9}$ **15:** $(\frac{9}{4})^{5/2} = \frac{243}{32}$ **17:** $(a^2)^3 = a^6$
18: $(a^{1/3})^6 = a^2$ **19:** $(a^3)^{2/3} = a^2$ **21:** $\log_7 49 = 2$ **22:** $\log_3 81 = 4$
23: $\log_2 32 = 5$ **25:** $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ **26:** $\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$ **27:** $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$
29: $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ **30:** $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ **31:** $\log_{1/8} 2 = -\frac{1}{3}$
33: $\log_{1/27} 9 = -\frac{2}{3}$ **34:** $\log_{9/16} \frac{4}{3} = -\frac{1}{2}$ **35:** $\log_{16/81} \frac{27}{8} = -\frac{3}{4}$
37: 2 **38:** 2 **39:** 2 **41:** 6 **42:** 3 **43:** 4 **45:** $\frac{1}{2}$
46: $\frac{1}{2}$ **47:** $\frac{1}{2}$ **49:** $\frac{1}{3}$ **50:** $\frac{1}{5}$ **51:** $\frac{1}{7}$ **53:** 4 **54:** $\frac{2}{3}$
55: 10 **57:** 216 **58:** 256 **59:** 256 **61:** 7 **62:** 5 **63:** 3
65: 81 **66:** 81 **67:** 216 **69:** 8 **70:** 81 **71:** 32

EJERCICIO 64: LOGARITMOS DE NUMEROS

1: 1 **2:** 0 **3:** 1 **5:** 2 **6:** 1 **7:** 0 **9:** 2 **10:** -1
11: -2 **13:** -2 **14:** -3 **15:** -4 **17:** 1.5575 **18:** 0.4969
19: 0.7945 **21:** 9.8971 − 10 **22:** 8.4150 − 10 **23:** 0.6212
25: 7.4771 − 10 **26:** 9.7860 − 10 **27:** 8.7709 − 10
29: 8.6902 − 10 **30:** 1.4843 **31:** 0.7050 **33:** 3.1072
34: 4.8432 **35:** 4.4914 **37:** 7.3222 **38:** 5.7910 **39:** 4.6117
41: 3.8265 **42:** 1.2840 **43:** 0.5054 **45:** 9.0832 − 10
46: 8.8835 − 10 **47:** 2.4770 **49:** 7.9646 − 10 **50:** 6.6968 − 10
51: 4.8996 **53:** 8.6097 − 10 **54:** 2.7479 **55:** 0.7866
57: 1.3911 **58:** 2.5923 **59:** 1.0082

EJERCICIO 65: OBTENCION DE NUMEROS A PARTIR DE SUS LOGARITMOS

1: 563 2: 8020 3: .226 5: 259,000 6: .0406 7: 249
9: 6.36 10: 365 11: .0000851 13: .000458 14: 805
15: 2780 17: 754 18: 30.6 19: 8030 21: 24.8 22: 708
23: .0179 25: .00269 26: .318 27: .0643 29: 1.49
30: 387 31: .0508 33: 155.7 34: 41.45 35: 7974
37: .5238 38: .03994 39: 5.274 41: 15.89 42: .0002639
43: 103.1 45: .09282 46: 581.6 47: 13,290,000

EJERCICIO 66: OPERACIONES NUMERICAS CON LOGARITMOS

1: 12.7 2: 5.52 3: 3.04 5: .000287 6: .0643 7: .00403
9: 7.89 10: 34.7 11: 19.4 13: 3.91 14: .0102 15: .333
17: 7.92 18: 7.84 19: .946 21: 2.49 22: 24.7 23: 1.52
25: 10.7 26: 13.6 27: 9.85 29: 3.36 30: .690 31: .346
33: 1,468,000 34: .5308 35: .5734 37: .3939 38: .7793
39: 4.833 41: 1.120 42: 38.21 43: .003603 45: .5904
46: 6.906 47: .01239 49: $\log c + \log x - \log (x - 3)$
50: $\log c + 3 \log x - \log (x + 1)$ 51: $\log c + 2 \log x + \frac{1}{3} \log (x + 3)$
53: $\log c + 3 \log (x + y) - \frac{1}{2} \log (x - y)$
54: $\log c + 2 \log x + 3 \log y - 2 \log (x + y)$
55: $\log c - \frac{2}{3} \log x - 3 \log (x - y)$ 57: $\log cx$ 58: $\log \dfrac{cx^2}{x - 1}$
59: $\log \dfrac{c(x + 1)^3}{x}$ 61: $\log \dfrac{\sqrt{x - y}}{\sqrt[3]{c}}$ 62: $\log \dfrac{c^2}{\sqrt{x - 2y}}$
63: $\log \dfrac{x^2(2x + y)}{c^3}$

EJERCICIO 67: LOGARITMOS DE BASES DIFERENTES DE 10

1: 3.15 2: 1.65 3: 2.20 5: 2.34 6: 1.78 7: 1.96
9: .164 10: 6.52 11: 4.63 13: 3.03 14: .00952 15: 2.36
17: 2.94 18: 5.45 19: 5.77 21: 3.76 22: 2.50 23: 3.67

EJERCICIO 68: ECUACIONES LOGARITMICAS

1: $\log_e y - \log_e 2$ 2: $x = \log_e a - \log_e y$ 3: $x = \dfrac{-\log_e y}{b}$
5: $\log_r a + \log_r y$ 6: $\log_r y - \log_r a - 1$ 7: $\log_{c+r} y - \log_{c+r} 2$
9: $(e^y + e^{-y})/2$ 10: $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{9 + 4e^{2y}})$ 11: $2(e^{2y} - 1)/(e^{2y} + 1)$
13: 3 14: 4 15: 2 17: 4 18: 1 19: 3, −1 21: .187
22: −4.440 23: .487 25: 6 26: 3 27: 30 29: 7
30: 6 31: 5, 2 33: $x = 2.548$, $y = .226$ 34: $x = .6$, $y = .7$
35: $x = 4$, $y = 1$ 37: $x = 1.1929$, $y = .2386$
38: $x = -7.22$, $y = -3.41$ 39: $x = 500$, $y = 20$

EJERCICIO 70: PROGRESIONES ARITMETICAS

1: 3, 6, 9, 12, 15 2: 6, 4, 2, 0, −2, −4 3: −4, −2, 0, 2, 4, 6, 8
5: 7, 5, 3, 1, −1, −3, −5, −7 6: −6, −4, −2, 0, 2
7: 8, 5, 2, −1, −4, −7, −10 9: 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2

10: 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2   11: 15, 12, 9, 6, 3, 0, −3, −6   13: 10
14: 5   15: 14   17: −3   18: 0   19: −13   21: 63   22: 32
23: 14   25: 60   26: 12   27: −91   29: $l = -5, s = -12$
30: $l = -3, s = 12$ 31: $d = 2, s = 63$ 33: $a = 3, d = -2$
34: $a = -4, d = 1$ 35: $n = 9, d = 3$ 37: $n = 9, s = -54$
38: $n = 9, s = 9$ 39: $l = -6, d = -1$ 41: $a = 17, s = 80$
42: $a = 19, s = 44$ 43: $l = -5, n = 9$
45: $a = 12, n = 12$ 46: $a = -9, n = 9$ 47: $l = -3, a = 13$
49: 5, 8, 11   50: 5, 9, 13, 17   51: 34, 31, 28, 25, 22   53: 286
54: 247   55: 126   57: \$152.52   58: \$7.31   59: \$5.76
61: 89   62: 21   63: \$320   65: \$18   66: \$3.11   67: 2

EJERCICIO 71: PROGRESIONES GEOMETRICAS

1: 3, 6, 12, 24, 48   2: $\frac{1}{2}$, −1, 2, −4, 8, −16   3: −4, −12, −36, −108
5: 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 6: $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, −1, 2, −4, 8, −16
7: −16, ± 8, −4, ±2, −1, $\pm\frac{1}{2}$ 9: 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
10: $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25, 125, 625   11: $\frac{2}{3}$, 2, 6, 18, 54, 162, 486   13: 32
14: 1   15: 81   17: $\frac{1}{5}$ 18: $\frac{1}{7}$ 19: 27   21: 31   22: $121\frac{1}{3}$
23: 781.2   25: 156.2   26: $121\frac{4}{9}$ 27: $\frac{1023}{6}$ 29: $n = 5, s = 242$
30: $n = 6, s = 126$ 31: $s = \frac{364}{9}, a = \frac{1}{9}$ 33: $s = \frac{127}{8}, r = 2$
34: $s = 400, n = \frac{1}{7}$ 35: $n = 9, a = 256$ 37: $n = 5, l = 162$
38: $n = 6, l = 2$ 39: $a = \frac{1}{9}, r = 3$ 41: $a = \frac{1}{8}, l = 8$
42: $a = 343, l = 1$ 43: $r = .5, l = 64, r = -1.5, l = 576$ 45: 6, 12
46: 5,25   47: $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4   49: ±4, 8, ±16   50: ±32
51: $\pm\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \pm 1, 2, \pm 4$ 53: 254
54: Gana \$67.50 con el segundo plan   55: 2
57: \$65 796.60   58: \$5 042.10   59: \$81 000

EJERCICIO 72: PROGRESIONES GEOMETRICAS INFINITAS

1: 10   2: 4.5   3: 5   5: 10   6: 37.5   7: 20   9: 5
10: 3   11: $\frac{1024}{3}, -\frac{1024}{5}$ 13: $\frac{1}{3}$ 14: $\frac{5}{9}$ 15: $\frac{70}{9}$ 17: $\frac{20}{33}$
18: $\frac{14}{33}$ 19: $\frac{250}{33}$ 21: $\frac{519}{110}$ 22: $\frac{758}{165}$ 23: $\frac{292}{555}$ 25: 2
26: 3   27: 5   29: 18.2 m   30: 18 centímetros   31: 20 m
33: \$1000   34: \$71 000   35: 72 centímetros cuadrados
37: $1/2(x - 2)$ 38: $x > 0, x < -1, 1/2x$ 39: $x > \frac{1}{3}, x < -1$, $1/(3x - 1)$

EJERCICIO 73: PROGRESIONES ARMONICAS

1: Armónica, $\frac{1}{9}, \frac{1}{11}$ 2: Armónica $\frac{1}{14}, \frac{1}{17}$ 3: Armónica, $-\frac{1}{7}, -\frac{1}{9}$
5: Armónica, $\frac{5}{3}, \frac{23}{12}$ 6: Armónica, $\frac{12}{25}, \frac{12}{29}$ 7: Armónica, $\frac{6}{11}, \frac{6}{13}$
9: Aritmética, 14, 17   10: Aritmética, −13, −17
11: Aritmética, 1, $\frac{7}{6}$ 13: Geométrica, 2, 4   14: Geométrica, $\frac{27}{8}, \frac{81}{16}$
15: Geométrica, $x^3/(x + 1)^3, x^4/(x + 1)^4$ 17: $\frac{1}{5}$ 18: 8   19: $\frac{1}{2}$, −1
21: $\frac{12}{7}$, 1.2   2: $\frac{15}{11}, \frac{15}{16}$ 23: $\frac{30}{11}, \frac{30}{17}, \frac{30}{30}, \frac{30}{23}, \frac{3}{29}$.

EJERCICIO 75: USO DE LA FORMULA DEL BINOMIO

1: $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
2: $b^7 + 7b^6d + 21b^5d^2 + 35b^4d^3 + 35b^3d^4 + 21b^2d^5 + 7bd^6 + d^7$

3: $u^6 + 6u^5v + 15u^4v^2 + 20u^3v^3 + 15u^2v^4 + 6uv^5 + v^6$
5: $p^6 - 6p^5q + 15p^4q^2 - 20p^3q^3 + 15p^2q^4 - 6pq^5 + q^6$
6: $a^8 - 8a^7y + 28a^6y^2 - 56a^5y^3 + 70a^4y^4 - 56a^3y^5 + 28a^2y^6 - 8ay^7 + y^8$
7: $p^7 - 7p^6x + 21p^5x^2 - 35p^4x^3 + 35p^3x^4 - 21p^2x^5 + 7px^6 - x^7$
9: $x^7 + 14x^6b + 84x^5b^2 + 280x^4b^3 + 560x^3b^4 + 672x^2b^5 + 448xb^6 + 128b^7$
10: $p^6 + 18p^5q + 135p^4q^2 + 540p^3q^3 + 1215p^2q^4 + 1458pq^5 + 729q^6$
11: $256a^8 + 1024a^7b + 1792a^6b^2 + 1792a^5b^3 + 1120a^4b^4 + 448a^3b^5 +$
$112a^2b^6 + 16ab^7 + b^8$
13: $64a^6 - 192a^5t + 240a^4t^2 - 160a^3t^3 + 60a^2t^4 - 12at^5 + t^6$
14: $243c^5 - 405c^4d + 270c^3d^2 - 90c^2d^3 + 15cd^4 - d^5$
15: $x^4 - 20x^3w + 150x^2w^2 - 500xw^3 + 625w^4$
17: $a^{24} - 8a^{21}b + 28a^{18}b^2 - 56a^{15}b^3 + 70a^{12}b^4 - 56a^9b^5 + 28a^6b^6 - 8a^3b^7 + b^8$
18: $64b^6 - 192b^5x^2 + 240b^4x^4 - 160b^3x^6 + 60b^2x^8 - 12bx^{10} + x^{12}$
19: $a^{14} - 7a^{12}y^3 + 21a^{10}y^6 - 35a^8y^9 + 35a^6y^{12} - 21a^4y^{15} + 7a^2y^{18} - y^{21}$
21: $a^7 - 7a^5 + 21a^3 - 35a + 35/a - 21/a^3 + 7/a^5 - 1/a^7$
22: $32x^5 - 80x^3 + 80x - 40/x + 10/x^3 - 1/x^5$
23: $\dfrac{1024}{x^{10}} - \dfrac{640}{x^7} + \dfrac{160}{x^4} - \dfrac{20}{x} + \dfrac{5x^2}{4} - \dfrac{x^5}{32}$
25: $16a^8 - 96a^6b^3 + 216a^4b^6 - 216a^2b^9 + 81b^{12}$
26: $64x^6 + 96x^5y^2 + 60x^4y^4 + 20x^3y^6 + \frac{15}{4}x^2y^8 + \frac{3}{8}xy^{10} + y^{12}/64$
27: $\dfrac{a^{5/2}}{243} - \dfrac{10}{27}a^2b + \dfrac{40}{3}a^{3/2}b^2 - 240ab^3 + 2160a^{1/2}b^4 - 7776b^5$
29: $a^{14} + 28a^{13}b + 364a^{12}b^2 + 2912a^{11}b^3$
30: $x^{23} - 69x^{22}y + 2277x^{21}y^2 - 47{,}817x^{20}y^3$
31: $y^{19} - 57y^{18}c + 1539y^{17}c^2 - 26{,}163y^{16}c^3$
33: $a^{40} - 20a^{38}b + 190a^{36}b^2 - 1140a^{34}b^3$
34: $x^{33} + 11x^{30}y + 55x^{27}y^2 + 165x^{24}y^3$
35: $x^{24} + 24x^{22}a + 264x^{20}a^2 + 1760x^{18}a^3$ 37: 970,299 38: 108,243,216
39: 1.0510100501 41: $-4032x^4y^5$ 42: $1120a^4b^4$ 43: $715h^4y^9$
45: $3432(-2)^7x^{14}$ 46: $2268x^{18}$ 47: $24{,}310(3^8)x^6$ 49: 70
50: $63x^5/8$ 51: $\dfrac{-5}{16x^3}$ 53: $-540x^3y^3$ 54: $80a^3x^4$ 55: $-2016a^5b^4$

EJERCICIO 76: USO DE LA FORMULA DEL BINOMIO PARA EXPONENTES NEGATIVOS Y FRACCIONARIOS

1: $x^{-2} - 2x^{-3}y + 3x^{-4}y^2 - 4x^{-5}y^3$ 2: $a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3$
3: $a^{-3} + 3a^{-4}y + 6a^{-5}y^2 + 10a^{-6}y^3$ 5: $x^{-1} + 3x^{-2}y + 9x^{-3}y^2 + 27x^{-4}y^3$
6: $\dfrac{x^{-2}}{4} - \dfrac{x^{-3}a}{4} + \dfrac{3x^{-4}a^2}{16} - \dfrac{x^{-5}a^3}{8}$ 7: $\dfrac{x^{-2}}{9} - \dfrac{2x^{-3}b}{27} + \dfrac{x^{-4}b^2}{27} - \dfrac{4x^{-5}b^3}{243}$
9: $a^{1/2} - \dfrac{a^{-1/2}x}{2} - \dfrac{a^{-3/2}x^2}{8} - \dfrac{a^{-5/2}x^3}{16}$ 10: $b^{2/3} + \dfrac{2b^{-1/3}y}{3} - \dfrac{b^{-4/3}y^2}{9} + \dfrac{4b^{-7/3}y^3}{81}$
11: $c^{3/4} + \dfrac{3c^{-1/4}w}{4} - \dfrac{3c^{-5/4}w^2}{32} + \dfrac{5c^{-9/4}w^3}{128}$ 13: $1 - \dfrac{2x}{3} + \dfrac{5x^2}{9} - \dfrac{40x^3}{81}$
14: $1 + \dfrac{y}{3} + \dfrac{2y^2}{9} + \dfrac{14y^3}{81}$ 15: $1 + \dfrac{t}{5} + \dfrac{3t^2}{25} + \dfrac{11t^3}{125}$
17: $x^{-1} - x^{-3} + x^{-5} - x^{-7}$ 18: $y^{-2} - 2y^{-5} + 3y^{-8} - 4y^{-11}$
19: $x - \dfrac{x^{-3}}{3} - \dfrac{x^{-7}}{9} - \dfrac{5x^{-11}}{81}$ 21: 11.045 22: 5.013 23: 1.987
25: .908 26: .890 27: .933

EJERCICIO 77: INTERES COMPUESTO

1: \$853.16 2: \$738.75 3: \$262.40 5: \$843.48 6: \$3286.69
7: \$155.20 9: \$1529.86 10: \$6309.99 11: \$9400.10
13: \$3502.82 14: \$345.68 15: \$581.72 17: 3 años

18: 5.5. años 19: 17 años 21: 3.41 por ciento 22: 4.82 por ciento
23: 4.34 por ciento 25:6.09 por ciento 26: 4.04 por ciento
27: 5.06 por ciento 29: 8.24 por ciento 30: 6.14 por ciento
31: 10.38 por ciento 33: $ 2039.90 34: Operación de contado, $ 20.70
35: Pagar al contado, $ 11.60 37: $ 19 009.90 38: 3895.80
39: $ 17 879.44 41: 14 203 años 42: 17 501 años
53: .254 años 45: 4.02 por ciento 46: 4:51 por ciento 47: 4.31 por ciento

EJERCICIO 78: RENTAS

1: **$3,949.15, $3,001.05** **2:** **$3,315.36, $2,597.70**
3: **$8,463.87, $3,143.19** **5:** **$13,831.88, $4,498.50**
6: **$60,878.88, $19,551.02** **7:** **$174,079, $26,493.88**
9: **$59,826.07, $29,276.64** **10:** **$58,753.67, $28,802.34**
11: **$8,707.30, $5,407.16** **13:** **$149,206.02, $12,910.38**
14: **$32,719.42, $7,949.08** **15:** **$28,493.67, $9,266.91**
17: **$34,788.79, $8,931.53** **18:** **$31,817.65, $13,742.22**
19: **$6,115.35, $4,281.72** **21:** **$19,141.04, $8,008.63**
22: **$18,793.90, $9,413.45** **23:** **$67,078.24, $32,825.58** **25:** **$13,2025.50**
26: $ 27 456.50 **27:** **$17,589.20** **29:** **$11,463.90**
30: **$44,000** al final de 8 años **31:** **$34,931.52**

EJERCICIO 79: PAGO PERIODICO, TASA Y TERMINO

1: **$875.44** **2:** **$452.46** **3:** **$984.21** **5:** **$766.24** **6:** **$362.86**
7: **$158.94** **9:** **5.41** por ciento **10:** 4.30 por ciento 11: 4.59 por ciento
13: 5.72 por ciento **14:** 8.94 por ciento **15:** 4.34 por ciento **17:** 20 años
18: 13 años **19:** 13 años **21:** 11 años **22:** 16 años
23: 12 años **25:** **$5537.92** **26:** **$38.42** **27:** **$238.59**
29: 4.01 por ciento **30:** 3.29 por ciento **31:** 5.85 por ciento

EJERCICIO 80: PERMUTACIONES DE *n* ELEMENTOS

1: 1,404,000 **2:** 1,757,600 **3:** 1260 **5:** 60 **6:** 120 **7:** 84
9: 36 **10:** 32 **11:** 6336 **13:** 90 **14:** 504 **15:** 2880
17: 6 **18:** 18 **19:** 12 **21:** 720 **22:** 120 **23:** 290

EJERCICIO 81: PERMUTACIONES DE *n* ELEMENTOS EN GRUPOS DE *r* ELEMENTOS; PERMUTACIONES CON ELEMENTOS REPETIDOS

1: 2520 **2:** 12 **3:** 604,800 **9:** 4,989,600 **10:** 3780
11: 3360 **13:** 3,628,800 **14:** 362,880 **15:** 39,916,800
17: 55,440 **18:** 6720 **19:** 60 **21:** 720 **22:** 120 **23:** 1800
25: 7,257,600 **26:** 103,680 **27:** 720

EJERCICIO 82: COMBINACIONES

1: 56,286 **2:** 330,171 **5:** 1820 **6:** 38,760 **7:** 84 **9:** 364
10: 28 **11:** 55 **13:** 119 **14:** 77 **15:** 1925 **17:** 10,788,000
18: 77,647,500 **19:** 1440 **21:** 2160 **22:** 420 **23:** 203
25: 63 **26:** 32 **27:** 56

EJERCICIO 83: PROBABILIDAD EMPIRICA Y EXPECTACION

1: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{26}$ **2:** $\frac{4}{13}, \frac{5}{13}$ **3:** $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ **5:** $\frac{8}{81}$ **6:** $\frac{41}{81}$ **7:** $\frac{1}{9}$
9: $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ **10:** $\frac{1}{36}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}$ **11:** $\frac{3}{10}$ **13:** $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{7}{9}$ **14:** $\frac{1}{22}, \frac{34}{99}, \frac{4}{33}$
15: $\frac{1}{435}, \frac{1}{145}$ **17:** $\frac{351}{4060}$ **18:** $\$.57\frac{9}{13}$ **19:** $\frac{3}{13}, \frac{5}{13}$ **21:** $\frac{3}{160}, \frac{3}{4}$
22: $\frac{3}{35}$ **23:** $\frac{1}{24}, \frac{3}{8}$ **25:** $[(13!)^5 39!]/[(7!6!)^4 52!]$ **26:** $\frac{1}{132}, \frac{1}{132}$
27: .6779, .4514 **29:** .5525, .7926 **30:** \$3693.44 **31:** \$152.43

EJERCICIO 84: PROBABILIDAD DE SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

1: .15, .35 **2:** $\frac{3}{16}$ **3:** Juan $\frac{3}{32}$, Tomás $\frac{27}{160}$, Guillermo $\frac{3}{80}$ **5:** $\frac{1}{2}, \frac{5}{12}$
6: $\frac{1}{16}, \frac{1}{192}$ **7:** $\frac{7}{320}$ **9:** $\frac{1}{8}, \frac{1}{120}$ **10:** $\frac{7}{48}, \frac{7}{192}$ **11:** $\frac{7}{12}$
13: $\frac{1}{100}, \frac{1}{50}$ **14:** $\frac{1}{3}$ **15:** $\frac{3}{200}$ **17:** $\frac{1083}{8000}$ **18:** $\frac{1}{15}$ **19:** $\frac{5}{18}$
21: $\frac{13}{1458}$ **22:** $\frac{1}{54}$ **23:** $\frac{49}{225}, \frac{64}{225}$ **25:** $\frac{4}{15}$ **26:** $\frac{1}{20}, \frac{1}{100}$
27: $\frac{12}{91}, \frac{40}{91}, \frac{10}{13}$ **29:** .260 **30:** .898 **31:** .0644

EJERCICIO 85: PROBABILIDAD DE PRUEBAS REPETIDAS

1: 125/3888, 23/648 **2:** $1701/10^7$, $1765/10^7$ **3:** .01536, .01696
5: 203/23328 **6:** 6125/725,594,112 **7:** 96/625, 112/625
9: 2, 80/243 **10:** 78,125/5,038,848 **11:** 6048/78,125
13: 133/91,125 **14:** 43,681/5,717,741,400,000 **17:** $\frac{1}{3}$ **18:** .451
19: $\frac{1}{3}$

EJERCICIO 86: DESARROLLO DE DETERMINANTES

1: 7 **2:** 10 **3:** 9 **5:** 14 **6:** 19 **7:** 17 **9:** más
10: más **11:** menos **13:** menos **14:** más **15:** más
17: -1 **18:** 10 **19:** -2 **21:** 19 **22:** -100 **23:** 8
33: -119 **34:** 63 **35:** 13 **37:** 28 **38:** 202 **39:** 2
41: $a^2b(a-b)^2$ **42:** $-ab(a+b)(a-b)^2$ **43:** $-ad-2bc$

EJERCICIO 87: MANIPULACION Y DESARROLLO DE DETERMINANTES

9: 35 **10:** 18 **11:** -16 **13:** 30 **14:** 35 **15:** 10
17: -8 **18:** 5 **19:** 6 **21:** -16 **22:** -24 **23:** 500
25: -7 **26:** 28 **27:** -16

EJERCICIO 88: SOLUCION DE ECUACIONES MEDIANTE DETERMINANTES

1: $x=1, y=2$ **2:** $x=3, y=2$ **3:** $x=2, y=3$
5: $x=1, y=2, z=3$ **6:** $x=2, y=-1, z=-2$
7: $x=3, y=-2, z=-1$ **9:** $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}, z=1$
10: $x=-\frac{2}{3}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{2}$ **11:** $x=\frac{3}{4}, y=-\frac{1}{3}, z=-\frac{1}{2}$
13: $x=1, y=-1, z=-2, w=2$ **14:** $x=2, y=-2, z=0, w=1$
15: $x=1, y=-2, z=2, w=-1$ **17:** $x=1, y=-2, z=3, w=2$
18: $x=4, y=-3, z=2, w=7$ **19:** $x=3, y=-2, z=1, w=-3$
21: $x=a, y=-a, z=2a$ **22:** $x=a, y=b, z=ab$
23: $x=a, y=-b, z=b, w=-a$ **25:** $x=1$ **26:** $y=-2$
27: $z=2$

EJERCICIO 89: PRUEBA PARA SOLUCIONES DE CONJUNTOS DE ECUACIONES

1: $x = 3, y = -1, z = 2$ 2: $x = 2, y = 1, z = 1$
3: No hay soluciones no triviales 5: $x = 3, y = -1, z = 4, w = 2$
6: No hay soluciones no triviales 7: $x = 1, y = 1, z = 1, w = 1$
17: $x = -2, y = 3$ 18: $x = 4, y = -5$ 19: No hay solución
21: $x = 2, y = -1, z = 3$ 22: No hay solución 23: $x = 4, y = -3, z = 3$

EJERCICIO 90: DESCOMPOSICION DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES, CASO I

1: $\frac{2}{x-1} - \frac{6}{3x-2}$ 2: $\frac{6}{2x+3} - \frac{3}{x+3}$ 3: $\frac{3}{3x+7} - \frac{2}{2x+5}$
5: $\frac{1}{2x+1} + \frac{3}{x-3}$ 6: $\frac{10}{3x+5} - \frac{6}{x+3}$ 7: $\frac{6}{5x-8} - \frac{3}{3x-4}$
9: $\frac{5}{x-3} - \frac{4}{x-4}$ 10: $\frac{6}{2x-5} - \frac{3}{2x-1}$ 11: $\frac{4}{3x-7} - \frac{5}{2x-5}$
13: $\frac{4}{2x+1} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3}$ 14: $\frac{3}{3x-2} - \frac{2}{x+5} + \frac{2}{2x+1}$
15: $\frac{3}{x+1} - \frac{3}{3x-5} - \frac{4}{2x+7}$ 17: $\frac{2}{2x-3} + \frac{1}{x+4} - \frac{3}{3x-1}$
18: $\frac{1}{x+6} + \frac{2}{2x+3} - \frac{3}{x+2}$ 19: $\frac{1}{3(x+4)} - \frac{4}{3(4x-5)} - \frac{1}{2x-3}$
21: $3 + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{x-3}$ 22: $1 + \frac{4}{2x+3} - \frac{3}{x-5}$
23: $x - \frac{5}{2x+1} + \frac{2}{3x-5}$

EJERCICIO 91: DESCOMPOSICION DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES, CASO II

1: $\frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$ 2: $\frac{3}{(x-4)^2} - \frac{2}{x-4}$ 3: $\frac{2}{(3x-1)^2} + \frac{1}{3x-1}$
5: $\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)}$ 6: $\frac{5}{(2x-3)^3} + \frac{3}{(2x-3)^2} - \frac{4}{2x-3}$
7: $\frac{6}{(3x+2)^3} - \frac{5}{(3x+2)^2} + \frac{3}{3x+2}$ 9: $\frac{2}{2x-1} - \frac{5}{x-4} + \frac{3}{(x-4)^2}$
10: $\frac{2}{2x+3} - \frac{1}{3x-1} + \frac{5}{(3x-1)^2}$ 11: $\frac{2}{5x+2} - \frac{3}{2x-7} - \frac{1}{(2x-7)^2}$
13: $\frac{2}{2x+1} - \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2}$
14: $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$
15: $\frac{2}{2x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{2x-3} - \frac{3}{(2x-3)^2}$
17: $2 + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$ 18: $3 + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2}$
19: $1 + \frac{1}{2x+1} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$

EJERCICIO 92: DESCOMPOSICION DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES, CASO III

1: $\frac{1}{x-1} - \frac{x+3}{x^2+2}$ 2: $\frac{3}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2+1}$ 3: $\frac{1}{x-3} + \frac{2x-5}{x^2+x+1}$

5: $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{x-4}{x^2+3}$ 6: $\dfrac{2}{x+5} + \dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{x-5}{x^2+3}$

7: $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{1}{3x+1} - \dfrac{2x-1}{x^2-x+2}$ 9: $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{2x-3}{x^2+1}$

10: $\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{3x+1}{x^2+5}$ 11: $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$

13: $\dfrac{3x-1}{x^2+2} - \dfrac{x-1}{x^2-2}$ 14: $\dfrac{2x-5}{x^2-3x-1} + \dfrac{x-2}{x^2+1}$

15: $\dfrac{x-3}{x^2-5} + \dfrac{2x+1}{x^2-x+3}$ 17: $2 + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-1}{x^2+1}$

18: $3 - \dfrac{2}{2x-3} + \dfrac{x+3}{x^2+5}$ 19: $1 + \dfrac{2}{x-5} - \dfrac{x+5}{2x^2-3x+2}$

EJERCICIO 93: DESCOMPOSICION DE FRACCIONES EN FRACCIONES PARCIALES, CASO IV

1: $\dfrac{x+2}{x^2-2} + \dfrac{2x+1}{(x^2-2)^2}$ 2: $\dfrac{2x-3}{x^2+3} - \dfrac{3x+1}{(x^2+3)^2}$

3: $\dfrac{2x+1}{x^2-x-3} + \dfrac{x-5}{(x^2-x-3)^2}$ 5: $\dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{2x-3}{(x^2+1)^3}$

6: $\dfrac{x}{(x^2+2)^2} + \dfrac{2x-5}{(x^2+2)^3}$ 7: $\dfrac{x}{x^2+x-1} + \dfrac{x-2}{(x^2+x-1)^2} - \dfrac{x+2}{(x^2+x-1)^3}$

9: $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{x-1}{(x^2+3x-1)^2}$ 10: $\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2+2} - \dfrac{2x-3}{(x^2+2)^2}$

11: $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2x-1}{x^2+3x-1} + \dfrac{x+3}{(x^2+3x-1)^2}$ 13: $\dfrac{1}{x^2-3} - \dfrac{3x}{(x^2-3)^2} + \dfrac{4}{x+2}$

14: $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{2}{x^2+2} - \dfrac{2x-1}{(x^2+2)^2}$

15: $\dfrac{2}{2x-1} + \dfrac{x}{x^2-x+1} - \dfrac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$

GLOSARIO

abscisa La distancia dirigida medida perpendicular desde el eje de las Y hasta un punto, en un sistema de coordenadas cartesianas (*q.v.*). Consúltese: ordenada, origen.

alternación La proporción obtenida de una proporción dada mediante el intercambio de los medios o de los extremos.

amplitud El ángulo formado entre el lado positivo del eje de las X y el segmento de recta desde un punto del plano complejo (*q.v.*) al origen. También se le llama argumento del número complejo correspondiente. Consúltese: coordenadas polares

anualidad Véase renta.

argumento Véase amplitud.

axioma Una proposición que se acepta sin demostración.

binomio Una expresión algebraica que contiene exactamente dos términos.

Capital Una cantidad de que se invierte para producir interés

característica La parte entera del logaritmo decimal de un número. Por ejemplo, en log. $20 = 1.3010$, la caracterésica es 1 y la mantisa (*q.v.*) es .3010. Consúltese: logaritmos de Briggs.

cero de una función Un valor de la variable que anula a la función. Por ejemplo, si $f(r) = 0$, entonces r es un cero de la función f.

cerrado Dícese de un conjunto de números, cuando el resultado de una operación efectuada con dos elementos del conjunto es de nuevo un elemento del conjunto.

coeficiente Véase coeficiente numérico.

coeficiente numérico. El número que aparece como factor en una expresión.

constante Una variable cuyo valor no cambia en un problema determinado. Consultese: termino constante, variable.

constante absoluta Una constante (*q.v.*) cuyo valor nunca cambia; por ejemplo, cualquier número, como el 3.

coordenadas La abscisa y la ordenada (*q.v.*) de un punto en un sistema de coordenadas cartesianas; en general, los símbolos, generalmente numéricos, que sirven para localizar un punto en cualquier sistema de coordenadas.

coordenadas cartesianas Un sistema de coordenadas formado por dos rectas que se interceptan perpendicularmente, llamadas eje de las X y eje de las Y. También se llaman coordenadas rectangulares.

coordenadas polares Un sistema de coordenadas que emplea el radio vector r de un punto y el ángulo θ formado entre el radio vector y la parte positiva del eje de las X. Las coordenadas polares de un punto P son entonces r y θ, escribiéndose $(r.\theta)$.

coordenadas rectangulares Véase coordenadas cartesianas.

corchetes Los símbolos de agrupación [ ].

cuadrado La palabra usada para representar el resultado de elevar un número o un multinomio a la segunda potencia (*q.v.*)

cuadrado perfecto un entero que es el cuadrado de otro entero o un multinomio que es el cuadrado de otro multinomio

cubo La palabra que designa el resultado de elevar un número o un multinomio a la tercera potencia (*q.v.*)

desigualdad Una proposición que representa que una expresión es mayor que (simbólicamente $>$), o menor que (simbólicamente $<$), otra expresión.

desigualdad absoluta Una desigualdad (*q.v.*) que es verdadera para todos los valores reales de una variable.

desigualdad condicional Una desigualdad (*q. v.*) que es verdadera para algunos valores reales de la variable y que es falsa para otros.

diferencia común El número que debe sumarse a cualquier término de una progresión aritmética (*q.v.*) para obtener el término siguiente.

dígito Cualquiera de los diez números 0, 1, 2, 9 (proviene de la expresión latina que significa dedo).

discriminante El número b^2 —$4ac$, en donde a, b y c son los coeficientes de la ecuación de segundo grado $ax + bx + c = 0$. Consúltese: fórmula de la ecuación de segundo grado.

dividiendo Véase división.

división La operación inversa de la multiplicación en un sistema numérico. La solución de la ecuación $bx = a$, en donde a es el dividendo, b es el divisor y x es el cociente.

divisor Véase división.

dominio El conjunto de los valores permisibles de la variable independiente de una función (*q.v.*). Consúltese: variable dependiente.

ecuación Una proposición que establece que dos expresiones, de las cuales por lo menos una contiene una incógnita, son iguales.

ecuación condicional Una ecuación que es verdadera para algunos valores de sus incógnitas y que es falsa para otros valores de ellas.

ecuaciones consistentes Un sistema de n ecuaciones de primer grado con n incógnitas que tiene sólo una solución.

ecuación cuadrática Véase ecuación de segundo grado.

ecuación de primer grado Una ecuación en la que la incógnita aparece únicamente a la primera potencia y en forma de numerador.

ecuación degradada Si $F(x) = (x - r)G(x)$, entonces $G(x) = 0$ se llama ecuación degragradada con respecto a $x = r$. Esta construcción constituye un proceso útil en la resolución de ecuaciones polinomiales.

ecuaciones dependientes Dos ecuaciones de primer grado relacionadas de tal modo que una puede obtenerse de la otra mediante la multiplicación de cada término por una constante adecuada.

ecuación de segundo grado Una ecuación del tipo $ax_2 + bx + c = 0$, en donde a, b y c son números reales.

ecuaciones equivalentes Dos ecuaciones en las que toda solución de una de ellas es solución de la otra.

ecuación exponencial Una ecuación en la cual la incógnita aparece como exponente (q.v.).

ecuación homogénea Dícese de las ecuaciones en las que todos los términos son de un mismo grado en la incógnita; como consecuencia el término constante es igual a cero.

ecuaciones inconsistentes Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que no tienen solución común. Consúltese: ecuaciones dependientes.

ecuación lineal Véase ecuación de primer grado.

ecuación logarítmica Una ecuación en la que aparece el logaritmo de la incógnita.

entero positivo Dícese de los números empleados en la aritmética para contar.

expectación matemática El producto de una cantidad ofrecida como premio por la probabilidad de obtener dicho premio.

exponente El número escrito arriba y a la derecha de otro número y que denota el número de veces que el último número aparece como factor en un producto.

expresión Un número, o variable, o una combinación de ambos obtenida mediante operaciones algebraicas. Consúltese: término.

extremos Los términos primero y cuarto de una proporción (*q.v.*) cuando está escrita en la forma $a{:}b = c{:}d$ o $a/b = c/d$.

factor Un divisor exacto de una expresión.

factor común Un número o expresión algebraica que es factor (*q.v.*) de dos o más términos.

factorial de n El producto del entero positivo n con todos los enteros positivos menores que n; por ejemplo, si $n = 4$, el factorial de n es $4 \text{x} 3 \text{x} 2 \text{x} 1 = 24$. Se simboliza con $n!$

factorizar Descomponer una expresión en sus

factores.

forma polar de un número complejo La expresión de un número complejo (*q.v.*) $a + bi$ en términos de su radio vector r cuyo valor es el módulo (*q.v.*), y del ángulo formado por el radio vector y la parte positiva del eje de las X; es decir, $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ en donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\theta = \arctan b/a$.

fórmula de la ecuación de segundo grado La fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

la cual produce las raíces de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Consúltese: discriminante.

fracción El cociente indicado de dos números o expresiones; si la fracción es N/D; N se llama numerador y D se llama denominador.

fracción compleja Una fracción que contiene fracciones en su numerador, en su denominador o en ambos.

fracciones parciales Fracciones de formas sencillas en cuya suma puede descomponerse cualquier fracción racional.

función Conjunto de parejas ordenadas (x,y) relacionadas de tal modo que a cada x corresponde por lo menos una y.

grado de un multinomio La mayor suma de exponente (*q.v.*) de las variables que se puede obtener al considerar por separado los términos del multinomio.

gráfica Un diagrama basado en un sistema de coordenadas tales como el cartesiano o el polar (*q.v.*), y cuyo propósito es ilustrar alguna relación entre datos numéricos. También se aplica al lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación.

identidad Una ecuación que es verdadera para todo valor permisible de las variables que contiene.

índice de un radical Un número colocado sobre el símbolo radical y que indica la raíz que debe extraerse.

inversión Un cambio en el orden de los términos de una proporción (*q.v.*) que se efectúa invirtiendo cada razón. Así, por inversión, $a/b = c/d$ es equivalente a $b/a = d/c$, o bien $a:b = c:d$ es equivalente a $b:a = d:c$.

ley asociativa Principio fundamental de un sistema númerico que expresa que la suma (o el producto) de tres números encontrada efectuando la suma (producto) de los dos primeros y luego sumando (multiplicando por) el tercero, o bien encontrando la suma (producto) de los dos últimos y luego sumando (multiplicando por) el primero, es la misma.

ley conmutativa Principio fundamental de un sistema númerico que expresa que la suma (o el producto) de dos números encontrada sumando el primero con el segundo (multiplicando el primero por el segundo) y la encontrada sumando el segundo con el primero (multiplicando el segundo por el primero) es la misma.

ley distributativa Principio de un sistema númerico que relaciona la suma con la multiplicación en la forma siguiente: si a, b yc son elementos del sistema, entonces $a(b + c) = ab + ac$.

logaritmo El exponente que indica la potencia (q.v.) a la que debe elevarse un número llamado base para producir un número dado. Por ejemplo, el logaritmo de 100 en la base 10 es 2. Consúltese: logaritmos de Briggs, logaritmos naturales, mantista, característica.

logaritmos decimales Véase logaritmos de Briggs.

logaritmos de Briggs Sistema de logaritmos (*q.v.*) con base 10. Tambien llamados logaritmos decimales.

logaritmos de Napier Véase logaritmos naturales.

logaritmos naturales Sistema de logaritmos (*q.v.*) con base $e = 2.7182818$. Tambíen se llaman logaritmos de *Napier*.

llaves Los símbolos de agrupación { }.

mantista La parte decimal positiva de un logaritmo decimal. Por ejemplo, en $\log 20 = 1.3010$, la mantista es .3010 y la característica (*q.v.*) es 1.

medio(s) armónico(s) El término o términos entre dos términos dados cualesquiera de una progresión armónica (*q.v.*).

medio(s) aritmético(s) El término o términos entre dos términos dados cualesquiera de una progresión aritmética (*q.v.*).

medio(s) geométrico(s) El término o términos entre dos términos dados cualesquiera de una progresión geométrica (*q.v.*).

media proporcional Los términos segundo o tercero de una proporción (*q.v.*) en el caso en que sus valores son iguales: por ejemplo, b en $a:b = b:c$; de donde $b = \pm\sqrt{ac}$. También se llama medio geométrico.

miembros Las expresiones que aparecen a la izquierda y a la derecha del signo de igualdad

en una ecuación.

mínimo común múltiplo El menor número que es divisible por cada uno de los elementos de un conjunto de números; o el multinomio de menor grado (*q.v.*) y con los menores coeficientes enteros, que es divisible por cada uno de los elementos de un conjunto de multinomios. Se abrevia M. C. M.

mínima expresión Dícese de una fracción cuyo numerador y denominador no tienen factores comunes mayores que 1.

módulo La distancia del origen (*q.v.*) al punto del plano complejo (*q.v.*) que representa a un número complejo (*q.v.*) También se llama valor absoluto del número complejo y radio vector del punto que representa al número complejo.

monto compuesto La cantidad obtenida al sumar el capital con el interés de un período dado.

multinomio Una expresión que contiene más de un término.

multinomio factorizable Un multinomio (*q.v.*) con coeficientes racionales que pueden expresarse como el producto de dos o más multinomios con coeficientes racionales. Consúltese: coeficiente numérico.

multinomio irreducible Un multinomio que no puede ser factorizado.

multiplicación Nombre de una de las operaciones algebraicas básicas, definida en la aritmética como la adición de un número (multiplicando) un cierto número de veces(multiplicador). El resultado de esta operación se llama producto.

multiplicando Véase multiplicación.

múltiplo común Un número que es divisible entre cada uno de los elementos de un conjunto de números; por ejemplo 64 es divisible entre 8, 4 y 2. Consúltese: mínimo común múltiplo.

número complejo Un número de la forma $a + ib$, en donde a y b son números reales (*q.v.*) e $i = \sqrt{-1}$.

número complejo conjugado Cualquiera de los dos números complejos (*q.v.*) que sólo difieren en el signo de sus partes imaginarias. Por ejemplo, $e + bi$ y $a - bi$ son conjugados.

número imaginario La raíz cuadrada de un número negativo. Consúltese: número real.

número imaginario puro El número complejo $a + bi$ en donde $a = 0$.

número irracional Un número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros. Consúltese: Número racional.

número primo Un entero positivo mayor que 1 que no tiene factores enteros con excepción de él mismo y 1. Consúltese: multinomio irreducible.

número racional Un número real que puede expresarse como el cociente de los enteros. Consúltese: número irracional.

número reales El conjunto de números que comprende a todos los números racionales y a todos los números irracionales (*q.v.*).

ordenada La distancia dirigida medida perpendicular desde el eje de las X hasta un punto en un sistema de coordenadas cartesianas (*q.v.*). Consúltese: abcisa, origen.

origen Punto de referencia en un sistema de coordenadas. En el sistema cartesiano (*q.v.*) es la intersección de los ejes de las X y de las Y. Consúltese: abscisa, ordenada.

operaciones fundamentales Adición, sustracción, multiplicación y división.

pago periódico La suma invertida al principio o al final de cada intervalo igual al período de una renta (*q.v.*)

paréntesis Los símbolos de agrupación ( ).

permutación Cada uno de los posibles arreglos y ordenamientos de un conjunto de n elementos.

período de capitalización El tiempo entre dos sumas consecutivas del capital con el interés.

período de una renta El tiempo entre dos pagos consecutivos de una renta (*q.v.*).

pi ó π El cociente que se obtiene al dividir la longitud de una circunferencia entre su diámetro.

plano complejo El plano determinado por dos rectas que se intersectan en ángulo recto (llamadas eje de los reales y eje de los imaginarios) en el cual pueden localizarse los números complejos.

polinomio Una expresión de la forma ..... en donde n es un entero positivo y cada a_i, $i = 1, \ldots, n$, es un número complejo.

posición de referencia La posición del punto decimal en un número igual o mayor que 1 y menor que 10.

potencia El resultado de tomar un número o una expresión varias veces como factor. Por ejemplo, a^n, que es la enésima potencia de a, es el resultado de tomar a, n veces como factor, en donde n es un entero positivo.

probabilidad El número p, $0 \leqq p \leqq 1$, asignado para medir la oportunidad de que ocurra un suceso simple. Consúltese: probabilidad

empírica.

probabilidad empírica La probabilidad (*q.v.*) expresada como h/n de que un evento ocurra en una prueba cuando la experiencia ha mostrado que ocurre h veces en n pruebas.

producto Véase multiplicación.

progresión aritmética Una sucesión de números relacionados de tal modo que cada elemento después del primero puede obtenerse del elemento inmediatamente anterior sumándole una cantidad fija, llamada la diferencia común.

progresión armónica Una sucesión de números cuyos recíprocos (*q.v.*) forman una progresión aritmética (*q.v.*)

progresión geométrica Una sucesión de números relacionados de tal modo que cada elemento después del primero puede obtenerse multiplicando el elemento inmediatamente anterior por un número fijo llamado la razón común.

proporción La proposición que expresa la igualdad de dos razones.

raíz cuadrada Nombre de cada uno de los dos factores iguales cuyo producto es un número o un multinomio.

raíz cúbica Nombre de cada uno de los tres factores iguales cuyo producto es un número o un multinomio. (*q.v.*)

raíz de una ecuación Un valor de la incógnita que satisface la ecuación.

raíz de un número Un número que al multiplicarse por sí mismo un número especificado de veces, produce el número dado.

raíz enésima principal La raíz enésima real positiva de un número en caso de que ésta exista, en el caso contrario, la raíz enésima real negativa.

razón La división indicada de una cantidad entre otra.

razón común El número por el cual debe multiplicarse cualquier término de una progresión geométrica (*q.v.*) para obtener el siguiente término.

recíproco Un número es el recíproco de otro si el producto de ambos es 1,

renta Sistema de pagos iguales hechos al principio o al final de intervalos iguales.

renta vencida Sistema de pagos iguales hechos al final de intervalos iguales.

solución trivial Solución de un sistema de ecuaciones homogéneas de primer grado (*q.v.*) en la que el valor de cada incógnita es igual a cero.

sucesos dependientes Sucesos relacionados de tal modo que la ocurrencia de una afecta a la probabilidad de la ocurrencia de otro. Consúltese: sucesos independientes.

sucesos independientes Sucesos relacionados de tal modo que la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de la ocurrencia de otro. Consúltese: sucesos dependientes.

tasa efectiva La tasa anual con la que aumenta el capital si la tasa nominal j es capitalizable m veces por año. Consúltese; tasa nominal.

tasa nominal Tasa con período de capitalización diferente de un año. Consúltese: tasa efectiva.

término Una expresión (*q.v.*) que consta de un número, de una variable, o de una combinación de ambos empleando únicamente las operaciones de multiplicación y división.

valor absoluto El valor absoluto de un número real a es a si a es mayor o igual que cero, y es $-a$ si a es menor que cero. Se llama también valor numérico.

valor actual El valor de un renta (*q.v.*) al principio de su término.

valor numérico Véase valor absoluto.

variable Un símbolo que representa a cualquiera de los elementos de un conjunto de números. Consúltese: constante.

variable dependiente La variable (*q.v.*) cuyos valores admisibles son los segundos elementos de las parejas ordenadas que forma una función (*q.v.*).

variable independiente La variable cuyos valores admisibles son los primeros elementos de las parejas ordenadas que forman una función.

variación El comportamiento de una variable dependiente (*q.v.*) debido a un cambio en la variable dependiente. Si $y = kx$, se dice que y es directamente proporcional a x. Si $y = k/x$, se dice que y es inversamente proporcional a x. Si $w = kxy$, se dice que w es conjuntamente proporcional a x y a y.

INDICE

Programas Educativos, S.A. de C.V.
Calz. de Chabacano No.65, Local A
Col. Asturias, C.P. 06850, México, D.F.
Fecha: Octubre 2011
Empresa Certificada por el
Instituto Mexicano de Normalización
Y Certificación A.C. bajo la norma
ISO – 9002: 1994/NMX-CC-004: 1995
con el No. de registro RSC-048

ISBN 978-968-6708-07-3
9 789686 708073
MÉXICO

ISBN 84-291-5111-7
9 788429 151114
ESPAÑA

REVERTE EDICIONES, S.A. DE C.V.